Лекция 3

Уравнения Эйнштейна, сохранение энергии-импульса, гравитационные волны, антигравитация. Космологический принцип.

Получение уравнений Эйнштейна из вариационного приципа

Сначала одна гравитация – без материи.

Действие должно быть общековариантной величиной.

1. Простейшее действие

$$S_\Lambda = -\Lambda \int_\Omega d^4x \sqrt{-g} \tag{3.1}$$

$$\delta S_\Lambda = -\Lambda \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) = \Lambda \int d^4x \frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} \tag{3.2}$$

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}; \quad \delta g = ? \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} \det(\hat{g} + \delta\hat{g}) &= \det[\hat{g}(1 + \hat{g}^{-1}\delta\hat{g})] = \\ &= \det\hat{g} \cdot \det(1 + \hat{g}^{-1}\delta\hat{g}) = g(1 + \mathrm{Tr}\,(\hat{g}^{-1}\delta\hat{g})) = \\ &= g(1 + g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) = g + g \cdot g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \Rightarrow \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\delta g = g \cdot g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{3.5}$$

$$\boxed{\delta S_\Lambda = -\frac{\Lambda}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}} \tag{3.6}$$

2. Вклад $\sim \int d^4x \sqrt{-g}\, f(R)$

Хотим иметь уравнения не выше второго порядка для $g_{\mu\nu}$.

Проблема: R зависит от вторых производных g по x. Получим ли уравнения выше второго порядка?

Можно показать, что $f(R)$-гравитация сводится к R-гравитации плюс некоторое скалярное поле. Поэтому достаточно взять $f(R) = R$.

$$S_R = -K \int d^4x \sqrt{-g} R = -K \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{3.7}$$

$$\delta S_R = \begin{array}{l|l} -K \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) R & = \delta S_1 \\ -K \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} & = \delta S_2 \\ -K \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} & = \delta S_3 \end{array} \tag{3.8}$$

K – некоторая константа, пока неизвестна.

$$\boxed{\delta S_1 = -\frac{K}{2} \int d^4x \sqrt{-g}\, R\, g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}} \tag{3.9}$$

$$\delta S_2 = -K \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \tag{3.10}$$

$\delta g^{\mu\nu} =?$

$$\delta(g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda}) = 0 \;\Rightarrow\; g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\lambda} = -g_{\nu\lambda}\delta g^{\mu\nu} \; |g^{\rho\lambda} \tag{3.11}$$

$$\delta^\rho_\nu \delta g^{\mu\nu} = -g^{\rho\lambda} g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\lambda} \Rightarrow \tag{3.12}$$

$$\delta g^{\mu\rho} = -g^{\rho\lambda}\delta g_{\nu\lambda} g^{\mu\nu} \mid \rho \rightleftarrows \nu \tag{3.13}$$

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} \delta g_{\rho\lambda} \tag{3.14}$$

$$\delta S_2 = +K \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} \delta g_{\rho\lambda} = \\ = +K \int d^4x \sqrt{-g} R^{\rho\lambda} \delta g_{\rho\lambda} \tag{3.15}$$

$$\boxed{\delta S_2 = +K \int d^4x \sqrt{-g}\, R^{\mu\nu}\, \delta g_{\mu\nu}} \tag{3.16}$$

$$\delta S_3 = -K \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \tag{3.17}$$

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda \Gamma^\mu_{\nu\rho} - \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \tag{3.18}$$

$$\delta R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda \delta\Gamma^\mu_{\nu\rho} - \partial_\rho \delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \\ + \delta\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \delta\Gamma^\mu_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \tag{3.19}$$

$\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ – тензор, в отличие от $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$! (Почему? ★)

$$\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\mu_{\nu\rho}) - \nabla_\rho(\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}) = \\ = \partial_\lambda(\delta\Gamma^\mu_{\nu\rho}) + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}\delta\Gamma^\mu_{\sigma\rho} - \Gamma^\sigma_{\lambda\rho}\delta\Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \\ - \partial_\rho(\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}) - \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} + \Gamma^\sigma_{\rho\nu}\delta\Gamma^\mu_{\sigma\lambda} + \Gamma^\sigma_{\rho\lambda}\delta\Gamma^\mu_{\nu\sigma} = \\ = \delta R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} \Rightarrow \tag{3.20}$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}) \tag{3.21}$$

$$\delta S_3 = -K \int d^4x \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}[\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})] = \\ = -K \int d^4x \sqrt{-g}[\nabla_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})] = \\ = -K \int d^4x \sqrt{-g}\nabla_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\sigma}) = \\ = \Big\backslash\, \nabla_\lambda A^\lambda = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\lambda(\sqrt{-g}A^\lambda) \;\bigstar \Big\backslash = \\ = -K \int_\Omega d^4x\, \partial_\lambda[\sqrt{-g}\,(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\sigma})] = 0 \tag{3.22}$$

– так как под интегралом полная дивергенция, а все вариации на границе исчезают.

$$\boxed{\delta S_3 = 0} \tag{3.23}$$

$$
\begin{aligned}
\delta S = \delta S_\Lambda + \delta S_R = \\
&= -\frac{\Lambda}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \\
&- \frac{K}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}R\delta g_{\mu\nu} \\
&+ K\int d^4x\sqrt{-g}R^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = \\
= \int d^4x\sqrt{-g}\left[K\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) - \frac{\Lambda}{2}g^{\mu\nu}\right]\delta g_{\mu\nu} = 0
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

$$
\boxed{R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{1}{2K}\Lambda g^{\mu\nu}} \tag{3.25}
$$

$$
\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2K}\Lambda g_{\mu\nu}} \tag{3.26}
$$

K пока неизвестна!

Тензор Эйнштейна:

$$
G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{3.27}
$$

Поля материи, тензор энергии-импульса

$$
S = S_\Lambda(g) + S_R(g) + S_m(u,g) \tag{3.28}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta S = \delta S_\Lambda(g)|_{\delta g} + \delta S_R(g)|_{\delta g} + \\
+ \delta S_m(u,g)|_{\delta g} + \delta S_m(u,g)|_{\delta u} = 0
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

Символически:

$$
\begin{aligned}
\delta S = \frac{\delta S_\Lambda(g)}{\delta g}\delta g + \frac{\delta S_R(g)}{\delta g}\delta g + \\
+ \frac{\delta S_m(u,g)}{\delta g}\delta g + \frac{\delta S_m(u,g)}{\delta u}\delta u = 0
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Вариации $\delta g_{\mu\nu}$ и δu независимы! $\Rightarrow$

Уравнения гравитационного поля:

$$
\delta S_\Lambda(g)|_{\delta g} + \delta S_R(g)|_{\delta g} + \delta S_m(u,g)|_{\delta g} = 0 \tag{3.31}
$$

Уравнения полей материи:

$$
\delta S_m(u,g)|_{\delta u} = 0 \tag{3.32}
$$

Из вариации полного действия получаются и уравнения гравитационного поля, и уравнения полей материи!

$$S_m(u,g) = \int d^4x\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_m(u,g) \tag{3.33}$$

$$\delta S_m(u,g)|_{\delta g} = \int d^4x\sqrt{-g}\,\left(-\frac{1}{2}T^{\mu\nu}\right)\delta g_{\mu\nu} \tag{3.34}$$

$T_{\mu\nu}$ – метрический тензор энергии-импульса полей материи (*симметричен!*).

Откуда берется такое определение?

Пример. Скалярное поле

$$\mathcal{L}_{sc} = \frac{1}{2}\partial^\nu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\phi) = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\phi) \tag{3.35}$$

$$S_{sc}(g,\phi) = \int d^4x\sqrt{-g}\,\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi)\right) \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}\delta S_{sc}|_{\delta g} &= \int d^4x\left[\delta\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi)\right) + \right.\\ &\left. +\sqrt{-g}\,\frac{1}{2}\,\delta g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\right] = \\ &= \int d^4x\left[\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\partial_\rho\varphi\partial_\sigma\varphi - V(\varphi)\right) - \right.\\ &\left. -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{\mu\rho}\delta g_{\rho\sigma}g^{\sigma\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\right] = \\ &= \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\times \\ &\left[g^{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\,g^{\sigma\rho}\partial_\sigma\varphi\partial_\rho\varphi - V(\varphi)\right) - g^{\rho\mu}g^{\nu\sigma}\partial_\rho\varphi\partial_\sigma\varphi\right]\delta g_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{3.37}$$

(3.34) $\Rightarrow$

$$T^{\mu\nu} = g^{\rho\mu}g^{\nu\sigma}\partial_\rho\varphi\partial_\sigma\varphi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}_{sc}(\varphi)\ |\ g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} \tag{3.38}$$

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi - g_{\alpha\beta}\mathcal{L}(\varphi) \tag{3.39}$$

– обычное выражение тензора энергии-импульса скалярного поля, следующее из теоремы Нетер ★.

Уравнения гравитационного поля с учетом материи

$$\begin{aligned}\delta S|_{\delta g} &= \delta S_\Lambda|_{\delta g} + \delta S_R|_{\delta g} + \delta S_m|_{\delta g} = \\ &= \int d^4x\sqrt{-g}\left[K\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) - \frac{\Lambda}{2}g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}T^{\mu\nu}\right]\delta g_{\mu\nu} = 0\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2K}(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})} \tag{3.41}$$

Найдем константу $\frac{1}{2K}$ из нерелятивистского предела

Общее уравнение геодезической:

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = 0 \tag{3.42}$$

$$\tau = s,\ u^\mu(s) = \frac{dx^\mu(s)}{ds} \tag{3.43}$$

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0 \tag{3.44}$$

Статический нерелятивистский предел движения частицы:

$$\frac{dx^0}{ds} \approx 1,\ \frac{dx^i}{ds} \ll \frac{dx^0}{ds} \ \Rightarrow\ \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{00} = 0 \tag{3.45}$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} \tag{3.46}$$

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2}\eta^{i\sigma}(\partial_0\gamma_{0\sigma} + \partial_0\gamma_{\sigma 0} - \partial_\sigma\gamma_{00}) = +\frac{1}{2}\partial_i\gamma_{00} \tag{3.47}$$

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = -\frac{1}{2}\partial_i\gamma_{00} \cong \frac{d^2x^i}{dt^2} = -\partial_i\varphi \tag{3.48}$$

φ - грав. потенциал $\Rightarrow$

$$\gamma_{00} = 2\varphi \tag{3.49}$$

$$g_{00} = 1 + \gamma_{00} = 1 + 2\varphi \tag{3.50}$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\Delta g_{00} \tag{3.51}$$

Уравнение Пуассона для грав. потенциала:

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho \tag{3.52}$$

Из (3.51):

$$\Delta g_{00} = 8\pi G\rho \tag{3.53}$$

Уравнение Эйнштейна без Λ

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2K}T_{\mu\nu} \mid g^{\mu\nu} \tag{3.54}$$

$$R - \frac{1}{2}4R = \frac{1}{2K}T, \quad T \equiv g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \ \Rightarrow \tag{3.55}$$

$$R = -\frac{1}{2K}T \ \Rightarrow \tag{3.56}$$

$$\boxed{R_{\mu\nu} = \frac{1}{2K}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)} \tag{3.57}$$

Статический нерелятивистский предел:

$$T_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(\rho, 0, 0, 0) \tag{3.58}$$

$$R_{00} = \frac{1}{2K}\left(\rho - \frac{1}{2}\rho\right) = \frac{1}{4K}\rho \tag{3.59}$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\mu\Gamma^\lambda_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\rho\lambda}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\nu\lambda} \tag{3.60}$$

$\Gamma^\lambda_{\rho\lambda}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\nu\lambda}$ – второй порядок малости

$$R_{00} = \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{00} - \partial_0\Gamma^\lambda_{\lambda 0} = \backslash\text{статика}\backslash = \partial_i\Gamma^i_{00} \tag{3.61}$$

$$R_{00} = \partial_i\left(\frac{1}{2}\partial_i\gamma_{00}\right) = \frac{1}{2}\partial_i\partial_i g_{00} = \frac{1}{2}\Delta g_{00} \tag{3.62}$$

Подставляем в (3.59):

$$\Delta g_{00} = \frac{1}{2K}\rho \tag{3.63}$$

Сравнивая с (3.53):

$$\boxed{\frac{1}{2K} = 8\pi G} \tag{3.64}$$

Уравнение Эйнштейна с Λ-членом:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})} \tag{3.65}$$

Из уравнения Эйнштейна следует ковариантный закон сохранения энергии-импульса:

$$\nabla^\mu \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\nu \tag{3.66}$$

$$\nabla^\mu\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)=8\pi G(0+\nabla^\mu T_{\mu\nu}) \tag{3.67}$$

$$\nabla^\mu\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\equiv 0 \;\Rightarrow\; \nabla^\mu T_{\mu\nu}=0 \tag{3.68}$$

Доказательство.

Тождество Бьянки:

$$\nabla_\rho R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu}+\nabla_\mu R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho}+\nabla_\nu R^\lambda{}_{\sigma\rho\mu}=0 \tag{3.69}$$

Сворачиваем по λ,μ:

$$\nabla_\rho R^\lambda{}_{\sigma\lambda\nu}+\nabla_\lambda R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho}+\nabla_\nu R^\lambda{}_{\sigma\rho\lambda}=0 \tag{3.70}$$

$$\nabla_\rho R_{\sigma\nu}+\nabla_\lambda R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho}-\nabla_\nu R_{\sigma\rho}=0 \mid g^{\sigma\rho} \tag{3.71}$$

$$\nabla^\rho R_{\rho\nu}+\nabla^\lambda R_{\lambda\nu}-\nabla_\nu R=0 \bigstar \tag{3.72}$$

$$\begin{aligned}\nabla^\rho R_{\rho\nu}+\nabla^\lambda R_{\lambda\nu}-\nabla^\mu(g_{\mu\nu}R)&=\\ =2\nabla^\mu R_{\mu\nu}-\nabla^\mu(g_{\mu\nu}R)&=\\ =2\nabla^\mu\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)&=0\end{aligned} \tag{3.73}$$

Линеаризованные уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu}=8\pi G\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \tag{3.74}$$

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu} \tag{3.75}$$

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}) \;=\; 0 \;\Rightarrow \tag{3.76}$$

$$R^\sigma{}_{\mu\nu\lambda}(g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}) \;=\; 0 \tag{3.77}$$

Всё Γ и всё R – это возмущения над нулевыми значениями за счет возмущения $h_{\mu\nu}$
$\Rightarrow$ можно использовать формулы первого порядка для возмущений:

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho}=\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\rho\nu}-\partial_\rho\Gamma^\mu_{\lambda\nu} \tag{3.78}$$

$$\begin{aligned}\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\rho\nu}&=\partial_\lambda\frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(\partial_\rho h_{\nu\sigma}+\partial_\nu h_{\sigma\rho}-\partial_\sigma h_{\rho\nu})=\\ &=\frac{1}{2}(\partial_\lambda\partial_\rho h^\mu_\nu+\partial_\lambda\partial_\nu h^\mu_\rho-\partial_\lambda\partial^\mu h_{\rho\nu})\end{aligned} \tag{3.79}$$

$$R_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(\partial^\lambda\partial_\mu h_{\nu\lambda}+\partial^\lambda\partial_\nu h_{\lambda\mu}-\partial^\lambda\partial_\lambda h_{\mu\nu}-\partial_\nu\partial_\mu h^\lambda_\lambda)\bigstar \tag{3.80}$$

При малом преобразовании $x'^\mu=x^\mu+\xi^\mu(x)$ $\bigstar$:

$$h'^{\mu\nu}=h^{\mu\nu}+\partial^\mu\xi^\nu+\partial^\nu\xi^\mu\Rightarrow h'_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}+\partial_\mu\xi_\nu+\partial_\nu\xi_\mu \tag{3.81}$$

$R_{\mu\nu}$ калибровочно инвариантно относительно преобразования:

$$h_{\mu\nu}\to h_{\mu\nu}+\partial_\mu\xi_\nu+\partial_\nu\xi_\mu \text{ (проверить } \bigstar) \tag{3.82}$$

Гармоническая калибровка:

$$\partial_\mu h^\mu_\nu - \frac{1}{2}\partial_\nu h^\lambda_\lambda = 0 \tag{3.83}$$

обеспечена, если

$$\partial_\mu \partial^\mu \xi_\nu = -\left(\partial_\mu h^\mu_\nu - \frac{1}{2}h^\lambda_\lambda\right) \tag{3.84}$$

Тогда, из (3.80) ★:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial^\lambda\partial_\lambda h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\partial_0^2 - \Delta)h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} \Rightarrow \tag{3.85}$$

$$\boxed{\Box h_{\mu\nu} = -16\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T\right)} \tag{3.86}$$

Гравитационные волны

Если $T_{\mu\nu} = 0$, то

$$\Box h_{\mu\nu} = 0 \tag{3.87}$$

– волновое уравнение, грав. волны в вакууме.

<u>Замечание</u>: если $G = 0$, то грав. волны все равно есть.

Макроскопический феноменологический тензор энергии-импульса изотропной «жидкости»

1. Покоящееся вещество («идеальная жидкость») в пространстве Минковского (≈ тензор напряжений):

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & & & 0 \\ & p & & \\ & & p & \\ 0 & & & p \end{pmatrix} \tag{3.88}$$

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0) \tag{3.89}$$

2. Вещество движется в пространстве Минковского:

$$(p+\rho)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} - \underline{\text{это тензор}} \tag{3.90}$$

В системе покоя материи:

$$(p+\rho)\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} - p\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix} \tag{3.91}$$

<u>Следовательно</u>, в произвольной движущейся системе:

$$T^{\mu\nu} = (p+\rho)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} \tag{3.92}$$

3. Вещество в произвольной системе.
В локально-Лоренцевой системе должно быть:

$$T^{\mu\nu} = (p+\rho)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} \tag{3.93}$$

Тогда общековариантный тензор ЭИ:

$$\boxed{T^{\mu\nu} = (p+\rho)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}} \tag{3.94}$$

Статическое изотропное вещество как источник гравитации (и антигравитации)

$$\Box h_{\mu\nu} = -16\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T\right) \tag{3.95}$$

Для компоненты 00: \$T = \rho - 3p$\

$$\partial_0^2 h_{00} - \Delta h_{00} = -8\pi G(\rho + 3p) \;\Rightarrow \tag{3.96}$$

$$\Delta h_{00} = 8\pi G(\rho + 3p) \tag{3.97}$$

В нерелятивистской статике (см. (3.51)):

$$\Delta h_{00} = 2\Delta\varphi \;\Rightarrow \tag{3.98}$$

$$\Delta\varphi = 4\pi G(\rho + 3p) \tag{3.99}$$

Источником гравитации является не ρ, а $\rho + 3p$.
Если $\rho < 0,\ p = 0 \;\Rightarrow$ антигравитация.
Если $\rho + 3p < 0 \;\Rightarrow$ тоже антигравитация!

<u>Λ-член</u>

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) \tag{3.100}$$

$$T^{(\Lambda)}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \Lambda & & & \\ & -\Lambda & & \\ & & -\Lambda & \\ & & & -\Lambda \end{pmatrix} \tag{3.101}$$

$\rho = \Lambda$, $p = -\Lambda$, уравнение состояния: $p = -\rho$.
Если $\Lambda > 0$, то $\rho + 3p = -2\Lambda < 0$.
Космологическая константа $\Lambda > 0$ приводит к антигравитации.

Классическая космология: космологический принцип и смысл однородности и изотропии

• Предполагаем, что Вселенная заполнена идеальной (без вязкости, многокомпонентной)
космологической жидкостью
В сопутствующей системе

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix} = \sum_i \hat{T}_i \tag{3.102}$$

• *Космологический принцип:* Вселенная изотропна и однородна: космологическая жидкость однородна и геометрия однородна (кривизна одинакова).

Смысл однородности.

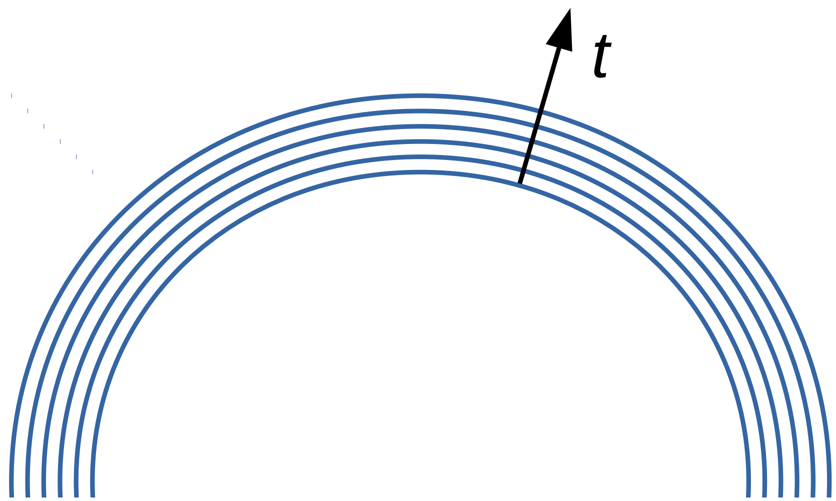
• Multifinger time – многонаправленное время – набор пространственно-подобных поверхностей, перенумерованных параметром t.

• Через каждое событие проходит гиперповерхность изоторпии – точный смысл однородности.

• Изотропия на пространственной гиперповерхности влечет однородность на той же поверхности.
Доказательство: Если бы не было однородности, на поверхности возникли бы градиенты, нарушающие изотропию.

• На гиперповерхностях однородности космологическая жидкость должна покоиться (иначе – анизотропия). $\Rightarrow$
Если все пространство-время разложено на систему поверхностей однородности, то имеет естественную

сопутствующую космологическую систему отсчета, связанную с покоящейся космологической жидкостью.



Дополнительное чтение: Ч.Мизнер, К.Торн, Дж.Уилер. Гравитация, Т.2., §27.2 – §27.5.

Космологический принцип и наблюдение:

Однородность является обобщением результатов наблюдений, но Вселенная не стационарна, поэтому прямо однордность наблюдать невозможно!

На больших расстояниях наблюдается плотность материи, температура и т.д. отличные от локальных современных.