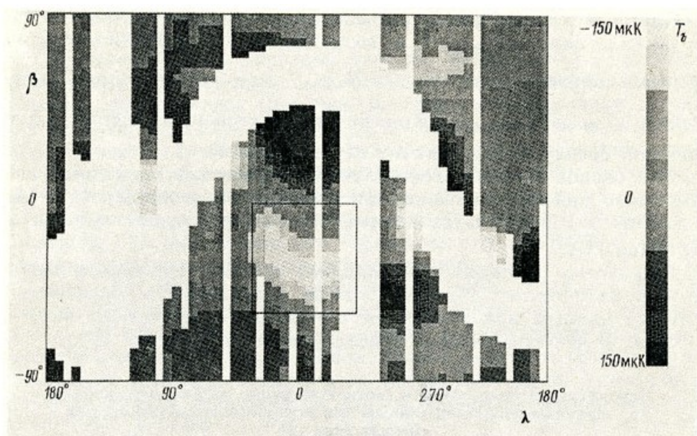
Введение

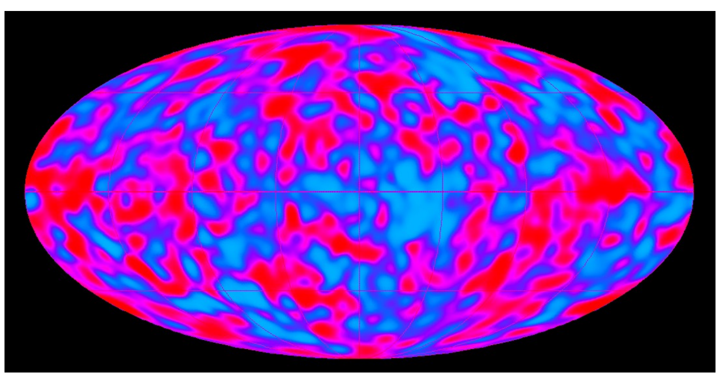
Современная космология

- Классическая космология (А.А. Фридман, В. Де Ситтер, Э. Хаббл, 1920-е)
- Теория космологических возмущений (Е.М. Лифшиц, 1940-е)
- Инфляционная космология (А.А. Старобинский, А. Гус (Guth), А.Д. Линде, конец 1970-х - начало 1980-х)

РЕЛИКТ - январь 1992



COBE - апрель 1992



COBE не подтвердил результаты РЕЛИКТ

A. J. Banday. RELIKT1 and COBE-DMR Results: a Comparison. In: Present and Future of the Cosmic Microwave Background, Proceedings of the Workshop Held in Santander, Spain, 28 June - 1 July 1993. Edited by J. L. Sanz, E. Martinez-Gonzalez, and L. Cayon. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. Also Lecture Notes in Physics, volume 429, 1994, p.111

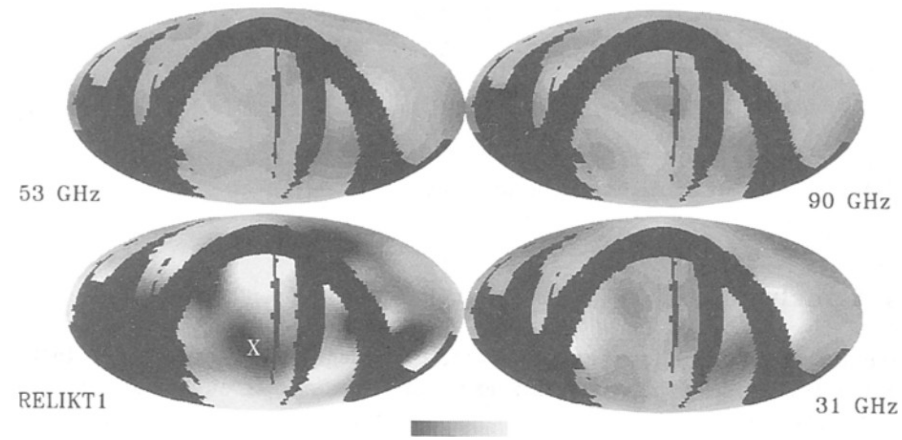


Figure 1: RELIKT1 and DMR sky maps in ecliptic coordinates smoothed to an effective FWHM of ~ 29°. The temperature scale is thermodynamic. A band of width ±15° about the Galactic plane has been given zero weight, other blank regions correspond to the RELIKT1 sky coverage. The white cross on the RELIKT1 map shows the approximate centre of the 'blamb' region.

Джордж Смут и Джон Мазер в 2006 году получили Нобелевскую премию.

1998: Темная энергия

A.G. Riess et. al. The Astronomical Journal, 116 : 1009–1038, 1998.

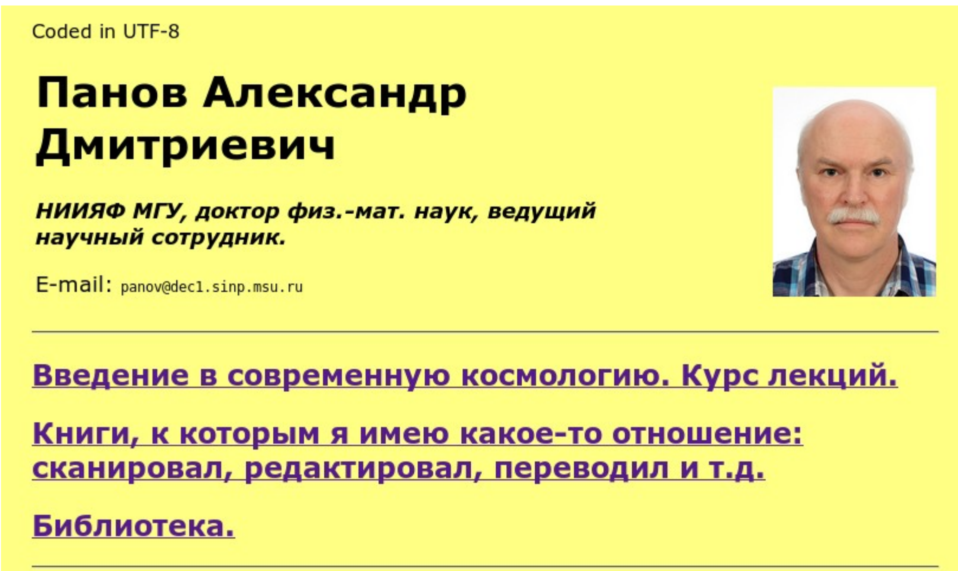
Вселенная расширяется с ускорением!

Литература

- Д.С. Горбунов, В.А. Рубаков. Введение в теорию ранней вселенной (два тома).
- А. Лайтман, В. Пресс, Р. Прайс, С. Тюкольски. Сборник задач по теории относительности и гравитации.

Как устроен курс

Презентации в сети: `dec1.sinp.msu.ru/~panov`



Все формулы пронумерованы!

Проверить вычисления: ★

Наука космология – не вполне обычна

- Научный метод: наблюдаемость и воспроизводимость
- Аппарат космологии описывает «ансамбль одинаковых вселенных», не единичную Вселенную
- Вселенная – уникальный объект
- Операционально неопределимое понятие вероятности – байесовская вероятность: *Вероятность определяется как степень уверенности в истинности суждения (Википедия).*
- Cosmic variance – космическая неопределенность $\Rightarrow$ некоторые предсказания в принципе не могут быть проверены с любой наперед заданной точностью.
- Мультиверс (4 уровня: Макс Тегмарк):
  - причинных областей (1-й уровень)
  - хаотической инфляции (2-й уровень)
  - квантовый (3-й уровень)
  - математический (4-й уровень)
- Методологический статус «других вселенных» неясен.

Лекция 1

Основы ОТО. I.
Дифференциальная геометрия: скаляры, тензоры, инвариантный объем, ковариантная производная

- Движение тел в гравитационном поле не зависит от природы тел $\Rightarrow$
- Принцип эквивалентности $\Rightarrow$
- Гравитация есть явление геометрическое

Постулат: Движение в гравитационном поле есть свободное движение по геодезической линии искривленного пространства-времени

- ОТО – теория гравитации скалярной материи с минимальным взаимодействием.
  (частицы с ненулевым спином должны нарушать принцип эквивалентности arXiv:1608.06572)

Два метода дифференциальной геометрии:
1. *Координатный*
2. Ковариантно-геометрический (Э. Картан, дифференциальные формы, внешнее дифференцирование)

В общем случае никакой специальной системы координат на кривой поверхности ввести нельзя!

Координаты x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$ произвольным образом *локально* помечают точки (события) пространства-времени.

Квадрат интервала (суммирование по одинаковым верхним и нижним индексам, соглашение Эйнштейна):

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.1}$$

$g_{\mu\nu}$ – **метрический тензор** (сигнатура $+1, -1, -1, -1$).

Квадрат интервала есть фундаментальный инвариант – не зависит от того, в каких координатах мы работаем.

Интервал измеряется в единицах длины, но метрический тензор и координаты не имеют определенной размерности!

Размерности вообще

$$\hbar = c = k_B = 1 \quad \langle E_1 \rangle = \frac{1}{2} k_B T \tag{1.2}$$

$$E = mc^2;\; E = k_B T;\; \omega = E/\hbar;\; p = cE;\; p = \hbar k \;\Rightarrow$$
$$[m] = [T] = [\omega] = [p] = [k] = [E] \tag{1.3}$$

Единица измерения энергии – ГэВ.

Переводные коэффициенты вычисляются подбором степеней $c, \hbar, k_B$.
Примеры:

$$[E] = [\hbar\omega] = \left[\frac{\hbar}{t}\right] \;\Rightarrow\; [t] = \frac{[\hbar]}{E} \;\Rightarrow \tag{1.4}$$

$$t(\mathrm{GeV}^{-1}) = \frac{1.05 \cdot 10^{-27}\,\text{эрг}\cdot\text{с}}{10^9 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}\,\text{эрг}} \approx 6.6 \cdot 10^{-25}\,\text{с} \tag{1.5}$$

$$l(\mathrm{GeV}^{-1}) = \frac{1.05 \cdot 10^{-27}\,\text{эрг}\cdot\text{с} \times 3 \cdot 10^{10}\text{см}\,\text{с}^{-1}}{10^9 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}\,\text{эрг}} \approx$$
$$\approx 2.0 \cdot 10^{-14}\,\text{см} \tag{1.6}$$

Таблица преобразования размерностей

Энергия	1 ГэВ	=	1.602e-03 эрг
Масса	1 ГэВ	=	1.783e-24 г
Температура	1 ГэВ	=	1.161e+13 К
Длина	1 ГэВ$^{-1}$	=	1.973e-14 см
Время	1 ГэВ$^{-1}$	=	6.582e-25 с
Плотность числа частиц	1 ГэВ^{3}	=	1.301e+41 см$^{-3}$
Плотность энергии	1 ГэВ^{4}	=	2.085e+38 эрг·см$^{-3}$
Плотность массы	1 ГэВ^{4}	=	2.320e+17 г·см$^{-3}$

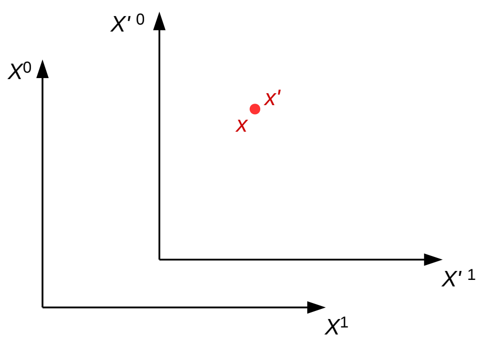
Энергия	1 эрг	=	6.241e+02 ГэВ
Масса	1 г	=	5.609e+23 ГэВ
Температура	1 К	=	8.617e-14 ГэВ
Длина	1 см	=	5.068e+13 ГэВ$^{-1}$
Время	1 с	=	1.519e+24 ГэВ$^{-1}$
Плотность числа частиц	1 см$^{-3}$	=	7.684e-42 ГэВ^{3}
Плотность энергии	1 эрг·см$^{-3}$	=	4.796e-39 ГэВ^{4}
Плотность массы	1 г·см$^{-3}$	=	4.310e-18 ГэВ^{4}

Формализм ковариантен относительно произвольной (гладкой) замены координат (диффеоморфизм):

$$x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv x'^\mu(x^\nu) \equiv x'^\mu(x) \tag{1.7}$$

Ковариантность достигается за счет использования объектов, преобразующихся специальным образом.

Скаляры – не преобразуются:



$$\varphi'(x') = \varphi(x) \tag{1.8}$$

Контравариантные векторы (верхние индексы) преобразуются как дифференциалы координат (используется *соглашение Эйнштейна* о суммировании!)

$$x'^\mu = x'^\mu(x^\nu) \tag{1.9}$$

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \tag{1.10}$$

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \tag{1.11}$$

Ковариантные векторы (нижние индексы) преобразуются как производные скаляра

$$B_\mu = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^\mu} \Rightarrow B'_\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} B_\nu \tag{1.12}$$

Построение скаляров из векторов:

$$A'^\mu B'_\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} A^\sigma \frac{\partial x^\rho}{\partial x'_\mu} B_\rho = \delta^\rho_\sigma A^\sigma B_\rho = A^\rho B_\rho \tag{1.13}$$

$\Rightarrow A^\mu B_\mu$ – инвариант.

В частности, производная по «направлению вектора A» от скалярной функции – инвариант:

$$\partial_A \varphi \equiv \left(A^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \varphi = A^\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \equiv A^\mu \partial_\mu \varphi \tag{1.14}$$

Многомерные тензоры (по определению) преобразуются как произведения координат векторов:

$$B'^\mu_{\nu\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\lambda} B^\rho_{\sigma\tau} \tag{1.15}$$

Для символа Кронекера: $\delta'^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$ ★.

Свертка по верхнему и нижнему индексу уменьшает валентность тензора на 2:

$$A'^\mu_\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} A^\rho_\sigma = \delta^\sigma_\rho A^\rho_\sigma = A^\sigma_\sigma \tag{1.16}$$

(вообще не осталось индексов, скаляр)

Почему метрический тензор - тензор?

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma}dx'^\sigma\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\rho}dx'^\rho = \\ = ds'^2 = g'_{\sigma\rho}dx'^\sigma dx'^\rho \quad (1.17)$$

$$\Rightarrow g'_{\sigma\rho} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\rho}g_{\mu\nu} \quad (1.18)$$

Обобщение: Если $\forall$ тензора A^μ_ν

$$C^\mu_\lambda = A^\mu_\nu B^\nu_\lambda - \quad (1.19)$$

тензор, то и B^ν_λ - тензор (и т.д.)

Доказательство

$$C'^\mu_\lambda = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda}C^\rho_\sigma = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda}A^\rho_\nu B^\nu_\sigma \quad (1.20)$$

$$C'^\mu_\lambda = A'^\mu_\nu B'^\nu_\lambda = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}A^\rho_\sigma B'^\nu_\lambda = \\ = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}A^\rho_\nu B'^\sigma_\lambda \Rightarrow \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda}B^\nu_\sigma = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}B'^\sigma_\lambda \Rightarrow \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda}B^\nu_\sigma = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}B'^\sigma_\lambda \;\Bigg|\; \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} \Rightarrow \quad (1.23)$$

$$B'^\alpha_\lambda = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda}B^\nu_\sigma \quad (1.24)$$

Следствие: Величина, задаваемая обратной матрицей к метрическому тензору, сама тензор:

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda \Rightarrow g^{\mu\nu} - \text{тензор} \quad (1.25)$$

Поднятие и опускание индексов

Если A^μ – контравариантный вектор, то

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu \quad (1.26)$$

– ковариантный вектор.

И наоборот:

$$A^\mu = g^{\mu\nu}A_\nu \quad (1.27)$$

Считают, что A^μ и A_μ – одна и та же величина, записанная по-разному (строго говоря, это неверно).

${T^\mu}_\nu$ и ${T_\nu}^\mu$ – не одно и то же!

$$g^{\alpha\nu}{T^\mu}_\nu = T^{\mu\alpha} \quad (1.28)$$

$$g^{\alpha\nu}{T_\nu}^\mu = T^{\alpha\mu} \quad (1.29)$$

Инвариантный объем

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \tag{1.30}$$

$$\hat{J} = \left(J^\rho_\mu\right) = \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\right)^{\leftarrow\text{столбец}}_{\leftarrow\text{строка}} \equiv \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \tag{1.31}$$

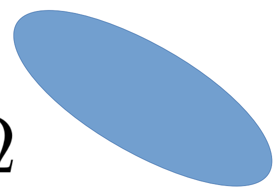
$$\hat{g}' = \hat{J}\hat{g}\hat{J}^T \tag{1.32}$$

$$g \equiv \det \hat{g}; \quad J \equiv \det \hat{J} \tag{1.33}$$

$$g' = J^2 g \Rightarrow J = \sqrt{\frac{g'}{g}} \tag{1.34}$$

маленький
4-объем,
почти
плоский

Ω



Элемент объема - это геометрическое понятие, инвариант!

$$V = \int\limits_\Omega d^4x; \quad V' = \int\limits_\Omega d^4x' \tag{1.35}$$

$$V \neq V' \tag{1.36}$$

$$V = \int\limits_\Omega d^4x = \int\limits_\Omega \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| d^4x' = \int\limits_\Omega \sqrt{\frac{g'}{g}} d^4x' =$$

$$= \sqrt{\frac{g'}{g}} \int\limits_\Omega d^4x' = \sqrt{\frac{g'}{g}}\, V' \Rightarrow \tag{1.37}$$

$$V = \sqrt{\frac{g'}{g}}\, V' \Rightarrow V\sqrt{-g} = V'\sqrt{-g'} \tag{1.38}$$

$$\sqrt{-g} \int\limits_\Omega d^4x = \sqrt{-g'} \int\limits_\Omega d^4x' \tag{1.39}$$

$$\int\limits_\Omega \sqrt{-g}\, d^4x = \int\limits_\Omega \sqrt{-g'}\, d^4x' \tag{1.40}$$

$\sqrt{-g}\, d^4x$ – инвариантный элемент объема

Инвариантый элемент объема – инвариантная мера интегрирования, но не объем в физическом смысле!

$$[g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu] = [L^2]$$

$$[\sqrt{-g} dx] = [L]$$

$$[d^3x] = [\text{любая размерность}] \Rightarrow$$

$$[\sqrt{-g} d^4x] = [\text{любая размерность}]$$

Нековариантная природа дифференцирования

$$(\partial_\mu \varphi)' = \frac{\partial \varphi'}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\partial_\nu \varphi \tag{1.41}$$

– производная скаляра преобразуется как (ковариантный) вектор.

$$\begin{aligned}(\partial_\mu A^\nu)' &= \frac{\partial}{\partial x'^\mu}A'^\nu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu}\left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha}A^\alpha\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x'^\mu}\left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha}\right)A^\alpha + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} = \\ &= \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\cdot\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}A^\alpha + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\partial_\beta A^\alpha\end{aligned} \tag{1.42}$$

Производная вектора преобразуется как тензор плюс еще какая-то добавка.

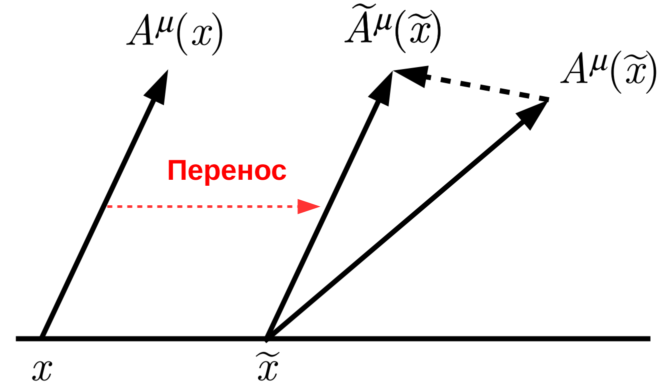
Хотим *ковариантную производную*:

$$\begin{cases}(\nabla_\mu A^\nu)' = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\dfrac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}\nabla_\alpha A^\beta \\ \nabla_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi\end{cases} \tag{1.43}$$

Параллельный перенос

Почему дифференцирование вектора не приводит к тензору?

Проблема: Помимо изменения поля «самого по себе» есть еще добавка, связанная с изменением компонент поля из-за криволинейности системы координат.



Решение: Сначала параллельно перенести $A^\mu(x)$ в точку $\tilde{x}$, а потом сравнить с $A^\mu(\tilde{x})$!
Перенос (в линейном порядке):

$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x}) = A^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu dx^\lambda \tag{1.44}$$

$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ – *коэффициенты аффинной связности*

• Вообще говоря, определены совершенно независимо от $g_{\mu\nu}$ $\Rightarrow$
Геометрия кривого пространства определяется величинами $g_{\mu\nu}$ *и* $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$.

$$\begin{aligned}A^\mu(\tilde{x}) - \tilde{A}^\mu(\tilde{x}) &= A^\mu(\tilde{x}) - [A^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu dx^\lambda] = \\ &= \partial_\lambda A^\mu dx^\lambda + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu dx^\lambda = \\ &= (\partial_\lambda A^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu)dx^\lambda \equiv \nabla_\lambda A^\mu dx^\lambda\end{aligned} \tag{1.45}$$

$$\boxed{\nabla_\lambda A^\mu = \partial_\lambda A^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu} \tag{1.46}$$

Требуем, чтобы $\nabla_\lambda A^\mu$ был тензором!
Это будет определять закон преобразования $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$.

$\nabla_\lambda B_\mu = ?$
Скаляр *не должен меняться* при параллельном переносе:

$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x})\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) = A^\mu(x)B_\mu(x) \tag{1.47}$$

$$[A^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu dx^\lambda]\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) = A^\mu(x)B_\mu(x) \Rightarrow \tag{1.48}$$

$$\begin{aligned} A^\mu(x)[\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) - B_\mu(x)] = \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu dx^\lambda \tilde{B}_\mu(\tilde{x}) \cong \\ \cong \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu dx^\lambda B_\mu(x) = \Gamma^\nu_{\mu\lambda}A^\mu dx^\lambda B_\nu \Rightarrow \end{aligned} \tag{1.49}$$

$$\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) - B_\mu(x) = \Gamma^\nu_{\mu\lambda}dx^\lambda B_\nu \tag{1.50}$$

$$\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) = B_\mu(x) + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}dx^\lambda B_\nu \tag{1.51}$$

$$B_\mu(\tilde{x}) - \tilde{B}_\mu(\tilde{x}) = (\partial_\lambda B_\mu - \Gamma^\nu_{\mu\lambda}B_\nu)dx^\lambda \Rightarrow \tag{1.52}$$

$$\boxed{\nabla_\lambda B_\mu = \partial_\lambda B_\mu - \Gamma^\nu_{\mu\lambda}B_\nu} \tag{1.53}$$

Правило Лейбница и ковариантные производные тензоров высших рангов

$$\nabla_\lambda(A^\mu B_\nu) = ? \tag{1.54}$$

Вернемся к “первым принципам”: $x^\lambda \to x^\lambda + dx^\lambda$, параллельно перенесем произведение $A^\mu B_\nu$ из точки x^λ в $x^\lambda + dx^\lambda$, тогда по смыслу ковариантной производной:

$$A^\mu B_\nu|_{x^\lambda + dx^\lambda} - \tilde{A}^\mu \tilde{B}_\nu\big|_{x^\lambda + dx^\lambda} = \nabla_\lambda(A^\mu B_\nu)dx^\lambda \tag{1.55}$$

$$\tilde{A}^\mu \tilde{B}_\nu\big|_{x^\lambda + dx^\lambda} = A^\mu B_\nu|_{x^\lambda} + \tilde{\delta}(A^\mu B_\nu) \tag{1.56}$$

$$A^\mu B_\nu|_{x^\lambda + dx^\lambda} = A^\mu B_\nu|_{x^\lambda} + \partial_\lambda(A^\mu B_\nu)dx^\lambda \tag{1.57}$$

Подставляя (1.56), (1.57) в (1.55), получаем:

$$\nabla_\lambda(A^\mu B_\nu)dx^\lambda = \partial_\lambda(A^\mu B_\lambda)dx^\lambda - \tilde{\delta}(A^\mu B_\nu) \tag{1.58}$$

Как считать $\tilde{\delta}(A^\mu B_\nu)$ понятно:

$$\tilde{\delta}(A^\mu B_\nu) = (\tilde{\delta}A^\mu)B_\nu + A^\mu(\tilde{\delta}B_\nu) \tag{1.59}$$

$$\tilde{\delta}A^\mu = -\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}A^\sigma dx^\lambda \tag{1.60}$$

$$\tilde{\delta}B_\nu = +\Gamma^\sigma_{\lambda\nu}B_\sigma dx^\lambda \tag{1.61}$$

Из (1.58):

$$\nabla_\lambda(A^\mu B_\nu)dx^\lambda = [\partial_\lambda(A^\mu B_\nu) + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}A^\sigma B_\nu - A^\mu\Gamma^\sigma_{\lambda\nu}B_\sigma]dx^\lambda, \tag{1.62}$$

откуда

$$\nabla_\lambda(A^\mu B_\nu) = \partial_\lambda(A^\mu B_\nu) + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}A^\sigma B_\nu - A^\mu\Gamma^\sigma_{\lambda\nu}B_\sigma. \tag{1.63}$$

С использованием *известных* выражений для ковариантных производных векторов:

$$(\nabla_\lambda A^\mu)B_\nu + A^\mu(\nabla_\lambda B_\nu) = \partial_\lambda(A^\mu B_\nu) + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}A^\sigma B_\nu - A^\mu\Gamma^\sigma_{\lambda\nu}B_\sigma, \tag{1.64}$$

Сравнивая, получаем правило Лейбница:

$$\nabla_\lambda(A^\mu B_\nu) = (\nabla_\lambda A^\mu)B_\nu + A^\mu\nabla_\lambda(B_\nu). \tag{1.65}$$

Обобщением (1.63) получается общее правило ковариантного дифференцирования любых тензоров, например:

$$\boxed{\nabla_\lambda C^\mu_\nu = \partial_\lambda C^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}C^\sigma_\nu - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}C^\mu_\sigma} \tag{1.66}$$