

## Лекция 10

Разложение возмущений метрики, скорости и ТЭИ по спиральностям. Уравнения для возмущений. Моды за горизонтом и моды под горизонтом. Эволюция векторных и тензорных мод. Эволюция скалярных мод для однокомпонентных сред.

## Разложение $h_{ij}$ и $v_i$ по спиральностям

В калибровке  $h_{0i} = 0$

$$h_{\mu\nu} = h_{00} \oplus h_{ij} \quad (10.1)$$

$h_{00}$  не зависит от поворотов в плоскости ( $ij$ )  $\Rightarrow$

$$h_{00} = 2\Phi - \text{скаляр} \quad (10.2)$$

$h_{ij}$  есть комбинация всех возможных спиральностей:

$$h_{ij}(\eta, \mathbf{k}) = \begin{array}{l} -2\Psi\delta_{ij} - 2k_i k_j E \\ +i(k_i W_j^T + k_j W_i^T) \\ +h_{ij}^{TT} \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{спиральность } 0 \\ \text{спиральность } 1 \\ \text{спиральность } 2 \end{array} \right. \quad (10.3)$$

$\Psi, E$  – скалярные моды (2 параметра)

$W_j^T$  – векторные моды (2 параметра)

$h_{ij}^{TT}$  – тензорные моды (2 параметра).

Всего 6 параметров, столько же независимых элементов в симметричной матрице  $h_{ij}$

---

Разложение для скорости:

$$v_i(\eta, \mathbf{k}) = \begin{array}{l} ik_i v(\eta, \mathbf{k}) \\ +V_i^T(\eta, \mathbf{k}) \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{спиральность } 0 \\ \text{спиральность } 1 \end{array} \right. \quad (10.4)$$

$v$  – скалярная мода (1 параметр)

$V_i^T$  – векторные моды (2 параметра)

Всего 3 параметра, столько же независимых компонент вектора  $v_i$

Если под  $v(\eta, \mathbf{k})$  понимать всю компоненту Фурье, то

$$ik_i v(\eta, \mathbf{k}) = \partial_i v(\eta, \mathbf{k}) \Rightarrow v_i = \partial_i v \quad (10.5)$$

поэтому  $v(\eta, \mathbf{k})$  иногда называют потенциалом скорости.

---

Компоненты ТЭИ (см. (9.105), (9.107), (9.109))

Скаляр:

$$\delta T_0^0 = \delta\rho \quad (10.6)$$

Вектор и скаляр (см. (10.4)):

$$\delta T_i^0 = -(\rho + p)v_i \quad (10.7)$$

Скаляр:

$$\delta T_j^i = -\delta_j^i \delta p \quad (10.8)$$

Тензорного вклада нет!

## Линеаризованные уравнения для возмущений

### Ковариантное сохранение ТЭИ

$$\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = \partial_{\mu} T_{\nu}^{\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} T_{\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} T_{\lambda}^{\mu} = 0 \quad (10.9)$$

$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  считаются в метрике

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \quad (10.10)$$

в калибровке  $h_{0i} = 0$  ★

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{a'}{a} + \frac{1}{2}h'_{00} \quad (10.11)$$

$$\Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{00}^i = \frac{1}{2}\partial_i h_{00} \quad (10.12)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{a'}{a}\delta_{ij} - \frac{1}{2}h'_{ij} \quad (10.13)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{a'}{a}(1 - h_{00})\delta_{ij} - \frac{a'}{a}h_{ij} - \frac{1}{2}h'_{ij} \quad (10.14)$$

$$\Gamma_{jk}^i = -\frac{1}{2}(\partial_j h_{ik} + \partial_k h_{ij} - \partial_i h_{jk}) \quad (10.15)$$

Подставляем в (10.9), используем выражения для  $\delta T$ , получаем два уравнения (для 0 и для  $i$ -компонент (10.9)) ★:

$$\delta\rho' + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho + \delta p) + (\rho + p) \left( \partial_i v_i - \frac{1}{2}h' \right) = 0 \quad (10.16)$$

$$\partial_i \delta p + (\rho + p) \left( 4\frac{a'}{a}v_i + \frac{1}{2}\partial_i h_{00} \right) + [v_i(\rho + p)]' = 0 \quad (10.17)$$

где  $h = h_{ii}$

## Линеаризованные уравнения Эйнштейна

$$G_{\mu}^{\nu} + \delta G_{\mu}^{\nu} = 8\pi G(T_{\nu}^{\mu} + \delta T_{\nu}^{\mu}) \Rightarrow \quad (10.18)$$

$$\delta G_{\mu}^{\nu} = 8\pi G\delta T_{\nu}^{\mu} \quad (10.19)$$

★

$$a^2\delta G_0^0 = -3h_{00} \left( \frac{a'}{a} \right)^2 - \frac{1}{2}\partial_i\partial_j h_{ij} + \frac{1}{2}\Delta h - \frac{a'}{a}h' \quad (10.20)$$

$$a^2\delta G_i^0 = \frac{1}{2}\partial_i h' - \frac{1}{2}\partial_j h'_{ij} + \frac{a'}{a}\partial_i h_{00} \quad (10.21)$$

$$\begin{aligned} a^2\delta G_j^i = & \frac{1}{2}\partial_i\partial_k h_{jk} + \frac{1}{2}\partial_j\partial_k h_{ik} + \frac{1}{2}h''_{ij} - \frac{1}{2}\Delta h_{ij} + \\ & + \frac{1}{2}\partial_i\partial_j h_{00} - \frac{1}{2}\partial_i\partial_j h + \frac{a'}{a}h'_{ij} - \\ & - \delta_j^i \left[ \frac{1}{2}h'' + \frac{1}{2}\Delta h_{00} + \frac{1}{2}\partial_l\partial_k h_{lk} - \frac{1}{2}\Delta h + \right. \\ & \left. + 2\frac{a''}{a}h_{00} - \left( \frac{a'}{a} \right)^2 h_{00} + \frac{a'}{a}(h'_{00} + h') \right] \quad (10.22) \end{aligned}$$

## Тензорные моды (Для компонент Фурье!)

Для поперечного тензора  $h_{ij} = h_{ij}^{TT}$ :

$$\delta G_0^0 = 0 \quad (10.23)$$

$$\delta G_i^0 = 0 \quad (10.24)$$

$$\delta G_j^i \neq 0 \quad (10.25)$$

В выражениях для  $\delta T_\nu^\mu$  [идеальная жидкость] (9.105)–(9.109) тензорного вклада нет, поэтому уравнение для тензорных мод однородное (очень просто!)

★:

$$\partial_\eta^2 h_{ij}^{TT} - \Delta h_{ij}^{TT} + 2\frac{a'}{a}\partial_\eta h_{ij}^{TT} = 0 \quad (10.26)$$

Это уравнение для гравитационных волн в пр-ве Фридмана.

В статическом пределе Минковского  $\eta \rightarrow t$ ,  $a' = 0$  и уравнение переходит в обычное волновое уравнение

$$\partial_t^2 h_{ij}^{TT} - \Delta h_{ij}^{TT} = 0 \quad (10.27)$$

## Векторные моды

Векторные моды метрического тензора, скорости и ТЭИ

$$h_{ij} = i(k_i W_j^T + k_j W_i^T) = \partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T \quad (10.28)$$

$$v_i = V_i^T; \quad ik_i V_i = \partial_i V_i = 0 \quad (10.29)$$

$$\delta T_i^0 = -(\rho + p)v_i \quad (10.30)$$

Линеаризованные уравнения Эйнштейна:

00-компонента удовлетворяется тождественно ★;

0i-компоненты

$$\partial_\eta \Delta W_i^T = 16\pi G a^2 (\rho + p) V_i^T \quad (10.31)$$

ij-компоненты ★

$$\partial_\eta^2 W_i^T + 2\frac{a'}{a}\partial_\eta W_i^T = 0 \quad (10.32)$$

Откуда в 0i-компоненте 3-я производная? Получим:

$$\delta G_i^0 = \frac{1}{a^2} \left( \frac{1}{2}\partial_i h' - \frac{1}{2}\partial_j h'_{ij} + \frac{a'}{a}\partial_i h_{00} \right) = 8\pi G \delta T_i^0 \quad (10.33)$$

$$h_{00} \equiv 0 \Rightarrow \quad (10.34)$$

$$\partial_j h'_{ij} - \partial_i h' = a^2 16\pi G (\rho + p) V_i^T \quad (10.35)$$

$$\begin{aligned} \partial_j h'_{ij} &= \partial_\eta \partial_j (\partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T) = \partial_\eta [\partial_j \partial_i W_j^T + \partial_j \partial_j W_i^T] = \\ &= \partial_\eta \partial_j \partial_i W_j^T + \partial_\eta \Delta W_i^T \end{aligned} \quad (10.36)$$

$$\partial_j \partial_i W_j^T = -k_i k_j W_j^T = 0 \quad (10.37)$$

$$h = 2\partial_j W_j^T = i2k_j W_j^T = 0 \text{ (поперечность)} \quad (10.38)$$

$$\partial_\eta \Delta W_i^T = 16\pi G a^2 (\rho + p) V_i^T \quad (10.39)$$

или

$$-k^2 \partial_\eta W_i^T = 16\pi G a^2 (\rho + p) V_i^T \quad (10.40)$$

Из ковариантных сохранений нетривиально одно:

$$\partial_\eta [(\rho + p)V_i^T] + 4\frac{a'}{a}(\rho + p)V_i^T = 0 \quad (10.41)$$

Уравнение (10.32) является следствием (10.41) и (10.31). Нетривиально только уравнение (10.31)

$$\partial_\eta \Delta W_i^T = 16\pi G a^2 (\rho + p) V_i^T \quad (10.31)$$

• Могут ли векторные моды распространяться подобно гравитационным волнам?

Однородное уравнение (10.31) ( $\rho = 0$ ) имеет решением любую функцию  $\mathbf{x}$ , не зависящую от  $\eta$  – это чистая калибровка.

Устраняется преобразованием (см. (9.80)):

$$\xi_i = W_i^T(\mathbf{x}), \quad \xi_0 = 0 \quad (10.42)$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{ij} &= h^{ij} - \partial^i \xi^j - \partial^j \xi^i - 2\eta^{ij} \xi^\lambda \frac{\partial_\lambda a}{a} = \\ &= \partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T - \partial_i W_j^T - \partial_j W_i^T - 2\eta_{ij} W_j^T \frac{\partial_j a}{a} = 0 \end{aligned} \quad (10.43)$$

Векторные моды грав. поля в отсутствие источников не распространяются!

Скалярные моды,

конформная Ньютонова калибровка

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu - 2\eta^{\mu\nu} \xi^\lambda \frac{\partial_\lambda a}{a} \quad (10.44)$$

Используем возможность остаточной калибровки, не нарушающей условия  $h_{0i} = 0$  (см. (9.79)):

$$\partial_0 \xi_i + \partial_i \xi_0 = 0 \quad (10.45)$$

Общий вид такой калибровки:

$$\xi_i = -\partial_i \sigma(\eta, \mathbf{x}), \quad \xi_0 = \partial_0 \sigma(\eta, \mathbf{x}) \quad (10.46)$$

$$\tilde{h}_{ij} = h_{ij} + 2\partial_i \partial_j \sigma - 2\delta_{ij} \partial_0 \sigma \frac{\partial_0 a}{a} \quad (10.47)$$

Общий вид скалярной моды  $h_{ij}$  (см. (10.3)):

$$h_{ij} = -2\Psi \delta_{ij} - 2k_i k_j E \quad (10.48)$$

В координатном представлении

$$h_{ij} = -2\Psi \delta_{ij} + 2\partial_i \partial_j E \quad (10.49)$$

$$\tilde{h}_{ij} = -2\Psi \delta_{ij} + 2\partial_i \partial_j E + 2\partial_i \partial_j \sigma - 2\delta_{ij} \partial_0 \sigma \frac{\partial_0 a}{a} \quad (10.50)$$

Подбираем  $\sigma$ :

$$2\partial_i \partial_j \sigma - \delta_{ij} \partial_0 \sigma \frac{\partial_0 a}{a} = -\partial_i \partial_j E \quad (10.51)$$

Калибровка полностью фиксирована.

Для скалярных мод остается:

$$h_{00} = 2\Phi \quad (10.52)$$

$$h_{ij} = -2\Psi \delta_{ij} \quad (10.53)$$

$$v_i = \partial_i v \text{ [или } ik_i v \text{]} \quad (10.54)$$

Из (10.20)–(10.22) тензор Эйнштейна для скалярных мод ★:

$$\delta G_0^0 = \frac{2}{a^2} \left( -\Delta\Psi + 3\frac{a'}{a}\Psi' - 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi \right) \quad (10.55)$$

$$\delta G_i^0 = \frac{2}{a^2} \left( -\partial_i\Psi' + \frac{a'}{a}\partial_i\Phi \right) \quad (10.56)$$

$$\begin{aligned} \delta G_j^i = & \frac{1}{a^2}\partial_i\partial_j(\Phi + \Psi) - \\ & - \frac{2}{a^2}\delta_{ij} \left[ -\Psi'' + \frac{1}{2}\Delta(\Phi + \Psi) + \frac{a'}{a}(\Phi' - 2\Psi') + \right. \\ & \left. + \Phi \left( 2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a} \right) \right] \quad (10.57) \end{aligned}$$

В пространственной части для скалярных мод

$$\delta T_j^i = -\delta_j^i \delta p \quad (10.58)$$

Нет структуры  $\partial_i\partial_j$ , которая есть в  $\delta G_j^i \Rightarrow$

$$\Phi + \Psi = 0 \Rightarrow \Psi = -\Phi \quad (10.59)$$

В Ньютонском пределе  $\Phi$  – Ньютонский гравитационный потенциал, отсюда название калибровки.

Уравнения Эйнштейна для скалярных мод:

$$\Delta\Phi - 3\frac{a'}{a}\Phi' - 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = 4\pi G a^2 \delta\rho_{tot} \quad (10.60)$$

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi G a^2 [(\rho + p)v]_{tot} \quad (10.61)$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left( 2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2} \right) \Phi = 4\pi G a^2 \delta p_{tot} \quad (10.62)$$

Уравнения ковариантного сохранения ★  
( $\lambda$  – тип материи):

$$\delta\rho'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho_\lambda + \delta p_\lambda) + (\rho_\lambda + p_\lambda)(\Delta v_\lambda - 3\Phi') = 0 \quad (10.63)$$

$$[(\rho_\lambda + p_\lambda)v_\lambda]' + 4\frac{a'}{a}(\rho_\lambda + p_\lambda)v_\lambda + \delta p_\lambda + (\rho_\lambda + p_\lambda)\Phi = 0 \quad (10.64)$$

Не все уравнения (10.60)–(10.64) независимы.

Система не полна: нужны уравнения состояния:

$$p_\lambda = w_\lambda \rho_\lambda \quad (10.65)$$

и скорости звука

$$\delta p_\lambda = u_{s\lambda}^2 \delta\rho_\lambda \quad (10.66)$$

Вообще говоря,  $w_\lambda \neq u_{s\lambda}^2$  так как  $w_\lambda \neq \text{const!}$

В отсутствие материи (10.60)–(10.62) не имеют нетривиальных решений  $\Rightarrow$  свободное грав. поле не имеет распространяющихся скалярных (и векторных!) мод. Все распространяющиеся в пустоте моды – тензорные, спиральность  $\pm 2$  (или смесь).

## Моды за горизонтом и моды под горизонтом

Длина волны возмущения

$$\lambda(\eta) = \frac{2\pi}{q(\eta)} \quad (10.67)$$

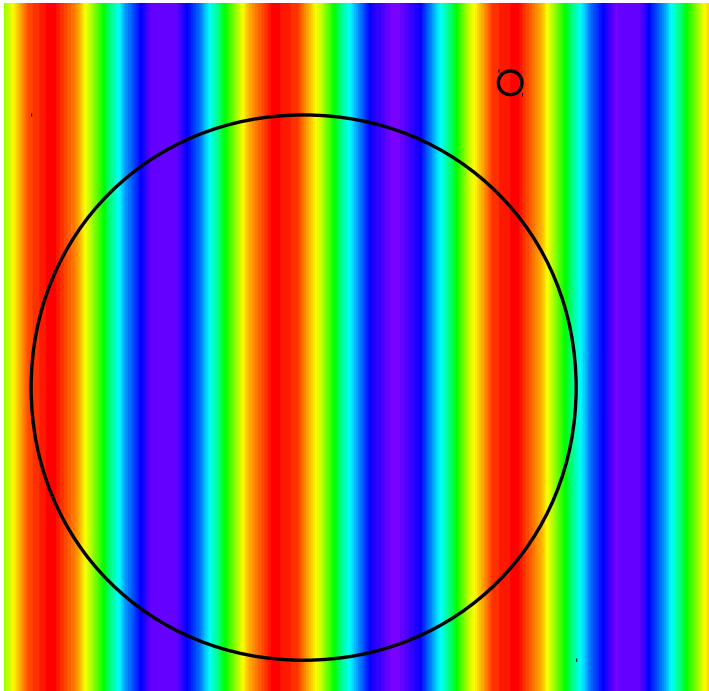
Для РД-стадии  $l_H(\eta) = 1/H(\eta)$ ,  
 Для ДМ-стадии  $l_H(\eta) = 2/H(\eta)$ ,  
 Всегда  $l_H(\eta) \sim 1/H(\eta)$

Важно различать случаи:  
 Мода далеко за горизонтом

$$\lambda(\eta) \gg l_H(\eta) \Rightarrow q(\eta) \ll H(\eta) \quad (10.68)$$

Мода глубоко под горизонтом

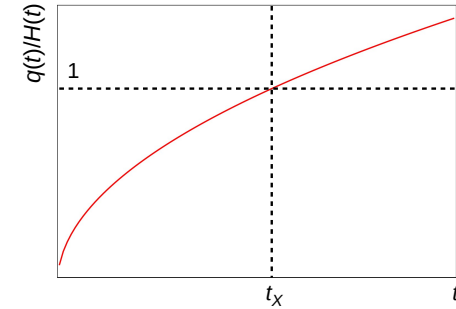
$$\lambda(\eta) \ll l_H(\eta) \Rightarrow q(\eta) \gg H(\eta) \quad (10.69)$$



РД и ДМ-стадии идут с замедлением расширения  $\Rightarrow$

$$\frac{l_H(t)}{\lambda(t)} = \frac{q(t)}{H(t)} = \frac{k/a(t)}{H(t)} \propto \frac{1/t^\alpha}{1/t} = t^{1-\alpha} \quad (10.70)$$

$\alpha < 1 \Rightarrow 1 - \alpha > 0 \Rightarrow$  отношение растет,  
 мода может войти под горизонт



На РД-стадии и на ДМ-стадии

$$l_H = a(\eta)\eta \quad (10.71)$$

Условие входа под горизонт

$$\lambda(\eta) \sim l_H(\eta) \Rightarrow \quad (10.72)$$

$$\frac{2\pi a}{k} = \lambda(\eta) \sim a(\eta)\eta \quad (10.73)$$

$$\Rightarrow k\eta_x \sim 2\pi \sim 1 \Rightarrow \eta_x \sim \frac{1}{k} \quad (10.74)$$

$$\eta \ll \frac{1}{k} \text{ — за горизонтом} \quad (10.75)$$

$$\eta \gg \frac{1}{k} \text{ — под горизонтом} \quad (10.76)$$

Т.к.  $a \sim \eta$  или  $a \sim \eta^2 \Rightarrow \eta \sim a/a'$ , то эквивалентное условие

$$k \ll \frac{a'}{a} - \text{за горизонтом} \quad (10.77)$$

$$k \gg \frac{a'}{a} - \text{под горизонтом} \quad (10.78)$$

## Эволюция векторных мод

Векторные моды:

$$h_{ij} = \partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T \quad (10.79)$$

$$v_i = V_i^T \quad (10.80)$$

$$\delta T_i^0 = (\rho + p)V_i^T \quad (10.81)$$

• *Векторное возмущение скорости:*

Ковариантное сохранение:

$$\partial_\eta [(\rho + p)V_i^T] + 4\frac{a'}{a}(\rho + p)V_i^T = 0 \quad (10.82)$$

(0, i)-компонента уравнений Эйнштейна:

$$\partial_\eta \Delta W_i^T = 16\pi G a^2 (\rho + p)V_i^T \quad (10.83)$$

Из (10.82):

$$\frac{\partial_\eta [(\rho + p)V_i^T]}{(\rho + p)V_i^T} = -4\frac{\partial_\eta a}{a} \Rightarrow \quad (10.84)$$

$$\boxed{(\rho + p)V_i^T = \text{const} \cdot a^{-4}} \quad (10.85)$$

Для каждой компоненты среды  $\lambda$  (10.85) выполняется отдельно.

Похоже на сохранение момента (если  $a = \text{const}$ ).

Для релятивистского вещества  $p \propto \rho \propto a^{-4} \Rightarrow$

$$\boxed{V_i^T = \text{const}} \quad (10.86)$$



Для нерелятивистского вещества  $p = 0, \rho \propto a^{-3} \Rightarrow$

$$\boxed{V_i^T = \text{const}/a} \quad (10.87)$$

Векторные моды  $v_i$  либо не растут, либо убывают.

• *Векторное возмущение метрики:*

Из (10.83) и (10.85):

$$(-k^2)\partial_\eta W_i^T = 16\pi G a^2 \frac{\text{const}}{a^4} = \text{const} \frac{1}{a^2} \quad (10.88)$$

РД-стадия:

$$\partial_\eta W_i^T = \frac{\text{const}}{\text{const} \eta^2} = \frac{\text{const}}{\eta^2} \Rightarrow \quad (10.89)$$

$$\boxed{W_i^T = \frac{\text{const}}{\eta} = \frac{\text{const}}{a}} \quad (10.90)$$

ДМ-стадия:

$$\partial_\eta W_i^T = \frac{\text{const}}{\text{const} \eta^4} = \frac{\text{const}}{\eta^4} \Rightarrow \quad (10.91)$$

$$\boxed{W_i^T = \frac{\text{const}}{\eta^3} = \frac{\text{const}}{a^{3/2}}} \quad (10.92)$$

ЛД-стадия

$$\partial_\eta W_i^T = \frac{\text{const}}{(-1/H_{dS}\eta)^2} = \text{const} \eta^2 \Rightarrow \quad (10.93)$$

$$W_i^T = \text{const} \eta^3; \quad \eta = -\frac{1}{aH_{dS}} \Rightarrow \quad (10.94)$$

$$\boxed{W_i^T = \frac{\text{const}}{a^3}} \quad (10.95)$$

Векторные моды гравитации *падают* во всех режимах эволюции  $\Rightarrow$

падающие моды не должны себя проявлять, так как *ведут к сингулярности в начальных условиях.*

Обычно считается, что векторных мод нет (как и любых падающих мод!).

### **Эволюция тензорных мод (реликтовые гравитационные волны)**

Уравнение Эйнштейна для тензорных мод (см. (10.26))

$$\partial_\eta^2 h_{ij}^{TT} + 2\frac{a'}{a}\partial_\eta h_{ij}^{TT} - \Delta h_{ij}^{TT} = 0 \quad (10.96)$$

$$h_{ij}^{TT} = \sum_A e_{ij}^{(A)} h^{(A)}; \quad A = +, \times \quad (10.97)$$

Из (10.96) для каждой (A):

$$\partial_\eta^2 h^{(A)} + 2\frac{a'}{a}\partial_\eta h^{(A)} - \Delta h^{(A)} = 0; \quad (10.98)$$

или в импульсном представлении (для любой из компонент, (A) не пишем)

$$h'' + 2\frac{a'}{a}h' + k^2 h = 0 \quad (10.99)$$

Можно решать численно.

## Тензорные моды за горизонтом: константная мода и падающая мода

Условие на  $k$  для мод за горизонтом (10.77):

$$k \ll \frac{a'}{a} \quad (10.100)$$

Пренебрегаем в (10.99) членом  $k^2 h$ :

$$h'' + 2\frac{a'}{a}h' = 0 \quad (10.101)$$

Одно из решений – константная мода:

$$h = h_{(i)} = \text{const} \quad (10.102)$$

( $i$ ) – initial или input.

Другое решение – падающая мода ★:

$$h(\eta) = \text{const} \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta}{a^2(\eta)}; \quad h(\infty) = 0 \quad (10.103)$$

Ведет себя как падающая векторная мода

$$\begin{aligned} \text{РД} &: h \propto a^{-1} \\ \text{ДМ} &: h \propto a^{-3/2} \\ \text{ЛД} &: h \propto a^{-3} \end{aligned}$$

Следовательно такие решения не рассматриваются.

Все тензорные моды за горизонтом – только константные моды

$$h^A = h_{(i)}^A(\mathbf{k}); \quad A = +, \times \quad (10.104)$$

## Тензорные моды под горизонтом. Сшивка с константной модой

Введем новую переменную:

$$f(\eta) = a(\eta)h(\eta) \quad (10.105)$$

Уравнение (10.99) принимает вид:

$$f'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) f = 0 \quad (10.106)$$

РД:  $a''/a = 0$ ; ДМ:  $a''/a = 2/\eta^2 \Rightarrow$

ДМ под горизонтом

$$\frac{1}{k} \ll \eta \Rightarrow k^2 \gg \frac{1}{\eta^2} \sim \frac{a''}{a} \Rightarrow k^2 - \frac{a''}{a} \cong k^2 \Rightarrow \quad (10.107)$$

в любом случае получается уравнение осциллятора

$$f'' + k^2 f = 0 \Rightarrow \quad (10.108)$$

$$f(\eta) = C \cos(k\eta + \alpha) \Rightarrow h(\eta) = \frac{C}{a(\eta)} \cos(k\eta + \alpha) \quad (10.109)$$

Падающая мода, но безопасная, так как решение не нужно экстраполировать к  $a = 0$  – только до момента входа под горизонт.

$C, \alpha$  ищем из условия сшивки с константной модой.

## Грубо (асимптотика)

Момент входа под горизонт  $\eta_\times$ :

$$h(\eta_\times) \sim \frac{C}{a(\eta_\times)} \cos(k\eta_\times + \alpha) \sim \frac{C}{a(\eta_\times)} \Rightarrow \quad (10.110)$$

$$C \sim h(\eta_\times)a(\eta_\times) \sim h_{(i)}a(\eta_\times) \Rightarrow \quad (10.111)$$

$$h(\eta) \sim h_{(i)} \frac{a(\eta_\times)}{a(\eta)} \cos(k\eta + \alpha) \quad (10.112)$$

( $\eta_\times$  для разных  $k$  – разные!)

Если  $h_{(i)}$  не зависят от  $k$  (белый шум), то зависимость  $h$  от  $k$  для мод, вошедших под горизонт, определяется зависимостью  $a(\eta_\times(k))$

$$\eta_\times \sim 1/k \Rightarrow$$

Если волны входят на РД стадии

$$a(\eta_\times) = \text{const } \eta_\times = \text{const } \frac{1}{k} \Rightarrow h(k) \propto h_i \frac{1}{k}; \quad k \gg k^{(eq)} \quad (10.113)$$

Если волны входят на ДМ стадии

$$a(\eta_\times) = \text{const } \eta_\times^2 = \text{const } \frac{1}{k^2} \Rightarrow h(k) \propto h_i \frac{1}{k^2}; \quad k \ll k^{(eq)} \quad (10.114)$$

Уточнение оценки: решаем (10.99) при  $\eta \sim \eta_\times$

$$(10.99): h'' + 2\frac{a'}{a}h' + k^2h = 0 \quad (10.115)$$

Для РД-входящих мод

$$\eta = \frac{a}{a'} \Rightarrow \frac{a'}{a} = \frac{1}{\eta} \Rightarrow \quad (10.116)$$

из (10.99)

$$h'' + \frac{2}{\eta}h' + k^2h = 0 \quad (10.117)$$

Замена  $x = k\eta \Rightarrow$

$$\frac{d^2h}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dh}{dx} + h = 0 \quad (10.118)$$

Решение, стремящееся к константе при  $x \rightarrow 0$  есть сферическая функция Бесселя 0-го порядка:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (10.119)$$

$$h(\eta) = h_{(i)} \frac{\sin k\eta}{k\eta}, \quad h(\eta \rightarrow 0) = h_{(i)} \quad (10.120)$$

• Это решение верно лишь на РД-стадии, вблизи  $\eta_\times$ . Как оно ведет себя потом?

Запишем в виде (переходит в (10.120) вблизи  $\eta_\times$ ):

$$h(\eta) = h_{(i)} \frac{a(\eta_\times)}{\eta_\times} \frac{\sin k\eta}{ka(\eta)} \quad (10.121)$$

$a(\eta) = \text{const} \times \eta$ , отношение  $a(\eta)/\eta$  не зависит от времени (вблизи  $\eta_{\times}$ ). Из (9.18):

$$\frac{a(\eta_{\times})}{\eta_{\times}} = \left( \frac{g_*}{g_{*,0}} \right)^{1/6} a_0^2 H_0 \sqrt{\Omega_{rad}} \Rightarrow \quad (10.122)$$

$$h(\eta) = h_{(i)} \left[ \left( \frac{g_*}{g_{*,0}} \right)^{1/6} a_0^2 H_0 \sqrt{\Omega_{rad}} \right] \frac{\sin k\eta}{ka(\eta)} \quad (10.123)$$

Это решение универсально верно при всех  $\eta$  после входа моды под горизонт, так как амплитуда универсально падает как  $1/a$  (см. грубую оценку выше)! Фаза колебания фиксирована!

Для ДМ-входящих мод

$$a(\eta) = \text{const} \eta^2; \quad \frac{a'}{a} = \frac{2\eta}{\eta^2} = \frac{2}{\eta} \quad (10.124)$$

из (10.99)

$$h'' + \frac{4}{\eta} h' + k^2 h = 0 \quad (10.125)$$

Замена:

$$h(\eta) = \frac{1}{\eta} y(\eta) \Rightarrow \quad (10.126)$$

$$\frac{d^2 y}{d\eta^2} + \frac{2}{\eta} \frac{dy}{d\eta} + \left( k^2 - \frac{2}{\eta^2} \right) y = 0 \quad (10.127)$$

Еще замена:  $x = k\eta \Rightarrow$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \left( 1 - \frac{2}{x^2} \right) y = 0 \quad (10.128)$$

– уравнение для сферической функции Бесселя 1-го порядка:

$$j_1(x) = \frac{1}{x^2} \left( \frac{\sin x}{x} - \cos x \right) \quad (10.129)$$

Асимптотика  $j_1(x \rightarrow 0) = 1/3$ .

Решение с асимптотикой  $h(\eta \rightarrow 0) = h_{(i)}$ :

$$h(\eta) = -3h_{(i)} \frac{1}{(k\eta)^2} \left( \cos k\eta - \frac{\sin k\eta}{k\eta} \right) \quad (10.130)$$

$$\begin{aligned} h(\eta) &= -3h_{(i)} \frac{a(\eta_{\times})}{\eta_{\times}^2} \frac{1}{k^2 a(\eta)} \left( \cos k\eta - \frac{\sin k\eta}{k\eta} \right) = \\ &= \left\{ \text{Из (9.23)} : \frac{a}{\eta^2} = \frac{a_0^3 H_0^2 \Omega_M}{4} \right\} = \\ &= -3h_{(i)} \frac{a_0^3 H_0^2 \Omega_M}{4} \frac{1}{k^2 a(\eta)} \left( \cos k\eta - \frac{\sin k\eta}{k\eta} \right) \quad (10.131) \end{aligned}$$

При  $k\eta \gg 1$  (глубоко под горизонтом)

$$h(\eta) = -3h_{(i)} \frac{a_0^3 H_0^2 \Omega_M}{4} \frac{1}{k^2 a(\eta)} \cos k\eta \quad (10.132)$$

что соответствует (10.112) и (10.114).

Это решение универсально верно при всех  $\eta$  после входа моды под горизонт, так как амплитуда универсально падает как  $1/a$  (см. грубую оценку выше)! Фаза колебания фиксирована!

## Скалярные возмущения – однокомпонентные среды

Формализм описывает возмущения той компоненты, которая доминирует.

Уравнения Эйнштейна для скалярных мод, однокомпонентная среда (см. (10.60)–(10.62))

$$\Delta\Phi - 3\frac{a'}{a}\Phi' - 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = 4\pi G a^2 \delta\rho \quad (10.133)$$

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi G a^2 [(\rho + p)v] \quad (10.134)$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = 4\pi G a^2 \delta p \quad (10.135)$$

Для однокомпонентной среды уравнения сохранения следуют из (10.133)–(10.135).

(10.133) в импульсном представлении:

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi G a^2 \delta\rho \quad (10.136)$$

Уравнение состояния:  $\delta p = u_s^2 \delta\rho$

(10.136) + (10.135)  $\times u_s^2$ :

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}(1 + u_s^2)\Phi' + \left[2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}(1 - 3u_s^2)\right]\Phi + u_s^2 k^2\Phi = 0 \quad (10.137)$$

Уравнение Фридмана:

$$\frac{a'^2}{a^4} = \frac{8\pi}{3} G \rho \quad (10.138)$$

Уравнения фоновой метрики для  $(i, j)$ -компонент (см. (9.6)):

$$2\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} = -8\pi G p \Rightarrow \quad (10.139)$$

$$\begin{aligned} \left[2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}(1 - 3u_s^2)\right] &= a^2 \left(2\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4}\right) + a^2 \frac{a'^2}{a^4} 3u_s^2 = \\ &= a^2(-8\pi G p) + a^2 \frac{8\pi}{3} G p 3u_s^2 = -8\pi G a^2 (p - u_s^2 \rho) \end{aligned} \quad (10.140)$$

Считаем  $p = u_s^2 \rho$ , тогда [...] исчезает:

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}(1 + u_s^2)\Phi' + u_s^2 k^2\Phi = 0 \quad (10.141)$$

## Скалярные моды за горизонтом

$$k \ll \frac{a'}{a} \Rightarrow \quad (10.142)$$

последним слагаемым в (10.141) пренебрегаем

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}(1 + u_s^2)\Phi' = 0 \quad (10.143)$$

Имеется константное решение

$$\Phi = \Phi_{(i)} = \text{const} \quad (10.144)$$

и есть падающая мода

$$\Phi(\eta) = \text{const} \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta}{a^{3(1+u_s^2)}(\eta)} \quad (10.145)$$

Предполагаем, как обычно, что падающей моды нет.

Ищем

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho} \quad (10.146)$$

Из (10.136), за горизонтом для константной моды

$$3\frac{a'^2}{a^2}\Phi_{(i)} = -4\pi G a^2 \delta\rho \quad (10.147)$$

Из уравнения Фридмана

$$\frac{a'^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3} a^2 G \rho \quad (10.148)$$

Подставляем в (10.147)  $\Rightarrow$

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho} = -2\Phi_{(i)} = \text{const} \quad (10.149)$$

Скорости, соответствующие скалярной моде  $v$ :  $v_j = \partial_j v$

Из (10.134) потенциал скорости

$$v = -\frac{1}{4\pi G a^2(\rho + p)} \frac{a'}{a} \Phi \quad (10.150)$$

$$\Phi = \Phi_{(i)} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} v_j = \partial_j v &= -\frac{1}{4\pi G(\rho + p)} \frac{a'}{a^2} \frac{1}{a} i k_j e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \sim \\ &\sim \frac{1}{4\pi G(\rho + p)} H q = \frac{1}{4\pi G(\rho + p)} H^2 \frac{q}{H} \sim \frac{q}{H} \ll 1 \end{aligned} \quad (10.151)$$

**Скалярные моды под горизонтом: УР вещество**

$$w = u_s^2 = 1/3 \quad (10.152)$$

Из (10.141)

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}(1 + u_s^2) + u_s^2 k^2 \Phi = 0; \quad \frac{a'}{a} = \frac{1}{\eta} \Rightarrow \quad (10.153)$$

$$\Phi'' + \frac{4}{\eta} + u_s^2 k^2 \Phi = 0 \quad (10.154)$$

Сводится к уравнению для сферической функции Бесселя 1-го порядка (см. (10.125)). Решение:

$$\Phi(\eta) = -3\Phi_{(i)} \frac{1}{(u_s k \eta)^2} \left[ \cos(u_s k \eta) - \frac{\sin(u_s k \eta)}{u_s k \eta} \right] \quad (10.155)$$

$$\Phi(\eta \rightarrow 0) = \Phi_{(i)} \quad (10.156)$$

*Звуковой горизонт:*

$$l_s = u_s \cdot \frac{1}{H} \quad (10.157)$$

Далеко под звуковым горизонтом ( $u_s k \eta \gg 1$ ) имеется падающая волна с определенной фазой:

$$\Phi(\eta) = -3\Phi_{(i)} \frac{1}{(u_s k \eta)^2} \cos(u_s k \eta) \quad (10.158)$$

Ищем  $\delta = \delta\rho/\rho$  глубоко под (звуковым) горизонтом. Из (10.136) (объединили слагаемые с  $\Phi$ ):

$$\left( k^2 + 3\frac{a'^2}{a^2} \right) \Phi + 3\frac{a'}{a} \Phi' = -4\pi G a^2 \delta\rho \quad (10.159)$$

Покажем, что слева существенен только член  $k^2\Phi$ .

$$\begin{aligned} \eta^2 \left( k^2 + 3\frac{a'^2}{a^2} \right) \Phi &= \\ &= \eta^2 \left( k^2 + \frac{3}{\eta^2} \right) \left( -3\Phi_{(i)} \cos(u_s k \eta) \frac{1}{(u_s k \eta)^2} \right) = \\ &= (\eta^2 k^2 + 3) \left( -3\Phi_{(i)} \cos(u_s k \eta) \frac{1}{(u_s k \eta)^2} \right) = \\ &= \backslash u_s k \eta \gg 1 \backslash \approx \\ &\approx \eta^2 k^2 \left( -3\Phi_{(i)} \cos(u_s k \eta) \frac{1}{(u_s k \eta)^2} \right) \sim \Phi_{(i)} \quad (10.160) \end{aligned}$$

$$\eta^2 3\frac{a'}{a} \Phi' \cong \frac{9\Phi_{(i)}}{u_s k \eta} \sin(u_s k \eta) \sim \frac{1}{u_s k \eta} \Phi_{(i)} \quad (10.161)$$

$$\Phi_{(i)} \gg \frac{1}{u_s k \eta} \Phi_{(i)} \quad (10.162)$$

$$\begin{aligned} k^2 \Phi &= -4\pi G a^2 \delta\rho \Rightarrow \delta\rho = -\frac{1}{4\pi G} \frac{k^2}{a^2} \Phi(\eta) = \\ &= \frac{3\Phi_{(i)}}{4\pi G} \frac{1}{u_s^2} \frac{1}{a^2 \eta^2} \cos(u_s k \eta) = \backslash \frac{1}{a^2 \eta^2} = H^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho \backslash = \\ &= 6\Phi_{(i)} \rho \cos(u_s k \eta) \Rightarrow \quad (10.163) \end{aligned}$$

$$\delta_{rad} = \frac{\delta\rho_{rad}}{\rho} = 6\Phi_{(i)} \cos(u_s k \eta) \quad (10.164)$$

Возмущения плотности релятивистского вещества под горизонтом испытывают акустические осцилляции.

Амплитуда не растет и не убывает – Джинсовской неустойчивости нет.

*Возмущение скорости релятивистской материи*

Исходим из (10.134) [доминирует УР материя  $\Rightarrow$  УР стадия]:

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi G a^2(\rho + p)v \quad (10.165)$$

$$\frac{a'^2}{a^4} = \frac{8\pi}{3}G\rho; \quad \frac{a'}{a^2} = \frac{1}{a\eta}; \quad p = \frac{1}{3}\rho \Rightarrow \quad (10.166)$$

$$a^2(p + \rho) = \frac{1}{\eta^2} \frac{1}{2\pi G} \star \quad (10.167)$$

Подставляем  $\Phi_{(i)}$  (10.155) и (10.167) в (10.134) и получаем:

$$kv = \frac{3\Phi_{(i)}}{u_s} \left[ \frac{\sin(u_s k \eta)}{(u_s k \eta)^2} - \frac{\cos(u_s k \eta)}{u_s k \eta} - \frac{1}{2} \sin(u_s k \eta) \right] \quad (10.168)$$

$v$  – потенциал скорости:  $v_i = ik_i v = \partial_i v$ ;  $kv$  – «физическая скорость».

Для мод глубоко под (акустическим) горизонтом ( $u_s k \eta \gg 1$ )

$$kv = -\frac{3\Phi_{(i)}}{2u_s} \sin(u_s k \eta) \quad (10.169)$$

– акустические осцилляции.

Ср. (10.164) и (10.169) – фазы сдвинуты на  $\pi/2$ .

**Нерелятивистское вещество (под и за горизонтом)**

(10.141) (общее уравнение для скалярного потенциала  $\Phi$ ):

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}(1 + u_s^2)\Phi' + u_s^2 k^2 \Phi = 0 \quad (10.170)$$

$p = 0$ ;  $u_s = 0 \Rightarrow$  все моды находятся за *звуковым горизонтом*.

Все, что остается от уравнения и за горизонтом, и под горизонтом:

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' = 0 \Rightarrow \Phi(\eta) = \Phi = \text{const} \quad (10.171)$$

Начальные данные – константная мода, она для потенциала и сохраняется.  $\Rightarrow$

• В линейном режиме возмущения потенциалов скалярной моды НР вещества не меняются.



Плотность (стадия ДМ - автоматически из-за однокомпонентности!)

(10.136):

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi Ga^2\delta\rho \quad (10.172)$$

$\Phi' = 0 \Rightarrow$

$$\left(k^2 + 3\frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = -4\pi Ga^2\delta\rho \Rightarrow \quad (10.173)$$

$$\begin{aligned} \delta\rho &= -\frac{1}{4\pi Ga^2} \left(k^2 + 3\frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = \\ &= \backslash a = \text{const } \eta^2 \Rightarrow a'/a = 2/\eta \backslash = \\ &= -\frac{1}{4\pi Ga^2} \left(k^2 + \frac{12}{\eta^2}\right)\Phi \quad (10.174) \end{aligned}$$

$$\delta\rho = -\frac{1}{4\pi Ga^2} \left(k^2 + \frac{12}{\eta^2}\right)\Phi \quad (10.175)$$

За горизонтом

(уже знаем:  $\delta = -2\Phi_{(i)}$ , константная мода)

$$\frac{1}{k} \gg \eta \Rightarrow k^2 \ll 1/\eta^2 \Rightarrow$$

$12/\eta^2 \propto 1/a$  доминирует  $\Rightarrow$

$\delta\rho \propto 1/a^3$ .

Но  $\rho \propto 1/a^3 \Rightarrow \delta = \delta\rho/\rho = \text{const}$

$$H = \frac{a'}{a^2} = \frac{2}{a\eta} \quad (10.176)$$

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \Rightarrow \rho = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{2}{a\eta}\right)^2 \Rightarrow \quad (10.177)$$

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho} = -2\Phi \quad (10.178)$$

$$\delta = \delta_{(i)} = -2\Phi_{(i)} = \text{const} - \text{за горизонтом} \quad (10.179)$$

Для мод за горизонтом для нерелятивистского вещества Джинсовская неустойчивость не развивается.

Под горизонтом

$$k\eta \gg 1 \Rightarrow k^2 \gg 1/\eta^2 \Rightarrow$$

$$\delta\rho = -\frac{1}{4\pi Ga^2}k^2\Phi = +\frac{1}{8\pi Ga^2}k^2\delta_{(i)} \quad (10.180)$$

(так как потенциалы нерелятивистского вещества не меняются (10.171)).

Уже видно, что  $\delta$  будет расти пропорционально  $a \Rightarrow$  джинсовская неустойчивость. Найдем, как:

$$\rho = \frac{3}{8\pi G}H^2 \quad (10.181)$$

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{3} \frac{k^2}{a^2} \frac{1}{H^2} \delta_{(i)} = \frac{1}{3} \frac{q^2}{H^2} \delta_{(i)} \quad (10.182)$$

В момент входа под горизонт  $q_{\times} = H_{\times}$ , из (10.182)

$\Rightarrow$

$$\delta_{\times} = \frac{1}{3}\delta_{(i)} \quad (10.183)$$

$$H^2 = \left(\frac{2}{a\eta}\right)^2 \Rightarrow \quad (10.184)$$

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{3} \frac{k^2}{a^2} \frac{a^2 \eta^2}{4} \delta_{(i)} = \frac{1}{12} k^2 \eta^2 \delta_{(i)} = \\ &= \left\langle \eta^2 = \frac{a}{\text{const}} \right\rangle = \frac{1}{12} k^2 \frac{a}{\text{const}} \delta_{(i)} \quad (10.185) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{12} k^2 \frac{a_{\times}(k)}{\text{const}} \delta_{(i)} = \delta_{\times} = \frac{1}{3} \delta_{(i)} \quad (10.186)$$

$$\text{const} = \frac{1}{4} k^2 a_{\times}(k) \quad (10.187)$$

$$\delta(\eta) = \frac{1}{3} \frac{a(\eta)}{a_{\times}} \delta_{(i)}, \quad k\eta \gg 1 \quad (10.188)$$

Амплитуда моды растет со временем – неустойчивость Джинса. Чем позднее мода входит под горизонт, тем больше  $a_{\times}$ , тем меньше успевает вырасти к моменту  $\eta$