

## Лекция 14

Инфляционная космология. Модели инфляции: поле инфлатона и режим медленного скатывания

## Идея инфляции (качественно)

После Горячего Большого взрыва

$$\ddot{a} < 0 \quad (14.1)$$

Инфляция, по определению – расширение вселенной с

$$\ddot{a} > 0 \quad (14.2)$$

Вводится новая шкала времени, в которой инфляция начинается в момент  $t_{Pl}$ , а до того было неизвестно что (эпоха квантовой гравитации). Предполагается:

- Имеет место от  $t \sim t_{Pl}$  до  $t_E$  ( $E$  значит End)
- В момент  $t_E$  инфляция сменяется горячей стадией
- (Приблизленно) предполагается, что горячая стадия наступает мгновенно после окончания инфляции и наследует  $H(t_E)$  (не  $H = \infty$ !)
- В начале горячей (РД!) стадии

$$H = \frac{T^2}{M_{Pl}^*} \Rightarrow T_{reh} = \sqrt{M_{Pl}^* H(t_E)} \quad (14.3)$$

Важная величина:

$$\dot{a} = a \frac{\dot{a}}{a} = aH \quad (14.4)$$

$$\ddot{a} < 0 \Rightarrow aH \text{ убывает, горячая стадия} \quad (14.5)$$

$$\ddot{a} > 0 \Rightarrow aH \text{ возрастает, инфляция} \quad (14.6)$$

## Решение проблемы плоскостности

Уравнение Фридмана с кривизной:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2} \quad (14.7)$$

$$\frac{8\pi G}{3} \left[ \rho + \Lambda - \frac{3}{8\pi G} \frac{\varkappa}{a^2} \right] = H^2 \quad (14.8)$$

$$\frac{8\pi G}{3} \rho_c(t) = H^2(t) \Rightarrow \rho_c(t) = \frac{3}{8\pi G} H^2(t) \quad (14.9)$$

$$\rho_K(t) = -\frac{3}{8\pi G} \frac{\varkappa}{a^2} \quad (14.10)$$

$$\Omega_K(t) \equiv \frac{\rho_K(t)}{\rho_c(t)} = \frac{1}{a^2(t)H^2(t)} \quad (14.11)$$

Хотим, чтобы начальная (на момент «квантового рождения» Вселенной) кривизна была не очень мала. Найдем необходимую степень раздувания:

$$\Omega_K(t_{Pl}) \gtrsim \Omega_K(t_0) \Leftrightarrow \frac{\Omega_K(t_0)}{\Omega_K(t_{Pl})} \lesssim 1 \Leftrightarrow \quad (14.12)$$

$$\frac{[a(t_{Pl})H(t_{Pl})]^2}{(a_0 H_0)^2} \lesssim 1 \Leftrightarrow \frac{a(t_{Pl})H(t_{Pl})}{a_0 H_0} \lesssim 1 \Leftrightarrow \quad (14.13)$$

$$\frac{a(t_{Pl})H(t_{Pl})}{a(t_E)H(t_E)} \frac{a(t_E)H(t_E)}{a_0 H_0} \lesssim 1 \Leftrightarrow \quad (14.14)$$

$$\frac{a(t_E)H(t_E)}{a(t_{Pl})H(t_{Pl})} \gtrsim \frac{a(t_E)H(t_E)}{a_0 H_0} \quad (14.15)$$

Этого всегда можно добиться, если  $a(t)H(t) = \dot{a}(t)$  растет достаточно быстро от  $t_{Pl}$  до  $t_E$

## Решение проблемы горизонта

Оценим размер области, которая была причинно связана на момент  $t_E$ , в настоящее время.

Горизонт  $t_E$ :

$$l_{H,E} = a(t_E) \int_{t_{Pl}}^{t_E} \frac{dt}{a(t)} \quad (14.16)$$

$$\begin{aligned} l_{H,E}(t_0) &= \frac{a_0}{a(t_E)} l_{H,E} = \frac{a_0}{a(t_E)} a(t_E) \int_{t_{Pl}}^{t_E} \frac{dt}{a} = a_0 \int_{t_{Pl}}^{t_E} \frac{dt}{a} = \\ &= \int da = \dot{a} dt \Rightarrow dt = \frac{da}{\dot{a}} = \\ &= a_0 \int_{a(t_{Pl})}^{a(t_E)} \frac{da}{a \dot{a}} = a_0 \int_{a(t_{Pl})}^{a(t_E)} \frac{da}{a^2 H} \quad (14.17) \end{aligned}$$

$a^2 H$  – быстро растет, так как  $aH$  растет;

Будем предполагать, что  $H$  меняется относительно медленно (т.е. рост  $a$  близок экспоненциальному);

Интеграл набирается на нижнем пределе:

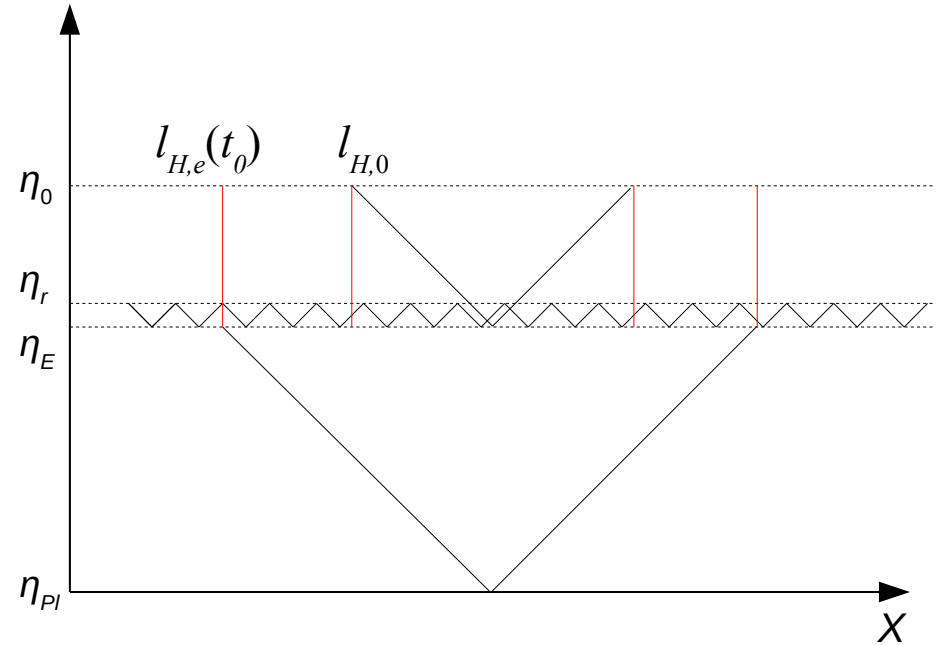
$$a_0 \int_{a(t_{Pl})}^{a(t_E)} \frac{da}{a^2 H} \sim \frac{a_0}{H(t_{Pl})} \int_{a(t_{Pl})}^{a(t_E)} \frac{da}{a^2} \sim \frac{a_0}{a(t_{Pl}) H(t_{Pl})} \quad (14.18)$$

Сравним с горизонтом сейчас, если считать его от момента Большого взрыва = разогрева:

$$\frac{l_{H,E}(t_0)}{l_{H,0}} \simeq \frac{a_0}{a(t_{Pl}) H(t_{Pl})} \times H_0 = \frac{a_0 H_0}{a(t_{Pl}) H(t_{Pl})} \quad (14.19)$$

$$\frac{l_{H,E}(t_0)}{l_{H,0}} > 1 \Leftrightarrow \frac{a(t_{Pl}) H(t_{Pl})}{a_0 H_0} < 1 \quad (14.20)$$

То же самое, что условие на кривизну (14.13)  $\Rightarrow$  проблема плоскостности и проблема горизонта решаются одновременно!



## Оценка необходимой длительности инфляции

(14.15):

$$\frac{a(t_E) H(t_E)}{a(t_{Pl}) H(t_{Pl})} \gtrsim \frac{a(t_E) H(t_E)}{a_0 H_0}$$

Из (14.15):

$$\frac{a(t_E)}{a(t_{Pl})} \gtrsim \frac{a(t_E)}{a_0} \frac{H(t_E)}{H_0} \frac{H(t_{Pl})}{H(t_E)} = \frac{T_0}{T_{reh}} \frac{H(t_{Pl})}{H_0} \quad (14.21)$$

Число  $e$ -фолдингов:

$$N_e^{(tot)} \equiv \ln \frac{a(t_E)}{a(t_{Pl})} \quad (14.22)$$

$$N_e^{(tot)} > \ln \frac{T_0}{H_0} + \ln \frac{H(t_{Pl})}{T_{reh}} \simeq \ln \frac{T_0}{H_0} + \ln \frac{M_{Pl}}{T_{reh}} \quad (14.23)$$

$$\frac{T_0}{H_0} \sim 10^{29}; \ln 10^{29} \approx 67 \Rightarrow \quad (14.24)$$

$$N_e^{(tot)} > 67 + \ln \frac{M_{Pl}}{T_{reh}} \quad (14.25)$$

Для  $T_{reh} = M_{Pl} \div 1 \text{ TeV}$

$$N_e^{(min)} \simeq 70 \div 100 \quad (14.26)$$

Каково **минимальное** время инфляции, в секундах?

Если инфляция приблизительно экспоненциальна, то

$$N_e^{tot} \sim H_{infl} \Delta t_{infl} \quad (14.27)$$

$$H_{infl} \sim H(t_E) = \frac{T_{reh}^2}{M_{Pl}^*} \text{ [см. (14.3)]} \quad (14.28)$$

$$\frac{T_{reh}^2}{M_{Pl}^*} \Delta t_{infl}^{min} = 70 \div 100 \Rightarrow \quad (14.29)$$

$$\Delta t_{infl}^{min} = M_{Pl}^* \frac{70 \div 100}{(M_{Pl} \div 1 \text{ TeV})^2} = 10^{-42} \div 10^{-9} \text{ сек} \quad (14.30)$$

## Общие замечания

1. Эта оценка  $N_e^{(min)}$  немного завышена из-за предположения о мгновенности разогрева. Принятое значение  $N_e^{(min)} \simeq 60$ .
2. Скорее всего  $N_e^{(tot)} \gg N_e^{(min)} \Rightarrow \Omega_K \ll 0.001$ .

3. Проблема энтропии решается разогревом в момент  $t_E$  (как – см. ниже)

4. Проблема начальных возмущений решается за счет квантовых флуктуаций поля инфлатона (см. ниже).

5. Проблема монополей.

- Если  $T_{reh} < M_{GUT}$ , то монополи в горячей фазе никогда не рождались.
- Если монополи рождались до инфляции, то инфляция сделала их плотность пренебрежимо малой.

## Модели инфляции

### Де-Ситтеровская вакуумная инфляция

- Какая материя нужна, чтобы получить инфляцию?
- Простейший вариант уже известен: плотность вакуума,  $\Lambda$ -член:

$$T_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \Rightarrow \rho = \Lambda, \quad p = -\Lambda = -\rho \quad (14.31)$$

$$a(t) = \text{const} \times e^{H_{vac} t} \quad (14.32)$$

$$H_{vac} = \sqrt{\frac{8\pi}{3} \frac{\Lambda}{M_{Pl}^2}} \quad (14.33)$$

- Проблема: Инфляция не кончается (Роджер Пенроуз не согласен).
- Надо придумать что-то похожее на  $\Lambda$ -член, но не  $\Lambda$ -член, и чтобы инфляция естественным образом кончалась.

## Скалярное поле

• В некоторых случаях ведет себя очень похоже на  $\Lambda$ -член, но инфляция кончается естественным способом и может закончиться разогревом – инфлатон.

• Рассматривается теория вещественного скалярного поля  $\varphi$  с действием (для минимальной связи):

$$S_\varphi = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right] \quad (14.34)$$

Полное действие (без  $\Lambda$ -члена):

$$S = S_g + S_\varphi = \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(g, \varphi) \quad (14.35)$$

$\delta S = 0$  – общий принцип действия.

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta S_g + \delta S_\varphi = \\ &= \int d^4x \frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \int d^4x \left( \frac{\delta S_\varphi}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\delta S_\varphi}{\delta \varphi} \delta \varphi \right) = \\ &= \int d^4x \left( \frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta S_\varphi}{\delta g_{\mu\nu}} \right) \delta g_{\mu\nu} + \int d^4x \frac{\delta S_\varphi}{\delta \varphi} \delta \varphi \quad (14.36) \end{aligned}$$

$\delta g_{\mu\nu}$  и  $\delta \varphi$  варьируются независимо, поэтому

$$\begin{cases} \frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta S_\varphi}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \rightarrow \text{Уравнения Эйнштейна} \\ \frac{\delta S_\varphi}{\delta \varphi} = 0 \rightarrow \text{Уравнения поля} \end{cases} \quad (14.37)$$

Требуется найти явный вид  $\frac{\delta S_\varphi}{\delta \varphi}$ .

$$\begin{aligned} \delta S_\varphi|_\varphi &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi) - \delta(V(\varphi)) \right] = \\ &= \backslash \text{все считается просто } \star \backslash = \\ &= - \int d^4x \left[ \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi) + \sqrt{-g} \frac{dV}{d\varphi} \right] \delta \varphi \Rightarrow \quad (14.38) \end{aligned}$$

$$\frac{\delta S_\varphi}{\delta \varphi} = - \left[ \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi) + \sqrt{-g} \frac{dV}{d\varphi} \right] \quad (14.39)$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi) = - \frac{dV}{d\varphi}} \quad (14.40)$$

*Однородная и изотропная космология*

Работаем в плоской метрике

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\mathbf{x}^2 \quad (14.41)$$

Рассматриваем только однородные поля  $\varphi$

$$\partial_i \varphi = 0; \quad i \geq 1 \quad (14.42)$$

Тогда

$$g = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & -a^2 & & \\ & & -a^2 & \\ & & & -a^2 \end{vmatrix} = -a^6 \Rightarrow \sqrt{-g} = a^3 \quad (14.43)$$

В уравнении остается только 0-компонента:

$$\frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial t} \left( a^3 g^{00} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\frac{dV}{d\varphi} \Rightarrow \quad (14.44)$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV}{d\varphi} = 0} \quad (14.45)$$

*Скалярное поле как идеальная жидкость*

ТЭИ однородного скалярного поля:

$$\delta S_\varphi|_g = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \Rightarrow \quad (14.46)$$

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}(g, \varphi) \quad (14.47)$$

(см. (2.111))

В локально-лоренцевой системе отсчета, где  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

$$T_{00} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \quad (14.48)$$

$$T_{ij} = \left[ \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \right] \delta_{ij} \quad (14.49)$$

$$\rho(\varphi) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \quad (14.50)$$

$$p(\varphi) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \quad (14.51)$$

Если  $\dot{\varphi}$  мало (*медленное скатывание*), то ТЭИ скалярного поля очень похож на ТЭИ  $\Lambda$ -члена ( $\rho \approx -p$ ):

$$T \approx \begin{pmatrix} V(\varphi) & & & \\ & -V(\varphi) & & \\ & & -V(\varphi) & \\ & & & -V(\varphi) \end{pmatrix} \quad (14.52)$$

Если кроме поля  $\varphi$  («инфлатон») другой материи нет и поле меняется медленно, получим экспоненциальное расширение – инфляцию.

*Размерности*

$$\begin{aligned} [V] = \text{GeV}^4 &\Rightarrow [\dot{\varphi}]^2 = \text{GeV}^4 \Rightarrow [\dot{\varphi}] = \text{GeV}^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow [\varphi] = \text{GeV}; \quad V \sim g\varphi^n \Rightarrow [g] = \text{GeV}^{4-n} \end{aligned} \quad (14.53)$$

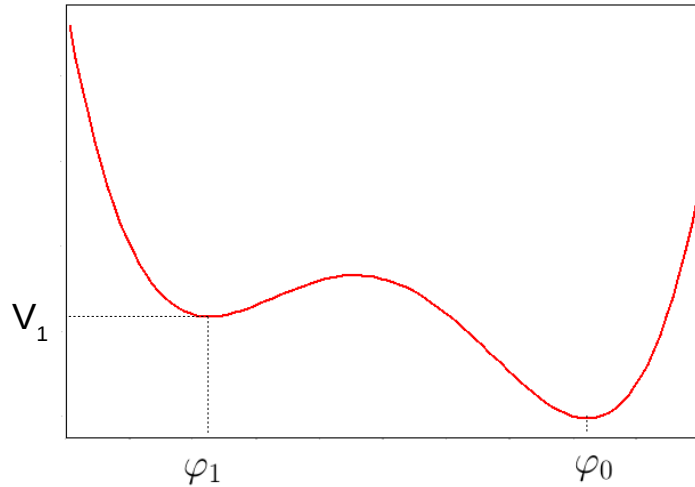
$g$  – константа связи.

Первым модель инфляции ввел Алексей Старобинский (1979), но он не использовал скалярное поле, а исходил из идей квантовой гравитации (рассматривал квантовые поправки к лагранжиану Гильберта).

Позже было показано, что его модель тоже может быть сформулирована на языке скалярного поля.

За счет чего можно получить медленное скатывание?

- Первая идея – сценарий Гута (Alan Guth), «старая инфляция» (1980)



Пока  $\varphi$  сидит в минимуме  $\varphi_1$ ,  $\dot{\varphi} = 0$  точно,  $p = -\rho$  точно.

$\varphi_1$  – ложный вакуум,  $\varphi_0$  – истинный вакуум.

- Поле  $\varphi$  локально квантово туннелирует из  $\varphi_1$  в  $\varphi_0$  с образованием пузырей истинного вакуума  $\Rightarrow$  механизм остановки инфляции.
- Горячая материя образуется при столкновении стенок пузырей (почему только так?).
- Проблема: оказалось, что из-за инфляции пузыри никогда не сталкиваются  $\Rightarrow$  сценарий не работает.

Основные режимы для уравнения скалярного поля

$$(14.45) : \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV}{d\varphi} = 0 \quad (14.54)$$

Уравнение (14.45) похоже на уравнение осциллятора с трением.

Отсюда два основных режима для решений:

- Режим быстрого скатывания  $\rightarrow$  осцилляции
- Режим медленного скатывания  $\rightarrow$  инфляция

1. Режим быстрого скатывания

$$H\dot{\varphi} \ll \ddot{\varphi}, \quad H\dot{\varphi} \ll V'(\varphi) \Rightarrow \ddot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \quad (14.55)$$

– осцилляции вблизи минимума  $V(\varphi)$

Пример: потенциал вблизи минимума квадратичен:

$$V(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2 \quad (14.56)$$

Учтем явно малый член с  $\dot{\varphi}$ . Из (14.45):

$$\ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} + m^2\varphi = 0 \quad (14.57)$$

Уравнение гармонического осциллятора с зависящим от времени коэффициентом затухания.

$$\varphi(t) = \frac{1}{a^{3/2}} \chi(t) \quad (14.58)$$

$$\ddot{\chi} + \left[ m^2 - \frac{3}{2} \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{3}{4} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] \chi = 0 \quad (14.59)$$

Для степенных и экспоненциальных  $a(t)$  имеет место:

$$\frac{\ddot{a}}{a} \sim \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 \Rightarrow \quad (14.60)$$

$$\ddot{\chi} + \left[ m^2 - \frac{3}{2} H^2 - \frac{3}{4} H^4 \right] \chi = 0 \quad (14.61)$$

Из  $H\dot{\varphi} \ll V'(\varphi)$  следует  $H^2 \ll m^2$ :

Если затухание мало, то  $\varphi \sim \varphi_0 \cos mt \Rightarrow$

$\dot{\varphi} \sim \varphi_0 m \cos mt \sim \varphi_0 m \Rightarrow$

$H\dot{\varphi} \sim H\varphi_0 m \ll m^2 \varphi \Rightarrow H \ll m(\varphi/\varphi_0) \sim m \Rightarrow$

$$\ddot{\chi} + m^2 \chi = 0 \Rightarrow \quad (14.62)$$

$$\chi(t) = \chi_* \cos(mt + \beta) \Rightarrow \quad (14.63)$$

$$\varphi(t) = \frac{\chi_*}{a^{3/2}(t)} \cos(mt + \beta) \quad (14.64)$$

– осцилляции с затуханием.

## 2. Режим медленного скатывания

• «Первое условие медленного скатывания»

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi) \quad (14.65)$$

– на самом деле условие вакуумоподобности:

$$p(\varphi) = -\rho(\varphi) + \dot{\varphi}^2 \approx -\rho(\varphi) \quad (14.66)$$

При доминировании  $V(\varphi)$  получаем инфляцию.

• Медленное скатывание за счет «вязкости» (А. Линде)

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \quad (14.67)$$

Трение велико, если выполнено «второе условие медленного скатывания»:

$$3H\dot{\varphi} \gg \ddot{\varphi} \Rightarrow \frac{\ddot{\varphi}}{3H\dot{\varphi}} \ll 1 \quad (14.68)$$

Имеют место два условия:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2V(\varphi)} \ll 1 - \text{из ТЭИ} \quad (14.69)$$

$$\frac{\ddot{\varphi}}{3H\dot{\varphi}} \ll 1 - \text{из ур. движения} \quad (14.70)$$

• Если выполнены оба условия, то имеется *квази-экспоненциальное* расширение Вселенной и уравнения сильно упрощаются:

Действительно, исходим из полной системы:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \\ H^2 = \frac{8\pi}{3M_{Pl}^2} \left( \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \right) \end{cases} \quad (14.71)$$

При выполнении условий (14.69), (14.70) приводятся к виду:

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{3H} V'(\varphi) \quad (14.72)$$

$$H = \frac{1}{M_{Pl}} \left( \frac{8\pi}{3} V(\varphi) \right)^{1/2} \quad (14.73)$$



Из (14.73):

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{M_{Pl}} \left( \frac{8\pi}{3} V \right)^{1/2} \Rightarrow \quad (14.74)$$

$$a(t) = a_i \exp \left\{ \left( \frac{8\pi}{3M_{Pl}^2} \right)^{1/2} \int_{t_i}^t [V(\varphi(t))]^{1/2} dt \right\} \quad (14.75)$$

Расширение близко к экспоненциальному в том смысле, что изменение  $H$  за хаббловское время много меньше  $H$ :

$$\dot{H} \frac{1}{H} \ll H \Rightarrow \frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1 \quad (14.76)$$

Из (14.73):

$$\dot{H} = \frac{1}{2M_{Pl}} \left( \frac{8\pi}{3V} \right)^{1/2} V'(\varphi) \dot{\varphi} \quad (14.77)$$

Из (14.73) и (14.77):

$$\frac{\dot{H}}{H} = \frac{1}{2} \frac{V'}{V} \dot{\varphi} = \backslash (14.72) \backslash = -\frac{3}{2} \frac{\dot{\varphi}^2}{V} H \Rightarrow \left| \frac{\dot{H}}{H^2} \right| = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varphi}^2}{V} \ll 1 \quad (14.78)$$

Из (14.69) следует, что это и правда так при выполнении первого условия медленного скатывания.

**Условия медленного скатывания в виде условий на потенциал скалярного поля.**

Условия медленного скатывания:

$$(14.69): \quad \frac{\dot{\varphi}^2}{2V(\varphi)} \ll 1 - \text{из ТЭИ}$$

$$(14.70): \quad \frac{\ddot{\varphi}}{3H\dot{\varphi}} \ll 1 - \text{из ур. движения}$$

$$(14.72) \quad \dot{\varphi} = -\frac{1}{3H} V'(\varphi)$$

$$(14.73) \quad H = \frac{1}{M_{Pl}} \left( \frac{8\pi}{3} V(\varphi) \right)^{1/2}$$

Условия (14.69) и (14.70) переформулируем в виде условий на потенциал  $V$ .

(14.73) подставляем в (14.72), получаем

$$\dot{\varphi} = -\frac{M_{Pl}}{(24\pi)^{1/2}} \frac{V'}{V^{1/2}} \quad (14.79)$$

Подставляем это  $\dot{\varphi}$  в (14.69):

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2V(\varphi)} = \frac{M_{Pl}^2}{48\pi} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1 \quad (14.80)$$

Теперь используем (14.70).

Из (14.79):

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= -\frac{M_{Pl}}{(24\pi)^{1/2}} \left( \frac{V''}{V^{1/2}} - \frac{1}{2} \frac{V'^2}{V^{3/2}} \right) \dot{\phi} = \\ &= \left( (14.73) \Rightarrow V^{1/2} = HM_{Pl} \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{1/2} \right) = \\ &= -\frac{M_{Pl}^2}{8\pi} \left[ \frac{V''}{V} - \frac{1}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \right] H\dot{\phi} \quad (14.81) \end{aligned}$$

(14.80) и (14.81) подставляем в (14.70):

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{\phi}}{3H\dot{\phi}} &= -\frac{M_{Pl}^2}{24\pi} \frac{V''}{V} + \frac{M_{Pl}^2}{48\pi} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left| \frac{M_{Pl}^2}{24\pi} \frac{V''}{V} \right| \ll 1 \quad (14.82) \end{aligned}$$

(14.80) и (14.82) – два условия на потенциалы, которые следуют из двух условий (14.69) и (14.70)

Два параметра медленного скатывания:

$$\varepsilon = \frac{M_{Pl}^2}{16\pi} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1 \quad (14.83)$$

$$\eta = \frac{M_{Pl}^2}{8\pi} \frac{V''}{V} \ll 1 \quad (14.84)$$

Условие (естественного!) медленного скатывания:

$$\varepsilon \ll 1, \quad \eta \ll 1 \quad (14.85)$$

(14.69), (14.70) однозначно выражаются через  $\varepsilon, \eta$ :

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2V} = \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{\ddot{\phi}}{3H\dot{\phi}} = \frac{1}{3}(\varepsilon - \eta) \quad (14.86)$$