

## Лекция 3

Уравнения Эйнштейна, сохранение энергии-импульса, гравитационные волны, антигравитация. Космологический принцип.

## Получение уравнений Эйнштейна из вариационного принципа

Сначала одна гравитация – без материи.

Действие должно быть общековариантной величиной.

### 1. Простейшее действие

$$S_\Lambda = -\Lambda \int_\Omega d^4x \sqrt{-g} \quad (3.1)$$

$$\delta S_\Lambda = -\Lambda \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) = \Lambda \int d^4x \frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} \quad (3.2)$$

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}; \quad \delta g = ? \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \det(\hat{g} + \delta\hat{g}) &= \det[\hat{g}(1 + \hat{g}^{-1}\delta\hat{g})] = \\ &= \det \hat{g} \cdot \det(1 + \hat{g}^{-1}\delta\hat{g}) = g(1 + \text{Tr}(\hat{g}^{-1}\delta\hat{g})) = \\ &= g(1 + g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) = g + g \cdot g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \Rightarrow \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\delta g = g \cdot g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \quad (3.5)$$

$$\delta S_\Lambda = -\frac{\Lambda}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (3.6)$$

### 2. Вклад $\sim \int d^4x \sqrt{-g} f(R)$

Хотим иметь уравнения не выше второго порядка для  $g_{\mu\nu}$ .

Проблема:  $R$  зависит от вторых производных  $g$  по  $x$ . Получим ли уравнения выше второго порядка?

---

Можно показать, что  $f(R)$ -гравитация сводится к  $R$ -гравитации плюс некоторое скалярное поле. Поэтому достаточно взять  $f(R) = R$ .

$$S_R = -K \int d^4x \sqrt{-g} R = -K \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \delta S_R &= \left. \begin{aligned} -K \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) R &= \delta S_1 \\ -K \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} &= \delta S_2 \\ -K \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \delta S_3 \end{aligned} \right| \quad (3.8) \end{aligned}$$

$K$  – некоторая константа, пока неизвестна.

---

$$\delta S_1 = -\frac{K}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (3.9)$$

$$\delta S_2 = -K \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (3.10)$$

$\delta g^{\mu\nu} = ?$

$$\delta(g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda}) = 0 \Rightarrow g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\lambda} = -g_{\nu\lambda} \delta g^{\mu\nu} \quad | g^{\rho\lambda} \quad (3.11)$$

$$\delta_{\nu}^{\rho} \delta g^{\mu\nu} = -g^{\rho\lambda} g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\lambda} \Rightarrow \quad (3.12)$$

$$\delta g^{\mu\rho} = -g^{\rho\lambda} \delta g_{\nu\lambda} g^{\mu\nu} \quad | \rho \Leftrightarrow \nu \quad (3.13)$$

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} \delta g_{\rho\lambda} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \delta S_2 &= +K \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} \delta g_{\rho\lambda} = \\ &= +K \int d^4x \sqrt{-g} R^{\rho\lambda} \delta g_{\rho\lambda} \quad (3.15) \end{aligned}$$

$$\delta S_2 = +K \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (3.16)$$

$$\delta S_3 = -K \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \quad (3.17)$$

$$R^{\mu}_{\nu\lambda\rho} = \partial_{\lambda} \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} - \partial_{\rho} \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \delta R^{\mu}_{\nu\lambda\rho} &= \partial_{\lambda} \delta \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} - \partial_{\rho} \delta \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} + \\ &+ \delta \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} \delta \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} - \delta \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} \delta \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} \quad (3.19) \end{aligned}$$

$\delta \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$  – тензор, в отличие от  $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ ! (Почему? ★)

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda}(\delta \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}) - \nabla_{\rho}(\delta \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}) &= \\ &= \partial_{\lambda}(\delta \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}) + \Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma} \delta \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} \delta \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho} \delta \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} - \\ &- \partial_{\rho}(\delta \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}) - \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} \delta \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\rho\nu} \delta \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\rho\lambda} \delta \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} = \\ &= \delta R^{\mu}_{\nu\lambda\rho} \Rightarrow \quad (3.20) \end{aligned}$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\lambda}(\delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}) - \nabla_{\nu}(\delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}) \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \delta S_3 &= -K \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\nabla_{\lambda}(\delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}) - \nabla_{\nu}(\delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})] = \\ &= -K \int d^4x \sqrt{-g} [\nabla_{\lambda}(g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}) - \nabla_{\nu}(g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})] = \\ &= -K \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_{\lambda}(g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma}) = \\ &= \left\langle \nabla_{\lambda} A^{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\lambda}(\sqrt{-g} A^{\lambda}) \quad \star \right\rangle = \\ &= -K \int_{\Omega} d^4x \partial_{\lambda} [\sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma})] = 0 \quad (3.22) \end{aligned}$$

– так как под интегралом полная дивергенция, а все вариации на границе исчезают.

$$\delta S_3 = 0 \quad (3.23)$$

$$\delta \Gamma^{\delta}_{\lambda\mu} \Big|_{\Omega} = \frac{1}{2} g^{\delta\nu} (\partial_{\lambda} \delta g_{\mu\nu} + \partial_{\mu} \delta g_{\nu\lambda} - \partial_{\nu} \delta g_{\lambda\mu}) \Big|_{\Omega} = 0(?) \quad (3.24)$$

## Поля материи, тензор энергии-импульса

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \delta S_\Lambda + \delta S_R = \\
 &= -\frac{\Lambda}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\
 &\quad - \frac{K}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R \delta g_{\mu\nu} \\
 &\quad + K \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = \\
 &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ K \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) - \frac{\Lambda}{2} g^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} = 0
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{1}{2K} \Lambda g^{\mu\nu} \tag{3.26}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{2K} \Lambda g_{\mu\nu} \tag{3.27}$$

$K$  пока неизвестна!

Тензор Эйнштейна:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{3.28}$$

$$S = S_\Lambda(g) + S_R(g) + S_m(u, g) \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \delta S_\Lambda(g)|_{\delta g} + \delta S_R(g)|_{\delta g} + \\
 &\quad + \delta S_m(u, g)|_{\delta g} + \delta S_m(u, g)|_{\delta u} = 0
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Символически:

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \frac{\delta S_\Lambda(g)}{\delta g} \delta g + \frac{\delta S_R(g)}{\delta g} \delta g + \\
 &\quad + \frac{\delta S_m(u, g)}{\delta g} \delta g + \frac{\delta S_m(u, g)}{\delta u} \delta u = 0
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Вариации  $\delta g_{\mu\nu}$  и  $\delta u$  независимы!  $\Rightarrow$

Уравнения гравитационного поля:

$$\delta S_\Lambda(g)|_{\delta g} + \delta S_R(g)|_{\delta g} + \delta S_m(u, g)|_{\delta g} = 0 \tag{3.32}$$

Уравнения полей материи:

$$\delta S_m(u, g)|_{\delta u} = 0 \tag{3.33}$$

Из вариации полного действия получаются и уравнения гравитационного поля, и уравнения полей материи!

$$S_m(u, g) = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m(u, g) \quad (3.34)$$

$$\delta S_m(u, g)|_{\delta g} = \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} T^{\mu\nu} \right) \delta g_{\mu\nu} \quad (3.35)$$

$T_{\mu\nu}$  – метрический тензор энергии-импульса полей материи (*симметричен!*).

Откуда берется такое определение?

**Пример. Скалярное поле**

$$\mathcal{L}_{sc} = \frac{1}{2} \partial^\nu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \quad (3.36)$$

$$S_{sc}(g, \varphi) = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right) \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \delta S_{sc}|_{\delta g} &= \int d^4x \left[ \delta \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{-g} \frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \right] = \\ &= \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \varphi \partial_\sigma \varphi - V(\varphi) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\rho} \delta g_{\rho\sigma} g^{\sigma\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \times \\ &\quad \left[ g^{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \partial_\sigma \varphi \partial_\rho \varphi - V(\varphi) \right) - g^{\rho\mu} g^{\nu\sigma} \partial_\rho \varphi \partial_\sigma \varphi \right] \delta g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.38)$$

(3.35)  $\Rightarrow$

$$T^{\mu\nu} = g^{\rho\mu} g^{\nu\sigma} \partial_\rho \varphi \partial_\sigma \varphi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{sc}(\varphi) \mid g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \quad (3.39)$$

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi - g_{\alpha\beta} \mathcal{L}(\varphi) \quad (3.40)$$

– обычное выражение тензора энергии-импульса скалярного поля, следующее из теоремы Нетер ★.

**Уравнения гравитационного поля с учетом материи**

$$\begin{aligned} \delta S|_{\delta g} &= \delta S_\Lambda|_{\delta g} + \delta S_R|_{\delta g} + \delta S_m|_{\delta g} = \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ K \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) - \frac{\Lambda}{2} g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} = 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{2K} (\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})} \quad (3.42)$$

**Найдем константу  $\frac{1}{2K}$  из нерелятивистского предела**

Общее уравнение геодезической:

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta = 0 \quad (3.43)$$

$$\tau = s, \quad u^\mu(s) = \frac{dx^\mu(s)}{ds} \quad (3.44)$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \quad (3.45)$$

Статический нерелятивистский предел движения частицы:

$$\frac{dx^0}{ds} \approx 1, \quad \frac{dx^i}{ds} \ll \frac{dx^0}{ds} \Rightarrow \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{00}^i = 0 \quad (3.46)$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} \quad (3.47)$$

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2}\eta^{i\sigma}(\partial_0\gamma_{0\sigma} + \partial_0\gamma_{\sigma 0} - \partial_\sigma\gamma_{00}) = +\frac{1}{2}\partial_i\gamma_{00} \quad (3.48)$$

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = -\frac{1}{2}\partial_i\gamma_{00} \cong \frac{d^2x^i}{dt^2} = -\partial_i\varphi \quad (3.49)$$

$\varphi$  - грав. потенциал  $\Rightarrow$

$$\gamma_{00} = 2\varphi \quad (3.50)$$

$$g_{00} = 1 + \gamma_{00} = 1 + 2\varphi \quad (3.51)$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\Delta g_{00} \quad (3.52)$$

Уравнение Пуассона для грав. потенциала:

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho \quad (3.53)$$

Из (3.52):

$$\Delta g_{00} = 8\pi G\rho \quad (3.54)$$

Уравнение Эйнштейна без  $\Lambda$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2K}T_{\mu\nu} \quad | \quad g^{\mu\nu} \quad (3.55)$$

$$R - \frac{1}{2}4R = \frac{1}{2K}T, \quad T \equiv g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \Rightarrow \quad (3.56)$$

$$R = -\frac{1}{2K}T \Rightarrow \quad (3.57)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2K} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) \quad (3.58)$$

Статический нерелятивистский предел:

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, 0, 0, 0) \quad (3.59)$$

$$R_{00} = \frac{1}{2K} \left( \rho - \frac{1}{2}\rho \right) = \frac{1}{4K}\rho \quad (3.60)$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\mu\Gamma_{\lambda\nu}^\lambda + \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda\Gamma_{\nu\lambda}^\rho \quad (3.61)$$

$\Gamma_{\rho\lambda}^\lambda\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda\Gamma_{\nu\lambda}^\rho$  - второй порядок малости

$$R_{00} = \partial_\lambda\Gamma_{00}^\lambda - \partial_0\Gamma_{\lambda 0}^\lambda = \text{\textbackslash статика\textbackslash} = \partial_i\Gamma_{00}^i \quad (3.62)$$

$$R_{00} = \partial_i \left( \frac{1}{2}\partial_i\gamma_{00} \right) = \frac{1}{2}\partial_i\partial_i g_{00} = \frac{1}{2}\Delta g_{00} \quad (3.63)$$

Подставляем в (3.60):

$$\Delta g_{00} = \frac{1}{2K}\rho \quad (3.64)$$

Сравнивая с (3.54):

$$\frac{1}{2K} = 8\pi G \quad (3.65)$$

Уравнение Эйнштейна с  $\Lambda$ -членом:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) \quad (3.66)$$

Из уравнения Эйнштейна следует ковариантный закон сохранения энергии-импульса:

$$\nabla^\mu \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\nu \quad (3.67)$$

$$\nabla^\mu \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 8\pi G (0 + \nabla^\mu T_{\mu\nu}) \quad (3.68)$$

$$\nabla^\mu \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \equiv 0 \Rightarrow \nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (3.69)$$

Доказательство.

Тождество Бьянки:

$$\nabla_\rho R^\lambda_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\mu R^\lambda_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\nu R^\lambda_{\sigma\rho\mu} = 0 \quad (3.70)$$

Сворачиваем по  $\lambda, \mu$ :

$$\nabla_\rho R^\lambda_{\sigma\lambda\nu} + \nabla_\lambda R^\lambda_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\nu R^\lambda_{\sigma\rho\lambda} = 0 \quad (3.71)$$

$$\nabla_\rho R_{\sigma\nu} + \nabla_\lambda R^\lambda_{\sigma\nu\rho} - \nabla_\nu R_{\sigma\rho} = 0 \mid g^{\sigma\rho} \quad (3.72)$$

$$\nabla^\rho R_{\rho\nu} + \nabla^\lambda R_{\lambda\nu} - \nabla_\nu R = 0 \star \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} \nabla^\rho R_{\rho\nu} + \nabla^\lambda R_{\lambda\nu} - \nabla^\mu (g_{\mu\nu} R) &= \\ &= 2\nabla^\mu R_{\mu\nu} - \nabla^\mu (g_{\mu\nu} R) = \\ &= 2\nabla^\mu \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.74)$$

Линеаризованные уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (3.75)$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (3.76)$$

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} (g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}) = 0 \Rightarrow \quad (3.77)$$

$$R^\sigma_{\mu\nu\lambda} (g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}) = 0 \quad (3.78)$$

Всё  $\Gamma$  и всё  $R$  – это возмущения над нулевыми значениями за счет возмущения  $h_{\mu\nu}$   
 $\Rightarrow$  можно использовать формулы первого порядка для возмущений:

$$R^\mu_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda \Gamma^\mu_{\rho\nu} - \partial_\rho \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \Gamma^\mu_{\rho\nu} &= \partial_\lambda \frac{1}{2} \eta^{\mu\sigma} (\partial_\rho h_{\nu\sigma} + \partial_\nu h_{\sigma\rho} - \partial_\sigma h_{\rho\nu}) = \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\rho h^\mu_\nu + \partial_\lambda \partial_\nu h^\mu_\rho - \partial_\lambda \partial^\mu h_{\rho\nu}) \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial^\lambda \partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial^\lambda \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial^\lambda \partial_\lambda h_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\mu h^\lambda_\lambda) \star \quad (3.81)$$

При малом преобразовании  $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$   $\star$ :

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + \partial^\mu \xi^\nu + \partial^\nu \xi^\mu \Rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \quad (3.82)$$

$R_{\mu\nu}$  калибровочно инвариантно относительно преобразования:

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \text{ (проверить } \star) \quad (3.83)$$

Гармоническая калибровка:

$$\partial_\mu h_\nu^\mu - \frac{1}{2} \partial_\nu h_\lambda^\lambda = 0 \quad (3.84)$$

обеспечена, если

$$\partial_\mu \partial^\mu \xi_\nu = - \left( \partial_\mu h_\nu^\mu - \frac{1}{2} h_\lambda^\lambda \right) \quad (3.85)$$

Тогда, из (3.81) ★:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \partial^\lambda \partial_\lambda h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\partial_0^2 - \Delta) h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} \Rightarrow \quad (3.86)$$

$$\square h_{\mu\nu} = -16\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T \right) \quad (3.87)$$

## Гравитационные волны

Если  $T_{\mu\nu} = 0$ , то

$$\square h_{\mu\nu} = 0 \quad (3.88)$$

– волновое уравнение, грав. волны в вакууме.

Замечание: если  $G = 0$ , то грав. волны все равно есть.

## Макроскопический феноменологический тензор энергии-импульса изотропной «жидкости»

1. Покоящееся вещество («идеальная жидкость») в пространстве Минковского ( $\approx$  тензор напряжений):

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ 0 & & & p \end{pmatrix} \quad (3.89)$$

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (3.90)$$

2. Вещество движется в пространстве Минковского:

$$(p + \rho) u^\mu u^\nu - p \eta^{\mu\nu} \text{ — это тензор} \quad (3.91)$$

В системе покоя материи:

$$(p + \rho) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} - p \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix} \quad (3.92)$$

Следовательно, в произвольной движущейся системе:

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho) u^\mu u^\nu - p \eta^{\mu\nu} \quad (3.93)$$

3. Вещество в произвольной системе.

В локально-Лоренцевой системе должно быть:

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho) u^\mu u^\nu - p \eta^{\mu\nu} \quad (3.94)$$

Тогда общеквариантный тензор ЭИ:

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} \quad (3.95)$$



## Статическое изотропное вещество как источник гравитации (и антигравитации)

$$\square h_{\mu\nu} = -16\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T \right) \quad (3.96)$$

Для компоненты 00:  $\backslash T = \rho - 3p \backslash$

$$\partial_0^2 h_{00} - \Delta h_{00} = -8\pi G(\rho + 3p) \Rightarrow \quad (3.97)$$

$$\Delta h_{00} = 8\pi G(\rho + 3p) \quad (3.98)$$

В нерелятивистской статике (см. (3.52)):

$$\Delta h_{00} = 2\Delta\varphi \Rightarrow \quad (3.99)$$

$$\Delta\varphi = 4\pi G(\rho + 3p) \quad (3.100)$$

Источником гравитации является не  $\rho$ , а  $\rho + 3p$ .

Если  $\rho < 0$ ,  $p = 0 \Rightarrow$  антигравитация.

Если  $\rho + 3p < 0 \Rightarrow$  тоже антигравитация!

### $\Lambda$ -член

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) \quad (3.101)$$

$$T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = \begin{pmatrix} \Lambda & & & \\ & -\Lambda & & \\ & & -\Lambda & \\ & & & -\Lambda \end{pmatrix} \quad (3.102)$$

$\rho = \Lambda$ ,  $p = -\Lambda$ , уравнение состояния:  $p = -\rho$ .

Если  $\Lambda > 0$ , то  $\rho + 3p = -2\Lambda < 0$ .

Космологическая константа  $\Lambda > 0$  приводит к антигравитации.

## Классическая космология: космологический принцип и смысл однородности и изотропии

- Предполагаем, что Вселенная заполнена идеальной (без вязкости, многокомпонентной)

*космологической жидкостью*

В сопутствующей системе

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix} = \sum_i \hat{T}_i \quad (3.103)$$

- *Космологический принцип:* Вселенная изотропна и однородна: космологическая жидкость однородна и геометрия однородна (кривизна одинакова).

*Смысл однородности.*

- Multifinger time – многонаправленное время – набор пространственно-подобных поверхностей, перенумерованных параметром  $t$ .

- Через каждое событие проходит гиперповерхность изотропии – точный смысл однородности.

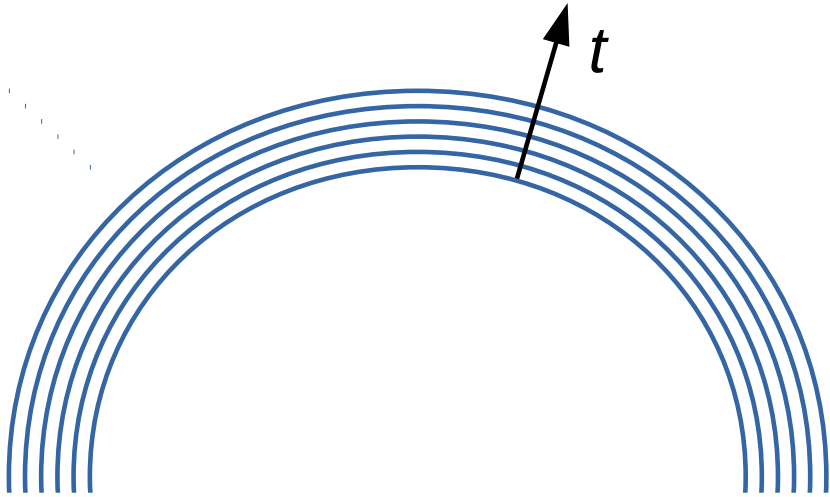
- Изотропия на пространственной гиперповерхности влечет однородность на той же поверхности.

*Доказательство:* Если бы не было однородности, на поверхности возникли бы градиенты, нарушающие изотропию.

- На гиперповерхностях однородности космологическая жидкость должна покоиться (иначе – анизотропия).  $\Rightarrow$

Если все пространство-время разложено на систему поверхностей однородности, то имеет естественную

сопутствующую космологическую систему отсчета, связанную с покоящейся космологической жидкостью.



Дополнительное чтение: Ч.Мизнер, К.Торн, Дж.Уилер. Гравитация, Т.2., §27.2 – §27.5.

Космологический принцип и наблюдение:

Однородность является обобщением результатов наблюдений, но Вселенная не стационарна, поэтому прямо однородность наблюдать невозможно!

На больших расстояниях наблюдается плотность материи, температура и т.д. отличные от локальных современных.