Лекция 4

Однородные и изотропные пространства. Уравнение Фридмана. Решения уравнений изотропной однородной космологии.

Однородные и изотропные трехмерные пространства

Однородных и изотропных трехмерных пространства всего три: евклидово пространство, трехмерная сфера, трехмерная псевдосфера.

Евклидово трехмерное пространство (3-плоскость)
Есть такая система координат, что во всем пространстве

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \tag{4.1}$$

3-*сфера*
Фиктивное 4-мерное евклидово пространство:

$$ds^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 + (dy^4)^2 \tag{4.2}$$

Уравнение 3-сферы:

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 + (y^4)^2 = a^2 \tag{4.3}$$

Описывается тремя параметрами:

$$\begin{aligned} y^1 &= a \cos\chi \\ y^2 &= a \sin\chi \cos\theta \\ y^3 &= a \sin\chi \sin\theta \cos\varphi \\ y^4 &= a \sin\chi \sin\theta \sin\varphi \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = a^2 [d\chi^2 + \sin^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)] \bigstar \tag{4.5}$$

★ Упражнение: попытайтесь отгадать параметризацию 4-х мерной сферы в 5-мерном пространстве и выражение для элемента длины на 4-х мерной сфере. Тоже для $n-1$ мерной сферы в n-пространстве.

В квадратных скобках – метрика единичной 3-сферы, никаких упоминаний фиктивного 4-мерного пространства (y^1, y^2, y^3, y^4) нет.

3-*псевдосфера (гиперболоид)* Фиктивное 4-мерное псевдоевклидово пространство:

$$ds^2 = (dy^1)^2 - (dy^2)^2 - (dy^3)^2 - (dy^4)^2 \tag{4.6}$$

3-псевдосфера – это сфера в 4-мерном псевдоевклидовом пространстве:

$$(y^1)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2 - (y^4)^2 = a^2, \quad y^1 > 0 \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} y^1 &= a \operatorname{ch}\chi \\ y^2 &= a \operatorname{sh}\chi \cos\theta \\ y^3 &= a \operatorname{sh}\chi \sin\theta \cos\varphi \\ y^4 &= a \operatorname{sh}\chi \sin\theta \sin\varphi \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = a^2 [d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)] \bigstar \tag{4.9}$$

Как понять, что эти пространства однородны?
Для 3-сферы, 3-плоскости и 3-псевдосферы

$$R_{ijkl} = \frac{\varkappa}{a^2} (\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}) \tag{4.10}$$

$$\varkappa = \begin{cases} +1 & - \quad \text{3-сфера} \\ \ \ 0 & - \quad \text{3-плоскость} \\ -1 & - \quad \text{3-псевдосфера} \end{cases} \tag{4.11}$$

Проверяется прямым вычислением, или в ковариантном формализме: см. Robert M. Wald, General Relativity Sec. 5.1, p. 91.

$$R_{ij} = 2\frac{\varkappa}{a^2}\gamma_{ij} \bigstar \tag{4.12}$$

$$R = 6\frac{\varkappa}{a^2} \bigstar \tag{4.13}$$

Скаляр кривизны всюду одинаков – пространства постоянной кривизны.

Метрика Фридмана-Робертсона-Уокера (FRW)

Метрика Минковского:

$$ds^2 = dt^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j \tag{4.14}$$

Метрика Минковского в криволинейных координатах или статическая метрика одного из однородных пространств:

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j \tag{4.15}$$

Метрика динамического однородного пространства (FRW):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j \tag{4.16}$$

γ_{ij} – метрика одного из однородных 3-пространств.

Для сферы и псевдосферы можно взять метрику единичных сфер:
тогда $a(t)$ имеет физический смысл радиуса сферы.

Для 3-плоскости физ. смысл имеет только $a(t_1)/a(t_2)$

$$\hat{g} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & a^2(t)\hat{\gamma} \end{array}\right) \tag{4.17}$$

Только в рамках модели FRW космологическое время приобретает смысл!

Космологическое время не имеет точного смысла, так как метрика FRW не является совершенно точной.

Координаты FRW – сопутствующая система отсчета неподвижной космологической жидкости

Что надо доказать:
Неподвижные в координатах FRW частицы движутся свободно, т.е. по геодезическим.

Что такое неподвижные частицы:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = 0; \;\; u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{dt}{dt} = 1 \tag{4.18}$$

$$\forall \mu : \;\; \frac{du^\mu}{ds} = 0 \tag{4.19}$$

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} u^\nu u^\lambda = 0 \tag{4.20}$$

Подставляем (4.18), (4.19) в (4.20):

$$\text{Должно быть: } 0 + \Gamma^\mu_{00} u^0 u^0 = \Gamma^\mu_{00} = 0 \tag{4.21}$$

Нужно проверить, что действительно $\Gamma^\mu_{00} = 0$.

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\lambda}) \tag{4.22}$$

$$\Gamma^0_{00} = 0; \;\; \Gamma^i_{00} = 0; \;\; \Gamma^0_{0i} = 0 \;\; \bigstar \tag{4.23}$$

$$\Gamma^i_{0j} = \delta^i_j \frac{\dot{a}}{a} \;\; \bigstar \tag{4.24}$$

$$\Gamma^0_{ij} = a\dot{a}\gamma_{ij} \;\; \bigstar \tag{4.25}$$

$$\Gamma^i_{jk} = {}^{(3)}\Gamma^i_{jk} \;\; \bigstar \tag{4.26}$$

Уравнение Фридмана

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R = 8\pi G(\Lambda\, g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) \tag{4.27}$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda\nu} \tag{4.28}$$

$$R_{00} = -\partial_0 \Gamma^\lambda_{0\lambda} - \Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{0\lambda} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \bigstar \tag{4.29}$$

$$\boxed{R_{00} = -3\,\frac{\ddot{a}}{a}} \tag{4.30}$$

$$R_{0i} = \partial_j \Gamma^j_{0i} - \partial_0 \Gamma^\lambda_{i\lambda} + \Gamma^\lambda_{0i}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda i} = 0 \bigstar \tag{4.31}$$

$$\begin{gathered}
R_{ij} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{ij} - \partial_i \Gamma^\lambda_{j\lambda} + \Gamma^\lambda_{ij}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{i\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda j} = \\
\partial_0 \Gamma^0_{ij} + \partial_k \Gamma^k_{ij} \\
- \partial_i \Gamma^0_{j0} - \partial_i \Gamma^l_{jl} \\
+ (\Gamma^0_{ij}\Gamma^\sigma_{0\sigma} + \Gamma^k_{ij}\Gamma^\sigma_{k\sigma}) \\
- (\Gamma^0_{ik}\Gamma^k_{0j} + \Gamma^k_{i0}\Gamma^0_{jk} + \Gamma^k_{il}\Gamma^l_{jk}) = \\
= \partial_0 \Gamma^0_{ij} + \Gamma^0_{ij}\Gamma^\sigma_{0\sigma} - \Gamma^0_{ik}\Gamma^k_{0j} - \Gamma^k_{i0}\Gamma^0_{jk} + {}^{(3)}R_{ij} = \\
= (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)\gamma_{ij} + {}^{(3)}R_{ij} = \\
= \Big\backslash\, {}^{(3)}R_{ij} = 2\frac{\varkappa}{r^2}\gamma_{ij};\ r \equiv 1;\ \varkappa = +1, 0, -1 \Big\backslash = \\
= (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\varkappa)\gamma_{ij}
\end{gathered} \tag{4.32}$$

$$\boxed{R_{ij} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\varkappa)\gamma_{ij}} \tag{4.33}$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{ij} R_{ij} = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\varkappa}{a^2}\right) \bigstar \tag{4.34}$$

ЛЧ, 00-компонента уравнений Эйнштейна:

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\varkappa}{a^2}\right) \tag{4.35}$$

Покоящаяся материя:

$$T_{00} = \rho; \quad g_{00}\Lambda = \Lambda \ \Rightarrow \tag{4.36}$$

Уравнение Фридмана (с Λ-членом)

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} G(\rho + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2}} \tag{4.37}$$

Как меняется ρ в зависимости от t и a?

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{4.38}$$

$$\begin{gathered}
\nabla_\mu T^{\mu 0} = \partial_\mu T^{\mu 0} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma} T^{\sigma 0} + \Gamma^0_{\mu\sigma} T^{\mu\sigma} = \\
= \partial_0 T^{00} + \Gamma^i_{i0} T^{00} + \Gamma^0_{ij} T^{ij} = \\
= \Big\backslash\, T^{ij} = (p + \rho) u^i u^j - p g^{ij} = -p g^{ij} = \frac{1}{a^2} p \gamma^{ij} \Big\backslash = \\
= \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \bigstar
\end{gathered} \tag{4.39}$$

Полная система уравнений изотропной космологии:

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G(\rho+\Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2} \quad \text{(уравнение Фридмана)} \tag{4.40}$$

$$\dot\rho + 3\frac{\dot a}{a}(\rho + p) = 0 \quad \text{(ковариантное сохранение)} \tag{4.41}$$

$$p = p(\rho) \quad \text{(уравнение состояния)} \tag{4.42}$$

Решения уравнений изотропной однородной космологии

Решения для $\varkappa = 0$, $\Lambda = 0$ (пространственно плоская вселенная)

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \tag{4.43}$$

Нерелятивистская пыль. Уравнение состояния:

$$p = 0 \tag{4.44}$$

Из (4.41):

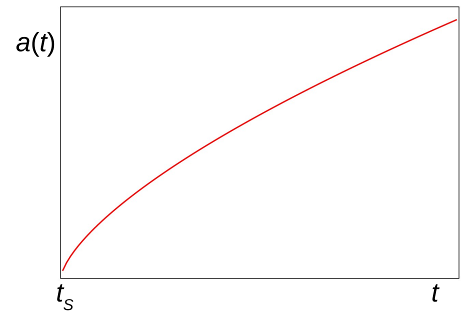
$$\frac{\dot\rho}{\rho} = -3\frac{\dot a}{a} \;\Rightarrow\; d(\ln\rho) = d(\ln a^{-3}) \;\Rightarrow \tag{4.45}$$

$$\rho = \frac{\text{const}}{a^3} \quad \text{(сохранение числа частиц)} \tag{4.46}$$

Из (4.43):

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{\text{const}}{a^3} \;\Rightarrow\; a(t) = \text{const}'(t - t_s)^{2/3} \tag{4.47}$$

При $a(t_s) = 0$ – сингулярность.



Будем полагать $t_s = 0$:

$$a(t) = \text{const}\, t^{2/3} \tag{4.48}$$

$$\rho = \frac{\text{const}}{t^2} \tag{4.49}$$

В момент сингулярности пространство было плоским и *бесконечным*, плотность была бесконечной.

Постоянную в (4.49) можно найти из (4.43):

$$\frac{\dot a}{a} = \frac{\text{const}(2/3)t^{-1/2}}{\text{const}\, t^{2/3}} = \frac{2}{3}\frac{1}{t} \Rightarrow \rho = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{1}{6\pi G}\frac{1}{t^2} \tag{4.50}$$

Постоянная Хаббла:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \tag{4.51}$$

$1/H$ во всех моделях порядка возраста Вселенной (от сингулярности!)
В частности, в модели пыли

$$H(t) = \frac{2}{3}\frac{1}{t}, \quad t = \frac{2}{3}\frac{1}{H(t)} \tag{4.52}$$

Современное (t_0) значение постоянной Хаббла (Planck mission, 2018, arXiv:1807.06209):

$$\boxed{H_0 \equiv H(t_0) = h \times 100 \frac{\text{км/с}}{\text{Мпк}}, \quad h = 0.6766 \pm 0.0042} \tag{4.53}$$

В модели пыли:

$$t_0 \approx 3.0 \cdot 10^{17}\, sec \approx 9.6 \cdot 10^9\, years \,\bigstar \tag{4.54}$$

H0-tension problem

$h \approx 0.68$ по анизотропии микроволнового фона

$h \approx 0.73$ по локальным наблюдениям

Космологический горизонт

Конформное время (плоская метрика).

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j = a^2(t)(d\eta^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j) \tag{4.55}$$

$$d\eta = dt/a(t) \tag{4.56}$$

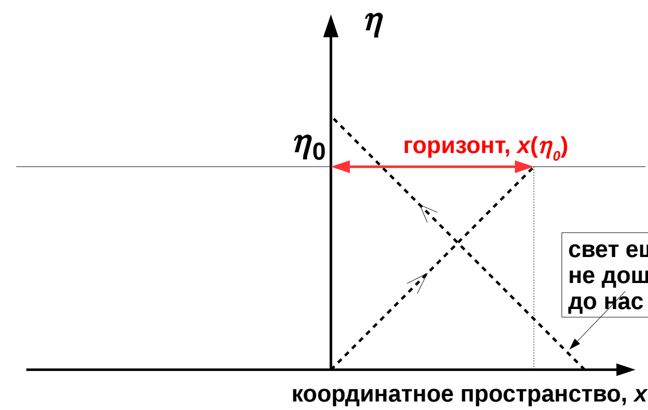
– конформно-плоская метрика, η – конформное время.

Для плоской модели с пылью:

$$\eta(t) = \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^t \frac{dt}{\text{const} \cdot t^{2/3}} = \frac{3}{\text{const}} \cdot t^{1/3} \tag{4.57}$$

Светоподобные геодезические: $ds^2 = 0 \Rightarrow$

$$d\eta^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j = dx^2 \;\Rightarrow\; d\eta = |dx| \tag{4.58}$$



$$x(\eta_0) = \eta_0 = \eta(t_0) \tag{4.59}$$

$$l_H(t_0) = a(t_0)x(\eta_0) = a(t_0)\eta(t_0) = \\ = a(t_0)\int_0^{t_0}\frac{dt}{a(t)} = \mathrm{const}\cdot t_0^{2/3}\int_0^{t_0}\frac{dt}{\mathrm{const}\cdot t^{2/3}} = 3t_0 = \\ = 28.8\cdot 10^9\,\text{св. лет} \quad (4.60)$$

($ct_0 \sim 9.6\cdot 10^9$ св. лет – много меньше горизонта!)

★ Пусть мы наблюдаем объект с возрастом Δt. Каково до него расстояние (в модели пыли)? Почему для малых расстояний $L \approx c\Delta t$?

Красное смещение

Эволюция свободного электромагнитного поля

$$S_{Mink} = -\frac{1}{4}\int d^4x\, F^{\nu\rho}F_{\nu\rho};\; F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.61)$$

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}F^{\nu\rho}F_{\nu\rho} \quad (4.62)$$

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.63)$$

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}F_{\mu\lambda}F_{\nu\rho} \quad (4.64)$$

В конформно-плоской метрике

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j] \quad (4.65)$$

Имеем

$$g_{\mu\nu}(\eta) = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu} \quad (4.66)$$

$$g^{\mu\nu}(\eta) = \frac{1}{a^2(\eta)}\eta^{\mu\nu} \quad (4.67)$$

$$\sqrt{-g} = a^4 \quad (4.68)$$

Из (4.64):

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x\, a^4\frac{1}{a^4}\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho}F_{\mu\lambda}F_{\nu\rho} = \\ = -\frac{1}{4}\int d^4x F^{\nu\rho}F_{\nu\rho} \quad (4.69)$$

– электромагнитное поле конформно-инвариантно.
Плоская волна в (η, x^i)-пространстве распространяется как в пространстве Минковского:

$$A_\mu^{(\alpha)} = e_\mu^{(\alpha)}\exp[i(|k|\eta - \mathbf{kx})] \quad (4.70)$$

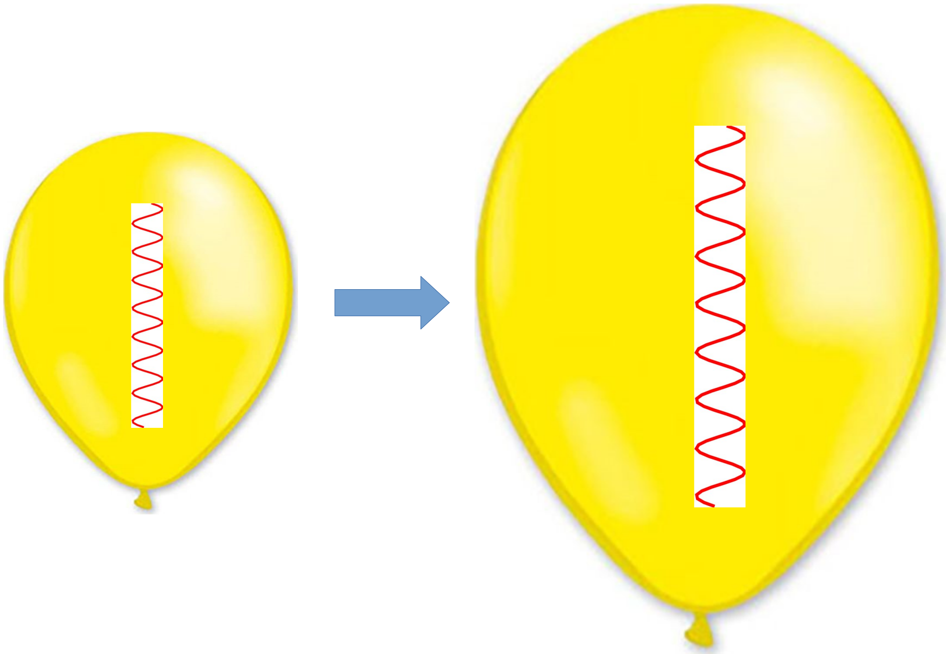
$|k|$ – не частота, и $\mathbf{k}$ – не волновой вектор в физическом пространстве!
Но можно перейти к физическим величинам:

$$\Delta\eta = \frac{2\pi}{k} \text{ – конформный период,} \\ \text{не зависит от конформного времени} \quad (4.71)$$

$$\Delta T(t) = a(t)\Delta\eta \text{ – физический период,} \\ \text{растет пропорционально } a(t) \quad (4.72)$$

$$\omega(t) = \frac{2\pi}{\Delta T(t)} = \frac{2\pi}{a(t)\Delta\eta} = \frac{k}{a(t)} \text{ – физическая частота,} \\ \text{падает обратно пропорционально } a(t) \quad (4.73)$$

Уменьшение частоты – красное смещение.
Появляется вследствие растяжения пространства $a(t)$!
Не эффект Допплера!



Эволюция скорости свободных частиц

Координатная скорость частицы отлична от нуля:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \neq 0; \quad ds^2 = dt^2 - a^2(t)\delta_{ij}x^i x^j \tag{4.74}$$

Физическая скорость частицы:

$$dX^i = a(t)dx^i \Rightarrow U^i = \frac{dX^i}{ds} = a(t)u^i \tag{4.75}$$

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}u^\nu u^\lambda = 0 \Rightarrow \backslash \Gamma^i_{jk} = 0, \Gamma^0_{00} = 0 \backslash \Rightarrow \tag{4.76}$$

$$\frac{du^i}{ds} + 2\Gamma^i_{0j}u^0 u^j = 0 \tag{4.77}$$

$$\Gamma^i_{0j} = \delta^i_j \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \frac{du^i}{ds} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{dt}{ds}u^i = 0 \tag{4.78}$$

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{du^i}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}\left(\frac{U^i}{a}\right) = \frac{dt}{ds}\left(\frac{dU^i}{dt}\frac{1}{a} - \frac{\dot{a}}{a^2}U^i\right) \tag{4.79}$$

$$\frac{dt}{ds}\left(\frac{dU^i}{dt}\frac{1}{a} - \frac{\dot{a}}{a^2}U^i\right) + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{dt}{ds}\frac{1}{a}U^i = 0 \tag{4.80}$$

$$\frac{dU^i}{dt} = -\frac{\dot{a}}{a}U^i \tag{4.81}$$

$$\frac{dU^i}{U^i} = -\frac{da}{a} \Rightarrow U^i = \frac{\text{const}}{a(t)} = U^i(t_{ini})\frac{a(t_{ini})}{a(t)} \tag{4.82}$$

Скорость (и импульс $p_i = mU_i$, но не энергия!) массивных частиц падает как $1/a(t)$.

- Все импульсы падают как $1/a(t)$!

Можно представить себе падение импульсов как результат растяжения волны де Бройля вместе с растяжением пространства.

Красное смещение z определяется через изменение частоты света:

$$\frac{\omega_i}{\omega_0} = 1 + z(t_i) = \frac{a(t_0)}{a(t_i)} \Rightarrow \tag{4.83}$$

$$\boxed{z(t_i) = \frac{a(t_0)}{a(t_i)} - 1} \tag{4.84}$$

Закон Хаббла

t_i близко в прошлом к t_0

$$a(t_i) = a(t_0) + (t_i - t_0)\dot{a}(t_0) = \\ = a(t_0)\left[1 - (t_0 - t_i)\frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}\right] = \\ = a(t_0)[1 - (t_0 - t_i)H_0] \quad (4.85)$$

$$z(t_i) = \frac{a(t_0)}{a(t_0)[1 - (t_0 - t_i)H_0]} - 1 \cong (t_0 - t_i)H_0 \quad (4.86)$$

Но $t_0 - t_i \cong r \Rightarrow$

$$z(t_i) = rH_0 \quad (4.87)$$

Космологическое красное смещение – не Допплеровское!

Это следует также из контекста, в котором относительные скорости могут превышать скорость света.

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dl^2 \quad (4.88)$$

Поместим себя в точку 0, момент времени t_0.
Физическое расстояние до точки на координатном расстоянии l

$$r(t_0) = a(t_0)l \quad \text{(это точное равенство)} \quad (4.89)$$

$$\dot{r}(t_0) = v(t_0) = \dot{a}l \quad (4.90)$$

– скорость может быть сколь угодно велика при достаточно большом l!

– Многие наблюдаемые сйчас объекты удаляются от нас быстрее света.
– Эффект Допплера не имеет смысла в такой ситуации.

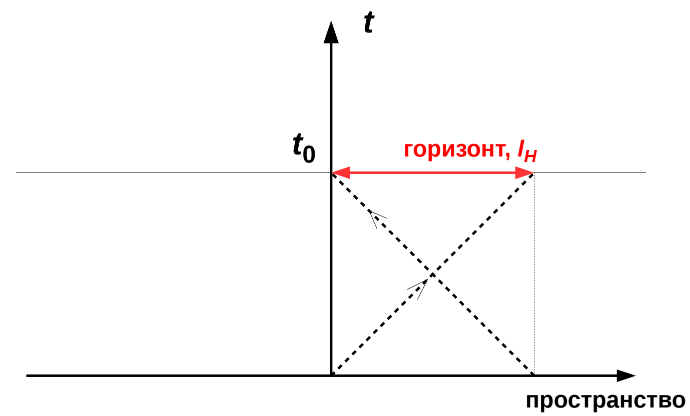
Откуда берется иллюзия эффекта Допплера?

Эффект Допплера для малых v есть:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{v}{c} \equiv v = \dot{a}l = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) al = Hr \quad (4.91)$$

Для малых расстояний космологическое красное смещение *выглядит* как эффект Допплера (и ошибочно трактуется как эффект Допплера).

Как мы видим горизонт?



Для горизонта $t_i = 0 \Rightarrow$

$$z(0) = \frac{a(t_0)}{a(0)} - 1 = \frac{a(t_0)}{0} - 1 = \infty \quad (4.92)$$

Ультрарелятивистское вещество, плоская вселенная

$$p = \frac{1}{3} n \langle vP \rangle - \text{для любого газа} \tag{4.93}$$

Ультрарелятивистский (УР) газ:

$$E^2 = m^2 + P^2 \approx P^2 \Rightarrow P \cong E, \ v \cong 1 \Rightarrow \tag{4.94}$$

$$p = \frac{1}{3} n E = \frac{1}{3} \rho \tag{4.95}$$

$$\boxed{p = \frac{1}{3} \rho} \tag{4.96}$$

Как ρ зависит от a?

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \ (\text{сохр. ТЭИ}) \tag{4.97}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -4\frac{da}{a} \tag{4.98}$$

$$\boxed{\rho = \frac{\text{const}}{a^4}} \tag{4.99}$$

(не $1/a^3$! – из-за красного смещения)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho = \frac{\text{const}}{a^4} \tag{4.100}$$

$$\boxed{a(t) = \text{const}' t^{1/2}} \tag{4.101}$$

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t} \tag{4.102}$$

(для пыли было $\frac{2}{3t}$)

$$\rho = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{3}{32\pi G}\frac{1}{t^2} \tag{4.103}$$

Космологический горизонт для момента t_*:

$$l_H(t_*) = a(t_*) \int_0^{t_*} \frac{dt}{a(t)} = 2t_* \tag{4.104}$$

(для пыли было $3t_0$)

Вакуум и де-Ситтеровское плоское решение

Никакой материи кроме Λ-члена.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} G\Lambda, \quad \Lambda = \text{const} \geq 0 \tag{4.105}$$

В плоском случае для $\Lambda < 0$ решения нет!

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi}{3} G\Lambda} = H_{dS} \Rightarrow \tag{4.106}$$

$$a(t) = \text{const} \times e^{H_{dS} t} \tag{4.107}$$

Сингулярности нет.
Космологический горизонт $= +\infty$ (тоже нет).

Λ ведет себя как плотность вакуума:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \Rightarrow \backslash p = -\rho \backslash \Rightarrow \dot{\rho} = 0 \tag{4.108}$$

Плотность постоянна (что и ожидается от вакуума).