1982 г. Март *Том 136, вып. 3*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

531.5

ПРОБЛЕМА ЭНЕРГИИ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

Л. Д. Фаддеев

Посвящается памяти В. А. Фока

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Понятие энергии играет центральную роль в современной теоретической физике. Закон сохранения энергии (а также импульса и момента импульса) является следствием однородности времени (однородности и изотропности пространства). В этом смысле понятие энергии связано с фундаментальной структурой пространства-времени. Характерным свойством энергии является ее положительность, отражающая устойчивость физической системы.

Традиционный способ определения энергии и импульса в релятивистской теории поля основан на введении тензора энергии-импульса. Этот тензор определяется как вариация действия по отношению к внешнему гравитационному полю. Такой способ неприменим в случае, когда гравитационное поле само рассматривается как динамическая переменная, так как возникающий тензор тождественно исчезает в силу уравнений движения. В связи с этим в теории тяготения понятие энергии нуждается в дополнительном обсуждении.

Вопрос об определении основных интегралов движения — энергии, импульса и момента импульса — возник сразу после окончательной формулировки теории тяготения Эйнштейном и Гильбертом в конце 1915 г. и в существенном был решен Эйнштейном к 1918 г. (см. [1]). Его предложение первоначально вызвало много вопросов и возражений у современников, среди которых были Лоренц, Леви-Чивита, Шрёдингер и др. Эта дискуссия хорошо отражена в известном обзоре Паули [34]. Однако ситуация постепенно прояснилась и сформировалась концепция, вошедшая в учебники и монографии (см., например, [2-5]), которую можно сформулировать следующим образом:

1. Энергию (а также другие основные интегралы движения) гравитационного поля, взаимодействующего с системой масс и полей материи,

можно ввести в случае если пространство-время асимптотически плоское, т. е. совпадает с пространством Минковского асимптотически на пространственной бесконечности.

2. Энергия гравитационного поля не локализуема, т. е. не существует однозначно определенной плотности энергии.

Асимптотическое условие пункта 1 заменяет однородность по времени в обычной релятивистской теории поля. Оно позволяет определить динамический сдвиг по времени как сдвиг относительно наблюдателя, расположенного далеко от тяготеющей материи, и связать с ним энергию. В противоположность этому в космологических моделях нет естественного сдвига по времени и соответственно нет понятия энергии.

Нелокализуемость энергии гравитационного поля связана со спецификой принципа относительности в теории тяготения. Физической величиной является не метрика пространства-времени, а класс эквивалентных метрик, отличающихся произвольным преобразованием координат, согласованным с асимптотическими условиями. Значение метрики в данной точке пространства-времени не имеет абсолютного значения, а сама теория тяготения в этом смысле является принципиально нелокальной.

Эти положения подробно и аргументированно обсуждаются в цитированных монографиях.

К приведенным двум пунктам следует добавить еще один:

3. Полная энергия гравитационного поля и тяготеющей материи положительна и исчезает только в отсутствие материи и гравитационных волн, когда метрика совпадает с плоской метрикой Минковского.

Однако этот результат еще не вошел в монографии. Доказательство оказалось трудной задачей математической физики, которая была решена лишь совсем недавно. Особенно элегантное решение было только что найдено Виттеном [6], и оно будет приведено в основном тексте.

На протяжении шестидесяти лет теории тяготения Эйнштейна его решение проблемы энергии продолжало подвергаться сомнению. Критика кристаллизировалась в ряд фиксированных идей, которые периодически появлялись в публикациях различных авторов. В недавней серии работ А. А. Логунова с сотрудниками (см. [7,8]) эта критика послужила стимулом для построения новой теории тяготения. В основном тексте мы упомянем несколько основных аргументов этой критики и покажем, в чем состоит их неправомерность.

В настоящей статье мы дадим обзор положения с энергией в теории тяготения Эйнштейна с точки зрения гамильтоновой динамики. В таком подходе энергия выступает как динамическая наблюдаемая — генератор сдвига по времени. Вместе с энергией P_0 импульс P_k, момент импульса M_{ik} и лоренцев момент M_{0k} составляют 10 генераторов группы Пуанкаре, которые действуют в фазовом пространстве системы полей материи и гравитационного поля. С этой точки зрения динамическая группа теории тяготения в случае асимптотически плоского пространства-времени не отличается от такой группы любой другой релятивистской динамической системы. На выделенную роль группы Пуанкаре в теории тяготения особенно настойчиво указывал В. А. Фок [2].

История использованного нами подхода идет от работ Дирака [9] 1958—1959 гг., в которых Дирак применил к полю тяготения созданную им ранее [10] общую теорию динамических систем, описываемых сингулярными лагранжианами. В 60-х годах этим подходом занимались многие авторы, из которых упомянем группу Арновита — Дезера — Мизнера [11], Швингера [12], Де-Витта [13], Редже и Тетельбойма [14]. Несмотря на фундаментальность метода, он пока не вошел в учебную литературу и рассматривается многими скорее как экзотика, чем как основной путь изложения теории тяготения. Его роль общепризнана лишь в области квантовой теории тяготения (см., например, обзор [15]).

Мы надеемся, что предлагаемый обзор послужит популяризации гамильтонова подхода к теории тяготения. Удовлетворительное решение с его помощью проблемы энергии убедительно иллюстрирует силу метода и еще раз показывает, что сама теория тяготения не нуждается ни в ревизии, ни в замене.

Приведем краткое содержание обзора. В гл. 1 мы формулируем основные положения обобщенной гамильтоновой динамики Дирака для систем, заданных при помощи сингулярного лагранжиана. В гл. 2 мы вводим понятие асимптотически плоского пространства-времени и обсуждаем его группу преобразований. В гл. 3 обобщенная гамильтонова формулировка будет дана для теории тяготения, причем естественно возникнут генераторы группы Пуанкаре и энергия среди них. Наконец, в гл. 4 мы обсудим кратко историю вопроса о положительности энергии и приведем доказательство Виттена. В приложения I и II выделены некоторые громоздкие вычисления.

Мы используем обычные релятивистские обозначения: $\mu = (0, i)$ — координатный индекс, $a = (0, \alpha)$ — локальный лоренцев индекс, $\eta^{\mu\nu}$ — метрический тензор пространства Минковского с сигнатурой $(-+++)$.

1. ОБОБЩЕННАЯ ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМУЛИРОВКА

Понятие обобщенной гамильтоновой формулировки динамики механической системы появилось в работах Дирака [10, 16], посвященных сингулярным лагранжианам. Дирак сам перенес эту формулировку на теорию поля и применил ее для теории тяготения в [9, 17].

Мы поясним это понятие сначала на примере механической системы с конечным числом степеней свободы. Пусть система описывается n парами переменных p_i, q^i, $i = 1, \ldots, n$ и еще m переменными λ^a, $a = 1, \ldots, m$, причем лагранжиан имеет вид

$$l = \sum_i p_i \dot{q}^i - \sum_a \lambda^a \varphi_a(p, q) - h(p, q), \tag{1.1}$$

где φ_a, $a = 1, \ldots, m$, и h — некоторые функции от p и q. Мы используем так называемый «формализм первого порядка», когда производные от независимых динамических переменных входят в лагранжиан линейно. Лагранжиан (1.1) сингулярен, так как уравнения движения не содержат производных от переменных λ^a.

Естественно назвать p_i и q^i каноническими переменными, λ^a — множителями Лагранжа, φ_a — связями, а h — гамильтонианом. Через $\{f, g\}$ обозначим обычную скобку Пуассона:

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right). \tag{1.2}$$

Уравнения движения, вытекающие из вариационного принципа, имеют вид

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial h}{\partial q^i} - \sum_a \lambda^a \frac{\partial \varphi_a}{\partial q^i}, \quad \dot{q}^i = \frac{\partial h}{\partial p_i} + \sum_a \lambda^a \frac{\partial \varphi_a}{\partial p_i}, \quad \varphi_a = 0. \tag{1.3}$$

Будем говорить, что лагранжиан (1.1) определяет обобщенную гамильтонову формулировку, если связи и гамильтониан удовлетворяют условиям

$$\{\varphi_a, \varphi_b\} = \sum_d c^d_{ab}\varphi_d, \quad \{\varphi_a, h\} = \sum_b c^b_a \varphi_b, \tag{1.4}$$

где c^d_{ab} и c^b_a — произвольные функции p и q. Условие (1.4) означает, что скобки Пуассона связей между собой и с гамильтонианом исчезают на поверхности связей $\varphi_a = 0$. Оно гарантирует, что эта поверхность остается инвариантной при движении при любом выборе зависимости от времени множителей Лагранжа $\lambda^a(t)$. Условие $m < n$ необходимо для выполнения (1.4).

Обобщенная гамильтонова формулировка сводится к обычной, если решить уравнения связей и подставить решение в лагранжиан (1.1). При этом возникает новый лагранжиан

$$l^* = \sum_k p^*_k \dot{q}^{*k} - h^*(p^*, q^*), \tag{1.5}$$

где $k = 1, \ldots, n - m$ и гамильтониан h^* совпадает с h, ограниченным на поверхность связей:

$$h^* = h\,|_{\varphi=0}. \tag{1.6}$$

Действительно, в силу (1.4) на поверхности связей h не зависит от m переменных, канонически сопряженных со связями φ_a; эти же переменные при $\varphi_a = 0$ исчезают из кинематической формы $p_i\dot{q}^i$. Другими словами, связи φ_a, удовлетворяющие условиям (1.4), уменьшают число переменных в лагранжиане (1.1) на $3m$ и приводят к обычной гамильтоновой системе с $n - m$ степенями свободы. Функция $h^*(p^*, q^*)$ играет роль гамильтониана — энергии этой системы.

На практике уравнение связей решать трудно, и следует научиться работать с обобщенной гамильтоновой формулировкой. По этому поводу накоплен определенный опыт. Например, в [18] определено квантование механической системы, заданной в терминах обобщенной гамильтоновой формулировки. Для проблемы энергии, обсуждаемой в данной статье важно, что численные значения физического гамильтониана $h^*(p^*, q^*)$ совпадают со значениями обобщенного гамильтониана $h(p, q)$ на поверхности связей $\varphi_a = 0$. Поэтому для обсуждения общих свойств энергии таких, как положительность, достаточно знать $h(p, q)$ и связи и не обязательно вычислять $h^*(p^*, q^*)$.

Переход к теории поля проводится стандартным образом. Пространственные переменные x^k являются «номерами» степеней свободы, и $\sum_i$ заменяется на $\int d^3x$. Проиллюстрируем обобщенную гамильтонову формулировку теоретико-полевой системы на примере электродинамики, т. е. системы, состоящей из электромагнитного поля, взаимодействующего с заряженным полем, которое мы не будем конкретизировать.

Для описания электромагнитного поля используем потенциалы $A_\mu(x)$ и напряженности $F_{\mu\nu}(x)$. Роль переменных q и p играют $A_k(x)$, $E_k(x) = F_{0k}(x)$ и канонические переменные φ_α, π^α заряженного поля; A_0 является множителем Лагранжа, а F_{ik} можно считать явными функциями от A_k, $F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i$. Лагранжиан имеет вид

$$L = \int \Big[E_k \frac{d}{dt} A_k + A_0(\partial_k E_k + \rho(\varphi, \pi)) - \\ - \frac{1}{2}(E_k^2 + G_k^2) + \pi^\alpha \frac{d}{dt}\varphi_\alpha - h_c(\varphi, \pi, A_k) \Big\} d^3x, \tag{1.7}$$

где h_c — плотность энергии заряженного поля во внешнем электромагнитном поле, которое входит в h посредством пространственных ковариантных производных $\nabla_k = \partial_k + iA_k$, $\rho(\varphi, \pi)$ — плотность заряда, а $G_i = \varepsilon_{ijk}F_{jk}/2$ — магнитное поле. Мы положили равной 1 константу связи e. Функция $h_c(\varphi, \pi, A_k)$ положительна.

Очевидно, что (1.7) имеет вид (1.1), причем следует отождествить

$$h \equiv \int \left\{ \frac{1}{2}(E_k^2 + G_k^2) + h_c(\varphi, \pi, A_k) \right\} d^3x, \tag{1.8}$$

$$\varphi(x) \equiv \partial_k E_k + \rho = 0, \tag{1.9}$$

так что x играет также роль номера связи. С лагранжианом (1.7) ассоциируются скобки Пуассона

$$\{E_i(x), A_k(y)\} = \delta_{ik}\delta^{(3)}(x-y), \; \{\pi^\alpha(x), \varphi_\beta(y)\} = \delta_\beta^\alpha \delta^{(3)}(x-y). \tag{1.10}$$

Связь $\varphi(x)$ имеет наглядный геометрический смысл. Для произвольной функции $\Lambda(x)$ введем функционал

$$Q(\Lambda) = \int \varphi(x)\Lambda(x)\, d^3x \tag{1.11}$$

и рассмотрим генерируемое им каноническое преобразование. Имеем

$$\delta_\Lambda A_i = \{Q, A_i\} = -\partial_i \Lambda, \quad \delta_\Lambda E_i = 0, \tag{1.12}$$

а $\delta_\Lambda \varphi = \{\varphi, Q\}$ совпадает с инфинитезимальным фазовым преобразованием заряженного поля, которое генерируется плотностью заряда. Таким образом, $Q(\Lambda)$ является генератором калибровочного преобразования для электромагнитного и заряженного поля. Группа таких преобразований в электродинамике коммутативна, и гамильтониан по отношению к ней инвариантен. Это выражается в соотношениях

$$\{\varphi(x), \varphi(y)\} = 0, \quad \{h, \varphi(x)\} = 0, \tag{1.13}$$

которые легко проверить непосредственно. Эти соотношения реализуют определяющее свойство (1.4) обобщенной гамильтоновой формулировки. Уравнения движения

$$\dot{A}_k = \{H, A_k\} - \int A_0(y)\{\varphi(y), A_k\}\, d^3y = E_k + \partial_k A_0, \tag{1.14}$$

$$\dot{E}_k = \Delta A_k - \partial_k \partial_l A_l - \frac{\partial h_c}{\partial A_k}$$

вместе с (1.9) составляют все нетривиальные уравнения Максвелла, так что лагранжиан (1.7) действительно соответствует электродинамике. На самом деле он просто совпадает с явно релятивистски инвариантным лагранжианом в формализме первого порядка

$$L = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(F_{\mu\nu})^2 + L_c \tag{1.15}$$

после выражения магнитного поля F_{ik} через вектор-потенциал A_k.

В рассматриваемом простом примере связи можно решить явно. Роль переменных q^* и p^* играют φ_α, π^α и трехмерно-поперечные компоненты A_k^{T}, E_k^{T} полей A_k и E_k. Продольная компонента A_k^{L} поля A_k канонически сопряжена со связью и не входит в гамильтониан h. Продольная компонента E_k^{L} поля E_k выражается через p^* и q^* посредством уравнения связи. Если положить

$$E_k = \partial_k \chi + E_k^{\mathrm{T}}, \quad \partial_k E_k^{\mathrm{T}} = 0, \tag{1.16}$$

то уравнение (1.9) приобретает вид уравнения Пуассона

$$\Delta\chi = -\rho, \tag{1.17}$$

которое решается явно. Вклад $\frac{1}{2}\int (E_k^{\mathrm{L}})^2\, d^3x$ продольного поля в гамильтониан дает мгновенное кулоновское взаимодействие зарядов:

$$h_{0c} = \frac{1}{8\pi}\int \rho(x)\frac{1}{|x-y|}\rho(y)\, d^3x\, d^3y. \tag{1.18}$$

Однако решать связи не обязательно. Например, положительность полной энергии, складывающейся из энергии электромагнитных волн, энергии волн заряженного поля и кулоновской энергии,

$$h^* = \int \left\{\frac{1}{2}[(E_k^{\mathrm{T}})^2 + G_k^2] + h_c\right\} d^3x + h_{0c}, \tag{1.19}$$

следует из явной положительности обобщенной энергии (1.8).

Мы нарочно столь подробно остановились на стандартном и бесспорном примере электродинамики с тем, чтобы иметь возможность при разборе теории тяготения проводить параллель с этим более простым случаем. В следующих главах мы убедимся, что изложение гамильтоновой формулировки поля тяготения мало отличается от только что проведенной формулировки электродинамики. Существенное отличие будет обусловлено только тем, что в случае тяготения интересующая нас энергия сама является источником поля тяготения, в то время как в электродинамике таким источником является заряд.

2. АСИМПТОТИЧЕСКИ ПЛОСКОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ

Существует несколько определений асимптотически плоского пространства-времени, отличающихся уровнем ковариантности и математической строгости. Мы используем здесь наиболее наивное, но в то же время наглядное определение, основанное на введении допустимых координат. Как принято в геометрии, инвариантность этого определения обеспечивается введением допустимой группы преобразований.

Физически асимптотически плоское пространство-время отвечает ситуации, когда тяготеющие массы и поля материи при конечных временах эффективно сосредоточены в конечной области пространства. В этом случае вдали от такой области в пространственных направлениях существует лишь ньютоновский хвост поля тяготения, обусловленный всеми массами и энергией всех волновых полей, в том числе и энергией гравитационных волн. Ясно, что для описания такой ситуации имеет смысл использовать координаты, согласованные с этой картиной.

Будем рассматривать случай топологически простого пространства-времени, точки которого однозначно параметризуются четырьмя координатами x^μ, $-\infty < x^\mu < \infty$. Иногда рассматривают более общий случай, когда такие координаты можно ввести лишь в асимптотической области. Однако, как следует из результатов Яо и Шена [32], наше ограничение не является существенным.

Пусть $x^\mu = (x^0, x^i)$ — одна из таких систем, $g_{\mu\nu}$ — псевдоевклидова метрика с сигнатурой $(-+++)$ и $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ — компоненты связности. Эти данные определяют асимптотически плоское пространство-время, если при $r\to\infty$ и конечных t

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O\left(\frac{1}{r}\right),\quad \partial_\sigma g_{\mu\nu} = O\left(\frac{1}{r^2}\right),\quad \Gamma^\sigma_{\mu\nu} = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \tag{2.1}$$

где

$$r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2, \quad t = x^0, \tag{2.2}$$

а $\eta_{\mu\nu}$ — метрический тензор плоского пространства Минковского:

$$\eta_{00} = -1, \quad \eta_{0k} = \eta_{i0} = 0, \quad \eta_{ii} = 1. \tag{2.3}$$

Условия (2.1) означают, в частности, что при $r \to \infty$ координаты x^i пространственно подобны и декартовы, а координата x^0 — времениподобна. Условие на массы и поля материи, обеспечивающее их эффективную локализацию в компактной области пространства, можно сформулировать так:

$$T_{\mu\nu} = O\left(\frac{1}{r^4}\right), \tag{2.4}$$

где $T_{\mu\nu}$ — соответствующий тензор энергии-импульса.

Условие (2.1) не ограничивает координатные преобразования

$$x'^{\mu} = \eta^{\mu}(x) \tag{2.5}$$

в конечной области; однако при больших r функции $\eta^{\mu}(x)$ должны иметь асимптотическое поведение:

$$\begin{gathered} \eta^{\mu}(x) = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \\ \partial_{\nu}\eta^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \partial_{\nu}\partial_{\sigma}\eta^{\mu} = O\left(\frac{1}{r^{2+\alpha}}\right), \quad \alpha > 0, \end{gathered} \tag{2.6}$$

где Λ^{μ}_{ν} — матрица преобразований Лоренца и a^{μ} — произвольный постоянный вектор. Будем считать, что эти преобразования действуют в множестве метрик и связностей, отнесенных к фиксированной системе координат. Соответствующие бесконечно малые преобразования даются формулами

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu} &= -\partial_{\mu}\varepsilon^{\sigma} g_{\sigma\nu} - \partial_{\nu}\varepsilon^{\sigma} g_{\mu\sigma} - \varepsilon^{\sigma}\partial_{\sigma} g_{\mu\nu}, \\ \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= -\partial_{\mu}\varepsilon^{\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} - \partial_{\nu}\varepsilon^{\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} + \partial_{\sigma}\varepsilon^{\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \varepsilon^{\sigma}\partial_{\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}\varepsilon^{\sigma}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где ε^{μ} — векторное поле, имеющее при $r \to \infty$ асимптотику (2.6) с инфинитезимальными $\omega^{\mu}_{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} - \delta^{\mu}_{\nu}$ и a^{μ}.

Обозначим через G бесконечномерную группу, порожденную этими преобразованиями. Группа G имеет нормальную подгруппу G_0, порожденную преобразованиями (2.7), для которых $\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$ и $a^{\mu} = 0$, т. е. тождественными при $r \to \infty$. Фактор-группа

$$P = G/G_0 \tag{2.8}$$

совпадает с группой Пуанкаре — десятипараметрической группой сдвигов и поворотов в пространстве Минковского.

Группа G_0 является калибровочной группой теории тяготения в асимптотически плоском пространстве-времени. Две метрики, отличающиеся преобразованиями из этой группы, описывают одну и ту же физическую ситуацию, если, конечно, соответствующее преобразование проделано и над полями материи. В то же время группой симметрии лагранжиана, уравнений движения и граничных условий является группа G. Это значит, что в пространстве взаимодействующих полей материи и тяготения нетривиальным образом действует группа Пуанкаре. В частности, сдвиг по времени, определяемый формулой

$$x^i \to x^i, \quad x^0 \to x^0 + a^0 \tag{2.9}$$

с точностью до преобразования из группы G_0, дает возможность определить энергию.

Таким образом, с точки зрения динамики теория тяготения в асимптотически плоском пространстве-времени не отличается от других релятивистских теорий поля: роль динамической группы в ней играет группа Пуанкаре. В этом смысле термин «общая относительность» относится не к динамике, а к определению калибровочной группы. Эта точка зрения была сформулирована в [19] в только что введенных терминах. Она близка многим параллельным формулировкам других авторов, в особенности В. А. Фока[2].

Два последних абзаца носят декларативный характер. Они, однако, в нескольких словах подводят итог результатов, которые будут приведены в следующих двух главах.

Обсудим теперь функцию Лагранжа поля тяготения. Как уже ясно из гл. 1, нам будет удобно использовать формализм первого порядка, когда $g_{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ считаются независимыми динамическими переменными. В качестве плотности функции Лагранжа обычно рассматривают скалярную плотность:

$$\sqrt{-g}\,R = \sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\,(\Gamma), \tag{2.10}$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\sigma\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \partial_\mu\Gamma^{\sigma}_{\nu\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma},$$

или функцию L, отличающуюся от $\sqrt{-g}\,R$ на полную дивергенцию

$$L = \sqrt{-g}\,R + \partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\nu\sigma} - \sqrt{-g}\,g^{\nu\sigma}\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}\right) \tag{2.11}$$

и дающую тем самым те же уравнения движения. Сторонники второго варианта обычно занимают оборонительную позицию, признавая фундаментальную роль $\sqrt{-g}\,R$ и ссылаясь только на формальное удобство L (например, отсутствие в L вторых производных от $g_{\mu\nu}$ в формализме второго порядка). Однако в асимптотически плоском пространстве-времени L является единственно допустимой плотностью, участвующей в определении действия

$$S = \int L\, d^3x\, dt, \tag{2.12}$$

где интегрирование ведется по всему пространству и конечному интервалу времени. Вследствие условий (2.1) имеем при $r \to \infty$

$$\sqrt{-g}\,R = O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad L = O\left(\frac{1}{r^4}\right), \tag{2.13}$$

причем первая оценка верна, только если в дополнение к (2.1) предположить, что $\partial_\lambda\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = O\left(\frac{1}{r^3}\right)$. Поэтому именно S, а не

$$\tilde{S} = \int \sqrt{-g}\,R\, d^3x\, dt \tag{2.14}$$

инвариантно по отношению к группе G. Действительно, из (2.7) следует, что

$$\begin{gathered} \delta\left(\sqrt{-g}\,R\right) = -\,\partial_\sigma\left(\varepsilon^\sigma\sqrt{-g}\,R\right), \\ \delta L = -\,\partial_\sigma\left(\varepsilon^\sigma L + \sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\partial_\nu\varepsilon^\sigma - \sqrt{-g}\,g^{\mu\sigma}\partial_\mu\partial_\nu\varepsilon^\nu\right). \end{gathered} \tag{2.15}$$

При интегрировании по частям внеинтегральные члены для δS на пространственной бесконечности пропадут в силу (2.13) и (2.6). В аналогичном же интеграле для $\delta\tilde{S}$ они, вообще говоря, не исчезнут. Все это показывает, что корректный вариационный принцип для поля тяготения в асимптотически плоском пространстве-времени должен быть основан на действии S.

Использование плотности функции Лагранжа L резко критикуется в [20] в связи с ее нековариантностью. Однако, как мы только что показали, функция Лагранжа $\int L\, d^3x$ является инвариантной по отношению к допустимым преобразованиям из группы G. Таким образом, упомянутые возражения несостоятельны, так как они не учитывают граничные эффекты в некомпактном асимптотически плоском пространстве.

При определении асимптотически плоского пространства-времени нельзя существенно ослабить условие убывания остаточных членов в формулах (2.1) и (2.6). Непример, если вместо (2.1) использовать

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+O\left(\frac{1}{r^{\alpha}}\right),\quad \partial_\sigma g_{\mu\nu}=0\left(\frac{1}{r^{1+\alpha}}\right), \tag{2.16}$$

то при $\alpha\leqslant 1/2$ действие (2.12) потеряет смысл, так как пространственный интеграл разойдется. Интересный случай полей тяготения с ньютоновской асимптотикой входит в класс (2.1), так что физических причин для ослабления условий (2.1) нет.

В недавней работе [35] используется координатное преобразование с асимптотикой

$$\eta^{\mu}(x)-x^{\mu}=O\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right),\quad \partial_\mu\eta^{\nu}=\delta^{\nu}_{\mu}+O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right), \tag{2.17}$$

которое выводит метрику из класса (2.1) и переводит ее в класс (2.16) с $\alpha=1/2$. По отношению к таким преобразованиям данное ниже определение энергии не инвариантно. С нашей точки зрения такие координатные преобразования недопустимы. Например, действие (2.12) по отношению к ним не инвариантно. Более строгие рассуждения должны быть основаны на детальном обсуждении компактификации многообразия, соответствующего асимптотически плоскому пространству-времени. Координатные преобразования (2.17) сингулярны на этом многообразии. Однако подобное обсуждение выходит за рамки принятого в этом обзоре наивного, но наглядного определения допустимых координат.

В заключение скажем несколько слов об общей ковариантности. Разумеется, как и в любой теории, формулируемой в пространстве-времени, в теории тяготения можно использовать произвольные координаты. Однако имеющее объективный физический смысл понятие асимптотически плоского пространства-времени формулируется просто и наглядно в используемых нами координатах, удовлетворяющих асимптотическому условию (2.1). В частности, важное для нас понятие сдвига по времени дается простой формулой (2.9). В ряде работ [21,22] критика определения энергии в теории тяготения Эйнштейна основана на использовании однородных преобразований координат, которые не являются преобразованиями Лоренца. Ясно, что возникающие при этом парадоксы связаны именно с таким нарушением асимптотических условий.

3. ОБОБЩЕННАЯ ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМУЛИРОВКА ДЛЯ ПОЛЯ ТЯГОТЕНИЯ

Подобно тому как в гл. 1 мы рассмотрели электродинамику, опишем гамильтонову динамику для поля тяготения, взаимодействующего с полем материи, используя начальные данные на поверхности $x^0=0$, которую будем считать пространственноподобной. В качестве переменных поля тяготения возьмем $g_{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$. Эти данные индуцируют на начальной поверхности метрику g_{ik} (первую квадратичную форму), которая положительна, и вторую квадратичную форму Γ^{0}_{ik}.

Удобно использовать тензорные плотности вместо упомянутых тензоров. Пусть

$$h^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \tag{3.1}$$

— контравариантная тензорная плотность четырехмерного метрического тензора. Обозначим

$$q^{ik} = h^{0i}h^{0k} - h^{00}h^{ik}, \quad \Pi_{ik} = \frac{1}{h^{00}} \Gamma^{0}_{ik}. \tag{3.2}$$

Матрица q^{ik} является контравариантной плотностью веса 2 метрики g_{ik}, $q^{il}g_{lk} = \delta^i_k \gamma$, $\gamma = \det \| g_{ik} \|$. Матрица Π_{ik} — ковариантная плотность веса — 1. Подробности по этому поводу см. в приложении I. В этом приложении детально показано, как после исключения несущественных переменных в действии (2.12) функция Лагранжа поля тяготения и полей материи, которые обозначим через φ_α, π^α, принимает вид

$$L = \int \left(\Pi_{ik} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q^{ik} + \pi^\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi_\alpha - \lambda^0 C_0 - \lambda^k C_k - H \right) \mathrm{d}^3x, \tag{3.3}$$

где

$$C_0 = q^{ik}q^{mn} (\Pi_{ik}\Pi_{mn} - \Pi_{im}\Pi_{kn}) + \gamma R_3 - T_{00}, \tag{3.4}$$

$$C_k = 2\nabla_k (q^{il}\Pi_{il}) - 2\nabla_l (q^{il}\Pi_{ik}) - T_{0k}, \tag{3.5}$$

$$H = - C_0 - \partial_i \partial_k q^{ik} \tag{3.6}$$

и

$$\lambda^0 = \frac{1}{h^{00}} + 1, \quad \lambda^k = \frac{h^{0k}}{h^{00}}, \tag{3.7}$$

причем ∇_i означает ковариантную производную по отношению к метрике g_{ik}, и R_3 — ее скалярная кривизна. Далее, T_{00} и T_{0k} — плотности энергии и импульса поля материи, которые зависят от канонических переменных поля материи и трехмерной метрики g_{ik}.

Например, для массивного скалярного поля

$$T_{00} = \frac{1}{2} (\pi^2 + q^{ik}\partial_i\varphi\partial_k\varphi + \gamma m^2\varphi^2), \tag{3.8}$$

$$T_{0k} = -\pi\partial_k\varphi, \tag{3.9}$$

причем считается, что φ — скаляр, а π — скалярная плотность веса 1. Мы будем считать, что для тензора энергии импульса поля материи выполняется условие положительности

$$T_{00} > | T_{0k} |, \quad | T_{0k} |^2 = q^{ik}T_{0i}T_{0k}, \tag{3.10}$$

что имеет место для примера (3.8), (3.9) и всех нормальных лагранжианов поля материи.

Заметим, что скалярная кривизна содержит линейно вторые производные от метрического тензора, так что $Q = -\gamma R_3 - \partial_i\partial_k q^{ik}$ представляет собой квадратичную форму первых производных от метрики по пространственным переменным:

$$Q = -\frac{1}{2} q^{ik}\partial_i \ln\gamma\partial_k \ln\gamma - \frac{1}{2} q_{ik}\partial_l q^{im}\partial_m q^{kl} - \frac{1}{4} q^{ik}\partial_i q_{lm}\partial_k q^{lm}. \tag{3.11}$$

В частности, $H(x)$ имеет асимптотику

$$H(x) = O\left(\frac{1}{r^4}\right), \tag{3.12}$$

и интеграл в (3.3) сходится.

Скобки Пуассона

$$\{\Pi_{ik}(x),\ q^{lm}(y)\} = \frac{1}{2}(\delta_i^l\delta_k^m + \delta_i^m\delta_k^l)\,\delta^{(3)}(x-y),$$
$$\{\pi^\alpha(x),\ \varphi_\beta(y)\} = \delta_\beta^\alpha\delta^{(3)}(x-y), \tag{3.13}$$

индуцируемые лагранжианом (3.3), согласованы с естественной трактовкой δ-функции как (би)скалярной плотностью веса 1. Для записи коммутационных соотношений, связей C_0 и C_k удобно ввести функционалы от вектора $X^k(x)$ и скалярной плотности $f(x)$ веса — 1:

$$C(X) = \int C_k(x)\,X^k(x)\,d^3x, \qquad C_0(f) = \int C_0(x)\,f(x)\,d^3x, \tag{3.14}$$

$$[C(X_1),\ C(X_2)] = C([X_1,\ X_2]), \tag{3.15}$$

$$[C(X),\ C_0(f)] = C_0(Xf), \tag{3.16}$$

$$[C_0(f_1),\ C_0(f_2)] = C([f_1,\ f_2]), \tag{3.17}$$

где $[X_1,\ X_2]$ — векторное поле с компонентами

$$X_1^l\partial_l X_2^k - X_2^l\partial_l X_1^k, \tag{3.18}$$

Xf — скалярная плотность веса — 1 вида

$$Xf = X^l\partial_l f - f\partial_l X^l \tag{3.19}$$

и $[f_1,\ f_2]$ — векторное поле с компонентами

$$q^{ik}(f_1\partial_i f_2 - f_2\partial_i f_1). \tag{3.20}$$

Действие связей $C(X)$ и $C_0(f)$ на канонические переменные выявляет их геометрический смысл: $C(X)$ являются генераторами трехмерных координатных преобразований, а $C_0(f)$ соответствует преобразованию первой и второй квадратичных форм поверхности при ее деформации.

Уравнения движения, вытекающие из лагранжиана (3.3), совпадают с уравнениями Эйнштейна — Гильберта. Можно сказать поэтому, что этот лагранжиан дает обобщенную гамильтонову формулировку поля тяготения. В частности, обобщенный гамильтониан дается выражением

$$H = \int H(x)\,d^3x = \int [q^{ik}q^{lm}(\Pi_{il}\Pi_{km} - \Pi_{ik}\Pi_{lm}) + Q + T_{00}]\,d^3x, \tag{3.21}$$

и численные значения энергии совпадают с возможными значениями этого функционала на поверхности связей:

$$C_k(x) = 0, \quad C_0(x) = 0. \tag{3.22}$$

Подчеркнем, что гамильтониан (3.21) имеет обычную для релятивистской теории поля структуру: квадратичная форма импульсов + квадратичная форма первых производных от обобщенных координат.

Сравнивая (3.4) и (3.6), мы видим, что плотность гамильтониана $H(x)$ отличается от связи $C_0(x)$ на выражение типа дивергенции. Таким образом, численные значения энергии можно вычислять как предел интеграла по замкнутой двумерной поверхности S, раздувающейся на бесконечность:

$$E = \lim_{S\to\infty}\int_{(S)}(-\partial_i q^{ik})\,dS_k. \tag{3.23}$$

Именно подобное выражение для энергии дается в монографиях по теории тяготения, см. [2] — [5]. С нашей точки зрения (3.23) дает только численное значение энергии, а гамильтонианом и генератором сдвига по времени является выражение (3.21).

Формула (3.23), выражающая наблюдаемую величину — энергию — через асимптотику поля, не является характерной чертой теории тяготения. В электродинамике уравнение связи позволяет выразить полный заряд через асимптотику электрического поля:

$$Q = \int \rho(x)\, d^3x = \lim_{S\to\infty} \int E_k\, dS_k. \tag{3.24}$$

Формулы (3.23) и (3.24) сходны тем, что в них источники поля — заряд в электродинамике и энергия-масса в теории тяготения — выражаются через асимптотику поля. Важное отличие, однако, состоит в том, что в электродинамике заряд имеет два знака и исчезновение Q не влечет за собой исчезновения поля, в то время как в теории тяготения масса всегда положительна, и исчезновение полной массы приводит к отсутствию материи и поля тяготения, т. е. к плоскому пространству-времени. Это утверждение будет формально доказано в следующей главе.

К сожалению, в отличие от электродинамики, выражение (3.21) для полной энергии не является явно положительным. Поэтому вопрос о положительности энергии поля тяготения не решается просто. Мы рассмотрим здесь сравнительно простой случай слабых гравитационных волн. Общий случай сильного поля тяготения, взаимодействующего с материей, будет обсужден в следующей главе.

Итак, пусть

$$q^{ik} = \delta^{ik} + 2\chi^{ik}, \tag{3.25}$$

причем χ^{ik} и Π_{ik} малы и поля материи отсутствуют. Уравнения связи при этом линеаризуются:

$$\partial_i\partial_k\chi^{ik} = 0, \quad \partial_i\Pi_{ik} = \partial_k\Pi_{ii}, \tag{3.26}$$

причем мы не различаем верхние и нижние индексы, так как они подымаются и опускаются при помощи метрического тензора δ^{ik}. Энергия (3.21) в младшем неисчезающем порядке дается квадратичной формой

$$H = \int \left(\Pi_{ik}\Pi_{ik} - \Pi_{ii}\Pi_{kk} + \partial_i\chi^{kl}\partial_i\chi^{kl} - 2\partial_i\chi^{kl}\partial_k\chi^{il} - \frac{1}{2}\partial_i\chi^{kk}\partial_i\chi^{ll}\right) d^3x, \tag{3.27}$$

которая все еще не положительна. Однако она становится положительной после того, как мы учтем связи (3.26). Действительно, используем ортогональные разложения

$$\begin{aligned} \chi_{ik} &= \chi^{\mathrm{T}}_{ik} + \frac{1}{2}(\partial_i\chi_k + \partial_k\chi_i) - \delta_{ik}\partial_l\chi_l + \partial_i\partial_k\chi, \\ \Pi_{ik} &= \Pi^{\mathrm{T}}_{ik} + \frac{1}{2}(\partial_i\Pi_k + \partial_k\Pi_i) - \delta_{ik}\partial_l\Pi_l + \partial_i\partial_k\Pi, \end{aligned} \tag{3.28}$$

где

$$\Pi^{\mathrm{T}}_{ii} = 0, \quad \partial_i\Pi^{\mathrm{T}}_{ik} = 0, \quad \chi^{\mathrm{T}}_{ii} = 0, \quad \partial_i\chi^{\mathrm{T}}_{ik} = 0. \tag{3.29}$$

Тензор χ^{T}_{ik} параметризуется двумя функциями, так что χ^{T}_{ik} вместе с тремя функциями χ_i и одной функцией χ параметризуют произвольный симметричный тензор χ_{ik}. То же относится и к Π_{ik}. Связи (3.26) приводят к уравнениям

$$\nabla^4\chi = 0, \quad \nabla^2\Pi_i + 3\partial_i\partial_k\Pi_k = 0, \tag{3.30}$$

откуда получаем с учетом граничных условий

$$\chi = 0, \quad \Pi_i = 0. \tag{3.31}$$

Далее, выясняется, что χ_i и Π выпадают из выражения (3.27). Это естественно, так как они канонически сопряжены к связям (3.31). В результате (3.27) приводится к следующему явно положительному выражению:

$$H = \int [(\partial_i \chi_{kl}^{\mathrm{T}})^2 + (\Pi_{ik}^{\mathrm{T}})^2] \, \mathrm{d}^3x, \tag{3.32}$$

содержащему волновую энергию поперечных гравитационных волн.

В присутствии полей материи полная энергия включает также мгновенную ньютоновскую энергию притяжения, которая возникает при исключении χ и Π_i с помощью уравнений связи, которые модифицированы присутствием компонент T_{00} и T_{0i} тензора энергии-импульса материи в правых частях (3.26).

Подчеркнем, что выражение (3.32) квадратично по отклонению метрики q^{ik} от плоской. В работе [22] утверждение об исчезновении энергии гравитационных волн некорректно сделано на основании того, что энергия исчезает в первом приближении.

Подобно энергии мы можем ввести полный импульс P_k как генератор сдвига координат

$$x^k \to x^k + a^k, \quad x^0 \to x^0, \tag{3.33}$$

так что

$$P_k = \int (- \Pi_{lm} \partial_k q^{lm} + T_{0k}) \, \mathrm{d}^3x. \tag{3.34}$$

Заметим, что подынтегральное выражение $P_k\,(x)$ в (3.34) отличается на дивергенцию от связи $C_k\,(x)$. Действительно, учитывая веса плотностей Π_{ik} и q^{ik}, можем записать $C_k\,(x)$ в виде

$$C_k\,(x) = 2\partial_k\,(q^{lm}\,\Pi_{lm}) - 2\partial_l\,(q^{lm}\,\Pi_{mk}) + \Pi_{lm}\partial_k q^{lm} - T_{0k}. \tag{3.35}$$

Поэтому, численное значение импульса дается формулой, аналогичной (3.23):

$$P_k = \lim_{S\to\infty} \int 2\,(q^{lm}\Pi_{lm}\delta_k^i - q^{im}\Pi_{mk})\,\mathrm{d}S_i, \tag{3.36}$$

причем в (3.36) мы можем заменить q^{ik} на его асимптотическое значение.

Другие генераторы группы Пуанкаре вводятся аналогично. Мы не будем проводить соответствующие выкладки, так как они не существенны при обсуждении проблемы энергии. Скажем только, что окончательные выражения имеют обычный для релятивистской теории поля вид, если использовать асимптотически декартовы координаты и взять $H\,(x)$ в качестве T_{00} и $P_k\,(x)$ — в качестве $T_{0k}\,(x)$.

В заключение этой главы дадим краткую историю приведенных результатов и обсудим ряд типичных возражений. Связи $C_k\,(x)$, $C_0\,(x)$ и их скобки Пуассона были впервые даны Дираком в [9, 16]. Их вывод из лагранжиана Гильберта — Палатини и подробное обсуждение были проведены в серии работ Арновита, Дезера и Мизнера [11] и Швингера [12]. Различия формул в цитируемых работах объясняются выбором весов и вариантности первой и второй квадратичных форм. В данной статье мы следуем выбору Швингера. Наиболее ясное доказательство необходимости вычитания дивергенции в (3.6) дано в работе Редже и Тетельбойма [14].

Выражение (3.23) для энергии совпадает в асимптотически плоском пространстве-времени с выражением для нее через так называемый псевдотензор энергии-импульса, данным уже в первых работах Эйнштейна [1]. Разберем несколько типичных критических замечаний по поводу такого определения энергии поля тяготения.

а) Выражения (3.21) и (3.23) не являются общековариантными.

Как правило, эта критика относится к нековариантному псевдотензору энергии-импульса $\tau_{\mu\nu}$, компонента τ_{00} которого совпадает (в формулировке В. А. Фока) с плотностью в интеграле (3.21). Упомянутые во введении возражения Лоренца, Леви-Чивиты и Шрёдингера относились именно к этому понятию. В работах А. А. Логунова с сотрудниками эта критика доведена до экстремального утверждения [23]: «Псевдотензоры энергии-импульса в теории Эйнштейна не являются физическими характеристиками гравитационного поля и не имеют никакого смысла».

Мы согласны, что процедура введения псевдотензора энергии-импульса в работах Эйнштейна и в основных монографиях [2-5] носит формальный эвристический характер. Кстати, В. А. Фок даже не использует такой термин. Именно поэтому в данном обзоре мы используем гамильтонов подход к определению энергии как генератора сдвига по времени. Однако совпадение результатов гамильтонова подхода и подхода, основанного на использовании псевдотензора энергии-импульса к определению полной энергии в асимптотически плоском пространстве-времени показывает, что определение полной энергии Эйнштейном было корректным.

Что же касается критического замечания об общей ковариантности, то ответ на него был уже дан в конце гл. 2. Для описания ясной физической картины локализованных масс и полей удобно использовать асимптотически плоские координаты (2.1). В этих координатах энергия дается выражением (3.23). Для вычисления ее в произвольных координатах (например, в сферических, впервые использованных для критики в работе Бауэра [24], повторенной затем в работах [23,8] и др.) необходимо сделать пересчет, используя соответствующие коэффициенты Ламе и т. п. (см., например, [36]).

б) Выражение (3.23) дает тождественно нулевое значение для энергии. В наиболее четкой форме это утверждение сформулировано в [23]. Доказательство основано на следующем рассуждении: Для полей, сосредоточенных в компактной пространственной области $q^{ik} = \delta^{ik}$ и $\partial_i q^{ik} = 0$ тождественно вне этой области. Поэтому интеграл (3.23) дает для энергии исчезающее выражение.

Естественный и правильный выход из этого положения состоит в том, что $\partial_i q^{ik}$ имеет неисчезающий член $O(1/r^2)$ в асимптотике при $r \to \infty$ — ньютоновский хвост. Физически очевидный, но математически нетривиальный факт состоит в том, что гравитационное поле, слишком быстро убывающее в пространственных направлениях, является тождественно плоским.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ЭНЕРГИИ

Свойство положительности энергии имеет фундаментальное значение и связано с устойчивостью системы. В релятивистской теории поля выражение для энергии полей материи, следующее из тензора энергии-импульса или из гамильтоновой формулировки, явно положительно. В этом мы еще раз убедились в гл. 1 на примере электродинамики. Однако полученное в гл. 3 выражение для энергии поля тяготения (3.21) не является явно положительным. Еще меньше можно сказать о численном значении полной энергии поля тяготения и полей материи, даваемом формулой (3.23). Разобранный в гл. 3 пример слабого поля показывает, что доказательство положительности должно основываться на решении уравнений связей, которые в общем виде представляют собой сложную нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных.

Вопрос о положительности энергии поля тяготения не обсуждался серьезно в классический период развития этой теории. Его активная история насчитывает около 20 лет. Примеры специальных сильных полей, рассмотренные Араки [25] и Бриллом [26] в 1959 г., показали осмысленность самой постановки задачи о положительности энергии. Гипотеза о положительности получила поддержку в работах Брилла, Дезера и автора [27,28], однако наши вариационные аргументы были далеки от математической строгости. На протяжении 70-х гг. проблема положительности привлекла внимание многих специалистов по математической физике [29-31] и была окончательно решена в работе Яо и Шена [32,33]. Эта работа использует сложные математические методы, и мы не можем здесь ее излагать. К счастью, совсем недавно появилась замечательная работа Виттена[6], в которой было дано новое и формально простое доказательство положительности энергии. Мы приведем это доказательство в форме, несколько отличающейся от оригинальной работы [6]*).

Основной результат Виттена состоит в следующем утверждении: полную энергию поля тяготения и полей материи с положительным тензором энергии-импульса можно представить как явно положительную квадратичную форму от решения вспомогательного линейного уравнения, в которое поле тяготения входит как внешнее.

Линейное уравнение, использованное Виттеном, это уравнение Дирака, ограниченное на начальную поверхность $x^0 = 0$. Как известно, для записи уравнения Дирака следует использовать формализм ортогонального репера, в котором поле тяготения описывается набором четырех ортогональных векторов e_a^μ и коэффициентами связности $\omega_{\mu,ab}$. Локальный индекс a (номер вектора) опускается и подымается с помощью тензора η^{ab} (2.3). Связь с переменными $g_{\mu\nu}$, $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ дается формулами

$$g^{\mu\nu} = e_a^\mu \eta^{ab} e_b^\nu, \quad \omega_{\mu,ab} = e_a^\nu \partial_\mu e_{\nu b} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} e_{a\sigma} e_b^\nu, \tag{4.1}$$

где e_μ^a — матрица, обратная к e_a^μ:

$$e_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu, \quad e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a. \tag{4.2}$$

Непосредственно через e_a^μ коэффициенты связности $\omega_{\mu,ab}$ выражаются следующим образом:

$$\omega_{\mu,ab} = \frac{1}{2} e_\mu^c (\Omega_{cab} - \Omega_{abc} - \Omega_{bca}), \tag{4.3}$$

$$\Omega_{cab} = e_{\nu c} (\varepsilon_a^\mu \partial_\mu e_b^\nu - e_b^\mu \partial_\mu e_a^\nu). \tag{4.4}$$

Дальнейшие расчеты будем проводить в синхронной системе корддинат, налагая условия

$$e_0^0 = 1, \quad e^{00} = e_{00} = -1, \quad e_0^\alpha = e_0^i = 0, \tag{4.5}$$

совместные с асимптотическими условиями (2.1).

Трехмерный оператор Дирака D определим формулой

$$D = e_\alpha^i \gamma^\alpha \nabla_i, \quad \nabla_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{8} \omega_{\mu,ab} [\gamma^a, \gamma^b], \tag{4.6}$$

где γ^a, $a = 1, 2, 3, 0$ — обычные постоянные матрицы Дирака:

$$\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2\eta^{ab}. \tag{4.7}$$

---

*) В журнальной версии препринта Виттена [37], опубликованной после сдачи данного обзора в печать, автор отмечает, что его оригинальные рассуждения содержат ошибку. При подготовке обзора мы обнаружили эту ошибку (точнее, две взаимносокращающиеся ошибки) и в нашем тексте она не содержится.

Рассмотрим решение уравнения

$$D\psi = 0, \tag{4.8}$$

где спинор $\psi(x)$ при больших r имеет асимптотику

$$\psi = \psi_0 + O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \partial_\mu\psi = C\left(\frac{1}{r^{1+\alpha}}\right), \quad \alpha > \frac{1}{2}, \tag{4.9}$$

и ψ_0 — постоянный спинор. Виттен показал, что для асимптотически плоского поля тяготения, удовлетворяющего уравнению Эйнштейна — Гильберта, такое решение существует и единственно (см. также приложение II).

Элементарные, но громоздкие вычисления, которые мы приведем в приложении II, приводят к тождеству

$$\int \sqrt{\gamma}\left[\frac{1}{2}\psi^*\left(G_{00} + e_\alpha^k G_{0k}\gamma^0\gamma^\alpha\right)\psi + g^{ik}(\nabla_i\psi)^*\nabla_k\psi\right]d^3x =$$

$$= \frac{1}{4}\left(E(\psi_0^*\psi_0) + P_\alpha(\psi_0^*\gamma^0\gamma^\alpha\psi_0)\right), \tag{4.10}$$

где $G_{0\mu}$ — компоненты тензора Эйнштейна — Гильберта:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \tag{4.11}$$

а E и P_α — энергия и импульс, определенные в гл. 3 (3.23), (3.36). Положительность энергии немедленно следует из этого тождества.

Действительно, если выполняются уравнения Эйнштейна — Гильберта

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \tag{4.12}$$

то левая часть в (4.10) положительна. Относительно второго слагаемого это очевидно, а для первого слагаемого это следует из того, что матрица $a_\alpha\gamma^0\gamma^\alpha$ имеет собственными значениями $\pm\,|a|$, где $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ и неравенства (3.10). Выбирая теперь ψ_0 собственным вектором матрицы $P_\alpha\gamma^0\gamma^\alpha$ с собственным значением $-\,|P|$, получаем из (4.10)

$$E \geqslant |P|, \tag{4.13}$$

так что вектор $P_a = (E, P_\alpha)$ оказывается времениподобным.

Покажем теперь, что энергия E может исчезнуть, только если поля материи отсутствуют и метрика $g_{\mu\nu}$ — плоская, т. е. нет также и гравитационных волн. Действительно, при $E = 0$ из (4.13) следует также, что $P_\alpha = 0$, а тогда из (4.10) получаем, что

$$\nabla_i\psi = 0, \tag{4.14}$$

$$\psi^*\left(T_{00} + e_\alpha^k T_{0k}\gamma^0\gamma^\alpha\right)\psi = 0 \tag{4.15}$$

для любого решения ψ уравнения (4.8). Ковариантно постоянный спинор, не равный нулю на бесконечности, не исчезает при всех x на поверхности $x^0 = 0$. Рассматривая различные асимптотические значения ψ_0 для ψ, мы можем построить четыре линейно независимых спинора ψ_s, $s = 1, 2, 3, 4$, для которых выполняется (4.14), а вместе с ним и

$$[\nabla_i, \nabla_k]\,\psi_s = \frac{1}{8}R_{ik,ab}[\gamma^a, \gamma^b]\,\psi_s = 0. \tag{4.16}$$

В силу линейной независимости ψ_s, получаем отсюда

$$R_{ik\;ab} = 0, \tag{4.17}$$

т. е. тензор кривизны, ограниченный на начальную поверхность исчезает.

Далее, подбирая ψ_{0s} так, чтобы ψ_s были при данном x собственными векторами матрицы $e_\alpha^k\,T_{0k}\gamma^0\gamma^\alpha$, получаем из (4.15), что $T_{00} = \pm T_{0k}$, откуда

$$T_{00} = 0. \tag{4.18}$$

Последнее равенство приводит к исчезновению поля материи в силу положительности его плотности энергии. Таким образом, $T_{\mu\nu} = 0$, и из уравнений (4.12) имеем

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{4.19}$$

Нетрудно убедиться, что (4.19) вместе с (4.17) приводит к равенству

$$R_{0k,0\alpha} = 0, \tag{4.20}$$

откуда получаем, что на начальной поверхности $x^0 = 0$ исчезает полный тензор кривизны

$$R_{\mu\nu,ab} = 0. \tag{4.21}$$

Заметим теперь, что энергия — интеграл движения и что, таким образом, мы можем повторить проведенные рассуждения для любой поверхности $x^0 = a^0$. Таким образом, тензор кривизны тождественно исчезает во всем пространстве-времени и метрика $g_{\mu\nu}$ — плоская. Этим заканчивается доказательство положительности энергии для любой нетривиальной конфигурации гравитационного поля и полей материи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используя последовательный гамильтонов подход к теории тяготения Эйнштейна, мы показали, что в случае асимптотически плоского пространства времени эта теория допускает основные интегралы движения релятивистской теории, в том числе энергию и импульс. При этом полная энергия гравитационного поля и поля материи оказывается положительной и исчезает только при отсутствии материи и гравитационных волн. Мы упомянули также ряд критических замечаний, направленных против этого результата, и объяснили, в чем состоит их несостоятельность.

Таким образом, общепринятая теория тяготения вполне самосогласована и отвечает основным физическим требованиям. Положительное решение проблемы энергии снимает все сомнения по этому поводу и еще раз показывает, что теория Эйнштейна является наиболее естественным и красивым вариантом теории тяготения.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Здесь мы проведем редукцию общего лагранжиана (2.11) к виду (3.3). Вся специфика вывода связана с полем тяготения, так что для простоты будем считать, что поле материи отсутствует.

В плотность лагранжиана

$$L = \Gamma^{\sigma}_{\nu\sigma}\partial_{\mu}h^{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\partial_{\sigma}h^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}) \tag{П.1}$$

входят 10 переменных $h^{\mu\nu}$ и 40 переменных $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$. Из 50 уравнений движения 30 не содержат производных по времени, и мы можем использовать их для исключения нединамических переменных, подобно тому как в электродинамике исключается магнитное поле.

Выпишем эти уравнения в трехмерной форме:

$$\partial_l h^{ik} + \Gamma^{i}_{l\sigma}h^{\sigma k} + \Gamma^{k}_{l\sigma}h^{\sigma i} - h^{ik}\Gamma^{\sigma}_{l\sigma} = 0, \tag{П.2}$$

$$\partial_l h^{0k} + \Gamma^{0}_{lm}h^{mk} + \Gamma^{k}_{lm}h^{0m} + \Gamma^{k}_{l0}h^{00} - h^{0k}\Gamma^{m}_{lm} = 0, \tag{П.3}$$

$$\partial_l h^{00} + 2\Gamma^{0}_{lm}h^{m0} + \Gamma^{0}_{l0}h^{00} - h^{00}\Gamma^{m}_{lm} = 0. \tag{П.4}$$

Обозначим

$$q^{ik} = h^{0i}h^{0k} - h^{00}h^{ik} \tag{П.5}$$

и покажем, что

$$q^{ik} = \gamma\gamma^{ik}, \tag{П.6}$$

где γ^{ik} — контравариантная трехмерная метрика, соответствующая ограничению g_{ik} метрики $g_{\mu\nu}$ на поверхность $x^0 = 0$, а γ — метрический определитель. Действительно, по определению, $\gamma^{il}g_{lk} = \delta^i_k$, так что

$$\gamma^{ik} = g^{ik} - \frac{g^{0i}g^{0k}}{g^{00}} = \frac{1}{gg^{00}}\, q^{ik}, \tag{П.7}$$

где g — определитель метрики $g_{\mu\nu}$. С другой стороны, по определению обратной матрицы $g^{00} = \gamma g^{-1}$, так что

$$gg^{00} = \gamma, \tag{П.8}$$

и (П.6) доказано. Комбинируя уравнения (П.2), (П.3) и (П.4) очевидным образом, приходим к соотношению

$$\partial_l q^{ik} + \Gamma^i_{lm}q^{mk} + \Gamma^k_{lm}q^{mi} - 2\Gamma^m_{lm}q^{ik} + \\ + \Gamma^0_{lm}h^{mk}h^{0i} + \Gamma^0_{lm}h^{mi}h^{0k} - 2\Gamma^0_{lm}h^{ik}h^{0m} = 0. \tag{П.9}$$

В первой строке стоит выражение, исчезновение которого является определением символов Кристоффеля γ^l_{ik} метрики g_{ik}. В результате, решая (П.9) относительно Γ^l_{ik}, получаем

$$\Gamma^l_{ik} = \gamma^l_{ik} + \frac{h^{0l}}{h^{00}}\,\Gamma^0_{ik}. \tag{П.10}$$

Далее, из уравнений (П.3) и (П.4) получаем

$$\Gamma^k_{i0} = -\frac{1}{h^{00}}\,(\nabla_i h^{0k} + \Gamma^0_{im}h^{mk}), \tag{П.11}$$

$$\Gamma^0_{i0} = -\frac{1}{h^{00}}\,(\nabla_i h^{00} + \Gamma^0_{im}h^{0m}), \tag{П.12}$$

где ∇_i — ковариантная производная по отношению к метрике g_{ik}. При этом имеется в виду, что h^{00} и h^{0k} являются скалярной и векторной плотностями веса 1 соответственно. Действительно, из (П.8) имеем

$$\sqrt{-g} = \frac{\sqrt{-\gamma}}{g^{00}}, \tag{П.13}$$

так что

$$h^{00} = \sqrt{-g}\, g^{00} = -\sqrt{-\gamma g^{00}}, \quad h^{0k} = \sqrt{\gamma}\,\frac{g^{0k}}{\sqrt{-g^{00}}}, \tag{П.14}$$

а g^{00} и g^{0k} следует считать трехмерными скаляром и вектором соответственно.

Заметим теперь, что Γ^μ_{00} входят в лагранжиан (П.1) линейно, причем соответствующий коэффициент есть линейная комбинация уравнений (П.3), (П.4). Тем самым Γ^μ_{00} пропадают из лагранжиана после учета этих уравнений.

В результате, если мы подставим (П.10), (П.11) и (П.12) в (П.1), то новый лагранжиан выразится через 10 переменных $h^{\mu\nu}$ и 6 переменных Γ^0_{ik}. Проведем эту подстановку. Начнем с членов с производными по времени; после подстановки (П.10) — (П.12) и элементарных преобразований оно приводится к виду

$$\Pi_{ik}\partial_0 q^{ik} + \partial_l \ln h^{00}\partial_0 h^{0l} - \partial_0 \ln h^{00}\partial_l h^{0l}, \tag{П 15}$$

где

$$\Pi_{ik} = \frac{\Gamma^0_{ik}}{h^{00}} \tag{П.16}$$

— симметричная тензорная плотность веса —1.

Более громоздкое вычисление связано с подстановкой (П.10) — (П.12) в остальную часть лагранжиана. Члены, квадратичные по П, собираются в выражение

$$\frac{1}{h^{00}}\, q^{ik}q^{ml}\, (\Pi_{kl}\Pi_{im} - \Pi_{ik}\Pi_{ml}) \tag{П.17}$$

Члены, линейные по П, выглядят следующим образом:

$$2\nabla_k\left(\frac{h^{0k}}{h^{00}}\right) g^{il}\Pi_{il} - 2\nabla_l\left(\frac{h^{0k}}{h^{00}}\right) q^{il}\Pi_{ik} \tag{П.18}$$

Наконец, члены без П имеют вид

$$\frac{1}{h^{00}}\left[\partial_l q^{ik}\gamma^l_{ik}-\partial_k q^{kl}\gamma^m_{lm}+q^{ik}(\gamma^m_{kl}\gamma^l_{mi}-\gamma^l_{ik}\gamma^m_{lm})+\right.$$
$$+\partial_k h^{l0}\partial_l h^{0k}-\partial_l h^{0l}\partial_k h^{0k}+\partial_l h^{00}\partial_k h^{lk}+$$
$$\left.+\partial_l h^{00}\partial_k h^{00}\frac{h^{lk}}{h^{00}}-2h^{0k}\frac{\partial_k h^{00}}{h^{00}}\partial_l h^{0l}\right]. \qquad (\Pi.19)$$

Преобразуем последнюю формулу. Имеем

$$\partial_l q^{ik}\gamma^l_{ik}-\partial_k q^{kl}\gamma^m_{lm}=\partial_l(q^{ik}\gamma^l_{ik}-q^{kl}\gamma^m_{km})+q^{ik}(\partial_i\gamma^m_{km}-\partial_m\gamma^m_{ik}). \qquad (\Pi.20)$$

Второе слагаемое в правой части (П.20) объединяется со вторым слагаемым в первой строке (П.19) в выражение

$$-\frac{1}{h^{00}}q^{ik}R^{(3)}_{ik}=-\frac{1}{h^{00}}\gamma R_3, \qquad (\Pi.21)$$

а первое слагаемое в правой части (П.20) можно записать в виде $-\left(\frac{1}{h^{00}}\right)\partial_i\partial_k q^{ik}$ по определению символов Кристоффеля. После этого оно объединяется со второй и третьей строкой (П.19) в выражение вида

$$-\partial_i\left(\frac{1}{h^{00}}\partial_k q^{ik}\right)+\partial_i\left(\frac{h^{0k}}{h^{00}}\right)\partial_k h^{0i}-\partial_i\left(\frac{h^{0i}}{h^{00}}\right)\partial_k h^{0k}. \qquad (\Pi.22)$$

Два последних слагаемых в (П.22) представляют собой дивергенцию

$$\partial_i\left(\frac{h^{0k}}{h^{00}}\partial_k h^{0i}-\frac{h^{0i}}{h^{00}}\partial_k h^{0k}\right), \qquad (\Pi.23)$$

исчезающую после интегрирования по всему пространству, так как $h^{0k}\partial_k h^{0i}$ и $h^{0i}\partial_k h^{0k}$ имеют асимптотику $O(1/r^3)$ при $r\to\infty$. Первое же слагаемое в (П.22) можно переписать в виде

$$\partial_i\partial_k q^{ik}-\partial_i\left[\left(\frac{1}{h^{00}}+1\right)\partial_k q^{ik}\right], \qquad (\Pi.24)$$

и второе слагаемое опять исчезает после интегрирования.

Еще одну исчезающую дивергенцию можно выделить в (П.18), переписав его в виде

$$2\frac{h^{0k}}{h^{00}}[\nabla_l(q^{il}\Pi_{ik})-\nabla_k(q^{il}\Pi_{il})]+$$
$$+2\partial_k\left(\frac{h^{0k}}{h^{00}}q^{il}\Pi_{il}-\frac{h^{0l}}{h^{00}}q^{ik}\Pi_{il}\right). \qquad (\Pi.25)$$

Здесь во второй строке мы заменили ковариантную производную на обычную в связи с тем, что слагаемые в скобках представляют собой векторные плотности веса $+1$. В результате вторая строка в (П.25) опять исчезает после интегрирования.

Наконец, последние два члена в (П.15) можно записать в виде

$$\partial_0(h^{0k}\partial_k\ln h^{00})-\partial_k(h^{0k}\partial_0\ln h^{00}). \qquad (\Pi.26)$$

Второе слагаемое представляет собой исчезающую дивергенцию, а первое дает в функцию Лагранжа неинтересный вклад типа полной производной по времени.

Собирая неисчезающие после интегрирования члены и отбрасывая производную по времени, получаем окончательное выражение для функции Лагранжа:

$$L=\int\left\{\Pi_{ik}\frac{d}{dt}q^{ik}+\frac{1}{h^{00}}[q^{ik}q^{mn}(\Pi_{kl}\Pi_{im}-\Pi_{ik}\Pi_{ml})-\gamma R_3]+\right.$$
$$\left.+2\frac{h^{0k}}{h^{00}}[\nabla_l(q^{il}\Pi_{ik})-\nabla_k(q^{il}\Pi_{il})]+\partial_i\partial_k q^{ik}\right\}d^3x, \qquad (\Pi.27)$$

которое переписывается в виде (3.3) после идентификации

$$\lambda_0=\frac{1}{h^{00}}+1, \quad \lambda_k=\frac{h^{0k}}{h^{00}} \qquad (\Pi.28)$$

и добавления лагранжиана полей материи.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Здесь мы выведем тождество (4.10). Пусть

$$D = e^i_\alpha \gamma^\alpha \nabla_i, \qquad \nabla_i = \partial_i + \Gamma_i, \tag{П.29}$$

— оператор Дирака, ограниченный на пространство $x^0 = 0$. Для двух произвольных спиноров ψ_1 и ψ_2 рассмотрим выражение

$$\Phi(\psi_1, \psi_2) = \psi_1^* D^2 \psi_2 + g^{ik} (\nabla_i \psi_1)^* \nabla_k \psi_2 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_i \left(\sqrt{\gamma} g^{ik} \psi_1^* \nabla_k \psi_2\right). \tag{П.30}$$

Используя свойство γ-матриц

$$\gamma^a \gamma^b = \eta^{ab} + S^{ab}, \qquad S^{ab} = \frac{1}{2} (\gamma^a \gamma^b - \gamma^b \gamma^a), \tag{П.31}$$

получаем для Φ выражение

$$\Phi = \psi_1^* A^k \nabla_k \psi_2 + \psi_1^* B \varphi_2, \tag{П.32}$$

где

$$A^k = g^{ik} (\Gamma_i + \Gamma_i^*) + e^i_\alpha e^k_\beta \gamma^\alpha [\Gamma_i, \gamma^\beta] + e^i_\alpha \partial_i e^k_\beta (\delta^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta}) - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_i (\sqrt{\gamma} g^{ik}), \tag{П.33}$$

$$B = \frac{1}{2} e^i_\alpha e^k_\beta S^{\alpha\beta} \hat{R}_{ik}, \tag{П.34}$$

причем

$$\hat{R}_{ik} = \partial_i \Gamma_k - \partial_k \Gamma_i + [\Gamma_i, \Gamma_k] \tag{П.35}$$

— спинорный тензор кривизны, ограниченный на начальную поверхность.

Убедимся, что матрицы A^k пропадают. В них содержится три матричные структуры: I, $\gamma^0\gamma^\alpha$ и $S^{\alpha\beta}$. Соберем коэффициенты при каждой из них. Из коммутационного соотношения

$$[S^{ab}, \gamma^c] = 2\eta^{bc}\gamma^a - 2\eta^{ac}\gamma^b \tag{П.36}$$

и определения (4.6) матрицы Γ_i получаем

$$[\Gamma_i, \gamma^\beta] = \frac{1}{4} \omega_{i,ab} [S^{ab}, \gamma^\beta] = \frac{1}{2} \omega_{i,ab} (\eta^{b\beta}\gamma^a - \eta^{a\beta}\gamma^b) = \omega^\beta_{i,a} \gamma^a, \tag{П.37}$$

так что

$$\gamma^\alpha [\Gamma_i, \gamma^\beta] = \omega_i^{\alpha\beta} + \omega^\beta_{i,\gamma} S^{\alpha\gamma} + \omega^\beta_{i,0} \gamma^\alpha \gamma^0. \tag{П.38}$$

Далее,

$$\Gamma_i + \Gamma_i^* = 2 \cdot \frac{1}{4} (\omega_{i,\alpha 0} \gamma^\alpha \gamma^0 + \omega_{i,0\alpha} \gamma^0 \gamma^\alpha) = \omega_{i,\alpha 0} \gamma^\alpha \gamma^0. \tag{П.39}$$

Таким образом, нам надо доказать равенства

$$e^i_\alpha e^k_\beta \omega^\beta_{i,0} + g^{ik} \omega_{i,\alpha 0} = 0, \tag{П.40}$$

$$e^i_\alpha e^k_\beta \omega^\beta_{i,\gamma} + e^i_\alpha \partial_i e^k_\gamma = 0, \tag{П.41}$$

$$e^i_\alpha e^k_\beta \omega^{\alpha\beta}_i + e^i_\alpha \partial_i e^{\alpha k} = \frac{1}{e} \partial_i (e g^{ik}), \tag{П.42}$$

где мы обозначили

$$e = \sqrt{\gamma} = \det \| e_{\alpha k} \|. \tag{П.43}$$

Заметим, что в нашей системе координат (4.5) в силу (4.1) выполняется соотношение симметрии

$$\omega_{\alpha\beta 0} = \omega_{\beta\alpha 0}, \qquad \omega_{abc} = e^\mu_a \omega_{\mu, bc}, \tag{П.44}$$

вследствие которого и выполняется (П.40) после того, как оно перепишется в виде

$$e^{\beta k} (\omega_{\alpha 0\beta} + \omega_{\beta\alpha 0}) = 0. \tag{П.45}$$

Соотношения (П.41) и (П.42) следуют из определения (4.3), выражающего $\omega_{\mu,ab}$ через e^μ_a, если учесть, что

$$\partial_i e = e^k_\alpha \partial_i e^\alpha_k = - e_{k\alpha} \partial_i e^{k\alpha}. \tag{П.46}$$

Преобразуем B. Для этого заметим, что

$$\hat{R}_{ik}=\frac{1}{4}R_{ik,ab}S^{ab}, \tag{П.47}$$

где $R_{\mu\nu,ab}$ — полный тензор кривизны. Используем очередное тождество для γ-матриц:

$$[\gamma^{\alpha},\ \gamma^{\beta}]\,[\gamma^{a},\ \gamma^{b}]=2\varepsilon^{\alpha\beta ab}\gamma_5+4\eta^{\alpha b}\eta^{\beta a}+2\left(\eta^{\alpha b}\,[\gamma^{\beta},\ \gamma^{a}]+\eta^{\beta a}\,[\gamma^{\alpha},\gamma^{b}]\right)-(a\leftrightarrow b). \tag{П.48}$$

Первый член в (П.48) даст нулевой вклад в B вследствие тождества Бьянки

$$R_{ab,cd}+R_{ac,db}+R_{ad,bc}=0. \tag{П.49}$$

Второе слагаемое в (П.48) даст

$$\frac{1}{4}\eta^{\alpha b}\eta^{\beta a}e^{i}_{\alpha}e^{k}_{\beta}R_{ik,ab}=-\frac{1}{4}R^{ik}_{ik}=-\frac{1}{2}\left(R_{00}-\frac{1}{2}g_{00}R\right). \tag{П.50}$$

Наконец, в последнем слагаемом вследствие симметрии

$$R_{ab,cd}=R_{cd,ab} \tag{П.51}$$

«выживет» лишь член

$$\frac{1}{4}R_{\alpha\beta,}{}^{\beta}{}_{0}\,[\gamma^{\alpha},\ \gamma^{0}]=\frac{1}{2}R_{\alpha 0}\gamma^{\alpha}\gamma^{0}. \tag{П.52}$$

Таким образом, получаем окончательный результат:

$$B=-\frac{1}{2}\,(G_{00}+e^{k}_{\alpha}G_{0k}\gamma^{0}\gamma^{\alpha}). \tag{П.53}$$

Теперь рассмотрим решение ψ уравнения Дирака

$$D\psi=0, \tag{П.54}$$

имеющее на бесконечности асимптотику при $r\to\infty$:

$$\psi=\psi_0+\bar{O}\left(\frac{1}{r}\right),\qquad \partial\psi=O\left(\frac{1}{r^{+\alpha}}\right),\qquad \alpha>\frac{1}{2}, \tag{П.55}$$

где ψ_0 — постоянный спинор. Стандартные методы теории рассеяния позволяют доказать, что такое решение существует и единственно, если уравнение (П.54) не имеет нетривиальных решений с $\psi_0=0$. Покажем, что таких решений действительно нет, если поле тяготения удовлетворяет уравнениям (4.12). Проинтегрируем тождество $\Phi(\psi,\ \psi)=\psi^{*}B\psi$ по всему пространству. Если $\psi_0=0$, то интеграл от дивергенции исчезает, и в результате мы получим равенство

$$\int e\left[\frac{1}{2}\psi^{*}\,(T_{00}+T_{0k}e^{k}_{\alpha}\gamma^{0}\gamma^{\alpha})\,\psi+(\nabla_i\psi)^{*}\,(\nabla^{i}\psi)\right]d^3x=0. \tag{П.56}$$

Как уже было показано в гл. 4, оба слагаемых здесь неотрицательны. Таким образом, мы получаем

$$\nabla_i\psi=0, \tag{П.57}$$

откуда следует, что ψ исчезает, так как $\psi\to 0$ при $r\to\infty$. Итак, решение уравнения (П.54) с асимптотикой (П.55) существует.

Для вывода тождества (4.10) опять проинтегрируем тождество $\Phi(\psi,\ \psi)=\psi^{*}B\psi$ по всему пространству. При этом сразу возникает левая часть (4.10), и для полного вывода остается преобразовать поверхностный интеграл

$$\int\limits_{(S)} eg^{ik}\psi^{*}\nabla_k\psi\cdot dS_i. \tag{П.58}$$

В качестве S возьмем сферу радиуса R. Ясно, что при $R\to\infty$ в интеграл (П.58) дает вклад только асимптотика $O(1/r^2)$ подынтегрального выражения. Убедимся, что эта асимптотика пишется через ψ_0 и асимптотику поля тяготения. Действительно, умножая уравнение (П.54) на γ^{β}, получаем

$$e^{i\beta}\partial_i\psi+e^{i}_{\alpha}S^{\beta\alpha}\partial_i\psi=-\gamma^{\beta}e^{i}_{\alpha}\gamma^{\alpha}\Gamma_i\psi \tag{П.59}$$

или после умножения на e^{k}_{β}

$$g^{ik}\partial_k\psi=e^{i}_{\beta}e^{k}_{\alpha}S^{\alpha\beta}\partial_k\psi-e^{i}_{\alpha}e^{k}_{\beta}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\Gamma_k\psi. \tag{П.60}$$

Возвращаясь к интегралу (П.58), видим, что вклад от первого слагаемого в правой части (П.60) вследствие асимптотики (П.55) и асимптотики

$$e^i_\alpha=\delta^i_\alpha+O\left(\frac{1}{r}\right), \tag{П.61}$$

которую можно предположить без ограничения общности, принимает вид

$$\psi_0^* \int\limits_{r=R} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta]\, \partial_\beta\psi\, dS_\alpha+O(R^{-\alpha})=\psi_0^* \int\limits_{r<R} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta]\, \partial_\alpha\partial_\beta\psi+O(R^{-\alpha}) \tag{П.62}$$

и исчезает при $R\to\infty$. Таким образом, весь интеграл (П.58) в пределе $R\to\infty$ принимает вид

$$\int\limits_{r=R} e\psi_0^*(g^{ik}\Gamma_k-e^i_\alpha e^k_\beta\gamma^\alpha\gamma^\beta\Gamma_k)\,\psi_0\, dS_i=\psi_0^*\left(-\int\limits_{r=R} ee^i_\alpha e^k_\beta S^{\alpha\beta}\Gamma_k\, dS_i\right)\psi_0. \tag{П.63}$$

Вспомним теперь определение (4.6) и еще раз используем (П.48). В результате подынтегральное выражение в (П.63) преобразуется следующим образом:

$$\frac{1}{4}e^i_\alpha e^k_\beta\omega_{k,\,cd}S^{\alpha\beta}S^{cd}=\frac{1}{4}\varepsilon^{\alpha\beta cd}e^i_\alpha\omega_{\beta cd}+\frac{1}{2}e^i_\alpha e^k_\beta\omega_{k,\,cd}\eta^{\alpha d}\eta^{\beta c}+$$
$$+\frac{1}{4}e^i_\alpha e^k_\beta\omega_{k,\,cd}(\eta^{\alpha d}[\gamma^\beta, \gamma^c]+\eta^{\beta c}[\gamma^\alpha, \gamma^d]). \tag{П.64}$$

Первое слагаемое в правой части (П.64) пропадает. Действительно, один из индексов c и d должен быть временны́м, и все слагаемое пропадает вследствие симметрии (П.44). Далее, используя (4.1) и (4.3), коэффициент при $\gamma^\alpha\gamma^\beta$ в последнем слагаемом в правой части (П.64) можно переписать в виде

$$\frac{1}{4}ee^i_\alpha(\omega_{\beta\gamma}^{\ \ \alpha}[\gamma^\beta, \gamma^\gamma]+\omega_\beta^{\ \beta}{}_\gamma[\gamma^\alpha, \gamma^\gamma])=\frac{1}{4}\{-ee^{i\alpha}\Gamma_{\beta\gamma\alpha}[\gamma^\beta, \gamma^\gamma]+\partial_k(ee^i_\alpha e^k_\beta)[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]\}. \tag{П.65}$$

Первое слагаемое здесь не дает вклад вследствие симметрии $\Gamma_{\beta\gamma\alpha}$ по первым двум индексам. Интеграл от второго можно переписать в виде

$$\int \partial_k(ee^i_\alpha e^k_\beta)[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]\, dS_i=\int \partial_i\partial_k(ee^i_\alpha e^k_\beta)[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]\, d^3x=0 \tag{П.66}$$

по симметрии.

Соберем оставшийся нетривиальный вклад в правой части (П.64). Из (П.42) имеем

$$\frac{1}{2}ee^i_\alpha e^k_\beta\omega_k^{\beta\alpha}=\frac{1}{2}[\partial_k(eg^{ik})-ee^k_\alpha\partial_k e^{i\alpha}]=\frac{1}{4e}\partial_k q^{ik}+\frac{e}{2}\left(\frac{1}{2}\partial_k g^{ik}-e^k_\alpha\partial_k e^{i\alpha}\right). \tag{П.67}$$

Далее, используя (4.1) и (4.3) и определение символов Кристоффеля, имеем

$$\frac{1}{4}ee^i_\alpha e^k_\beta(\omega_{k,\,0\alpha}[\gamma^\beta, \gamma^0]+\omega_{k,\,\beta 0}[\gamma^\alpha, \gamma^0])=\frac{1}{2e}(q^{ik}\Gamma^0_{km}e^m_\alpha-q^{km}\Gamma^0_{km}e^i_\alpha)\,\gamma^\alpha\gamma^0. \tag{П.68}$$

При интегрировании по асимптотической области можно считать, что $e\approx 1$ и $e^\alpha_i=\delta^\alpha_i$. Поэтому, вспоминая формулы (3.23) и (3.36), получаем окончательно, что интеграл (П.58) сводится к

$$\frac{1}{4}(E\psi_0^*\psi_0+P_\alpha\psi_0^*\gamma^0\gamma^\alpha\psi_0). \tag{П.69}$$

Этим заканчивается преобразование поверхностного интеграла (П.58), а вместе с ним и доказательство тождества (4.10).

Ленинградское отделение МИАН СССР
им. В. А. Стеклова

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Эйштейн А. Собрание научных трудов.— М.: Наука, 1965, т. 1, работы 37, 38, 42, 47, 49, 51.
2. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения.— М.: Физматгиз, 1961.

3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.— М.: Наука, 1973.
4. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация.— М.: Мир, 1977.
5. Вейнберг С. Гравитация и космология.— М.: Мир, 1975.
6. Witten E. Preprint Princeton University, 1981.
7. Денисов В. И., Логунов А. А., Мествиришвили М. А.— Пробл. физ. ЭЧАЯ, **1981**, т. 12, с. 5.
8. Денисов В. И., Логунов А. А. Новая теория пространства-времени и гравитации: Препринт ИЯИ АН СССР П-0199.— Москва, 1981.
9. Dirac P. A. M.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, **1958**, v. 246, p. 333.
10. Dirac P. A. M.— Can. J. Math. **1950**, v. 2, p. 129.
11. Arnowitt R., Deser S., Misner C. W.— Phys. Rev., **1960**, v. 117, p. 1959; v. 118, p. 1100; **1961**, v. 122, p. 997.
12. Schwinger J.— Phys. Rev., **1963**, v. 139, p. 1253.
13. De-Witt B. S.— Phys. Rev., **1967**, v. 160, p. 1113.
14. Regge T., Teitelboim C.— Ann. of Phys., **1974**, v. 88, p. 286.
15. Фаддеев Л. Д., Попов В. Н.— УФН, **1973**, т. III, с. 427.
16. Dirac P. A. M. Lectures on Quantum Mechanics.— N. Y.: Yeshiva Univ., 1964.
17. Dirac P. A. M.— Phys. Rev., **1959**, v. 114, p. 924.
18. Фаддеев Л. Д.— ТМФ, **1969**, т. 1, с. 3.
19. Faddeev L. D.— In: Actes du Congres Intern. de Mathematique Nice, 1—10 sept. 1970.— P.: Gauthier-Villars, 1970, т. III, p. 35.
20. Логунов А. А., Фоломешкин В. Н.,— ТМФ, **1977**, т. 32, с. 291.
21. Широков М. Ф., Будько Л. И.— ДАН СССР, **1967**, т. 172, с. 326.
22. Широков М. Ф.— Ibid., **1970**, т. 195, с. 814.
23. Денисов В. И., Логунов А. А.— ТМФ, **1980**, т. 43, с. 187.
24. Bauer H.— Phys. Zs., **1918**, Bd. 19, S. 163.
25. Araki H.— Ann. of Phys., **1959**, v. 7, p. 456.
26. Brill D.— Ibid., p. 466.
27. Brill D., Deser S., Faddeev L.— Phys. Lett. Ser. A, **1968**, v. 26, p. 538.
28. Brill D., Deser S.— Ann. of Phys., **1968**, v. 50, p. 548.
29. Geroch R.— Ann. N. Y. Acad. Sci., **1973**, v. 224, p. 108.
30. Choquet-Bruhat Y., Marsden J.— Comm. Math. Phys., **1976**, v. 51, p. 283.
31. Jang P. S.— J. Math. Phys., **1976**, v. 17, p. 141.
32. Schoen P., Yau S. T.— Comm. Math. Phys., **1979**, v. 65, p. 45.
33. Schoen P., Yau S. T.— Phys. Rev. Lett., **1979**, v. 43, p. 1457.
34. Паули В. Теория относительности.— М.; Л.: Гостехиздат, 1947.
35. Денисов В. И., Логунов А. А. Инертная масса, определенная в общей теории относительности, не имеет физического смысла: Препринт ИЯИ АН СССР П-0214.— Москва, 1981.
36. Abbott L. F., Deser S., Stability of Gravity with a Cosmological Constant: Preprint TH-3136-CERN, 1981.
37. Witten E.— Comm. Math. Phys., **1981**, v. 80, p. 381.