

## Лекция 11

Скалярные моды нерелятивистской материи в однокомпонентной модели (окончание). Начальные условия за горизонтом для адиабатической моды. Гауссовы случайные поля и начальные условия для адиабатических возмущений. Стандартная космологическая модель.

Скорости, скалярные моды за и под горизонтом

$0i$ -компонента линеаризованных уравнений Эйнштейна для скалярной моды (10.99):

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi G a^2(\rho + p)v \quad (11.1)$$

$\Phi' = 0, p = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} v &= -\frac{a'}{a}\Phi \frac{1}{4\pi G a^2} \frac{1}{\rho} = \left\langle H = \frac{a'}{a^2}, a = \text{const } \eta^2 \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{8\pi}{3} G \rho = H^2 = \left(\frac{2}{a\eta}\right)^2, \frac{a'}{a} = \frac{2}{\eta} \right\rangle = \\ &= -\frac{1}{3}\Phi\eta \quad (11.2) \end{aligned}$$

$$\boxed{kv = -\frac{\Phi}{3}k\eta} \quad (11.3)$$

Моды за горизонтом  $k\eta \ll 1 \Rightarrow kv \ll \Phi$   
 Под горизонтом скорости растут  $kv \propto \eta \propto \sqrt{a}$   
 При всех масштабах, т.к.  $u_s = 0$

## Нерелятивистское вещество на $\Lambda$ -доминированной стадии

$$(8.93) : \quad a(\eta) = -\frac{1}{H_{dS}\eta}, \quad H_{dS}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_\Lambda \quad (11.4)$$

$\Lambda$  создает давление, но не создает возмущения давления!

Потенциал  $\Phi$ .

$ij$ -компонента линеаризованных уравнений Эйнштейна для скалярной моды (10.100):

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = 4\pi G a^2 \delta p_{tot} \quad (11.5)$$

$\delta p_{tot} = 0$ . Подставляем (11.4):

$$\Phi'' - \frac{3}{\eta}\Phi' + \frac{3}{\eta^2}\Phi = 0 \quad (11.6)$$

Два типа решений:

$$\Phi(\eta) = \text{const} \cdot \eta \propto \frac{1}{a} \quad (11.7)$$

$$\Phi(\eta) = \text{const} \cdot \eta^3 \propto \frac{1}{a^3} \quad (11.8)$$

Падает!

## Плотность

Ковариантное сохранение (10.101):

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi Ga^2\delta\rho \quad (11.9)$$

Подставляем (11.7), пренебрегаем (11.8), используем  $a'/a = -1/\eta$  (два последних слагаемых слева в (11.9) сокращаются)

$$k^2\Phi = -4\pi Ga^2\delta\rho \Rightarrow \delta\rho = -\frac{k^2\Phi}{4\pi Ga^2} \quad (11.10)$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \propto \frac{\Phi}{a^2} \cdot a^3 \propto \frac{1}{a^3} \times a^3 = 1 \text{ (не растут)} \quad (11.11)$$

Структуры большего масштаба, чем наблюдаются сейчас, не появятся никогда.

## Первичные скалярные возмущения в многокомпонентной Вселенной

Основные уравнения для возмущений в импульсном представлении

Линеаризованные уравнения Эйнштейна (10.17)–(10.19), переписаны с учетом нескольких компонент материи  $\lambda$ :

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi Ga^2 \sum_{\lambda} \delta\rho_{\lambda} \quad (11.12)$$

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi Ga^2 \sum_{\lambda} (\rho_{\lambda} + p_{\lambda})v_{\lambda} \quad (11.13)$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a}\right)\Phi = 4\pi Ga^2 \sum_{\lambda} \delta p_{\lambda} \quad (11.14)$$

Линеаризованный закон сохранения ТЭИ:

$$\delta\rho'_{\lambda} + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho_{\lambda} + \delta p_{\lambda}) - (\rho_{\lambda} + p_{\lambda})(k^2v_{\lambda} + 3\Phi') = 0 \quad (11.15)$$

$$[(\rho_{\lambda} + p_{\lambda})]' + 4\frac{a'}{a}(\rho_{\lambda} + p_{\lambda})v_{\lambda} + \delta p_{\lambda} + (\rho_{\lambda} + p_{\lambda})\Phi = 0 \quad (11.16)$$

Основные компоненты среды до рекомбинации:

- Барион-электрон-фотонная среда  $\lambda = B\gamma$
- Темная материя:  $\lambda = CDM$ .
- Нейтрино (лептоны):  $\lambda = L$

Обозначения и связи:

$$\delta_{\lambda} = \delta\rho_{\lambda}/\rho_{\lambda} \quad (11.17)$$

$$\delta p_{\lambda} = u_{s,\lambda}^2\delta\rho_{\lambda} \quad (11.18)$$

$$p_{\lambda} = w_{\lambda}\rho_{\lambda} \quad (11.19)$$

Уравнения (11.15) и (11.16) в терминах  $\delta_\lambda, w_\lambda, u_{s,\lambda}^2$  ★:

$$\delta'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(u_{s,\lambda}^2 - w_\lambda)\delta_\lambda - (1 + w_\lambda)k^2 v_\lambda = 3(1 + w_\lambda)\Phi' \quad (11.20)$$

$$[(1+w_\lambda)v_\lambda]' + \frac{a'}{a}(1-3w_\lambda)(1+w_\lambda)v_\lambda + u_{s,\lambda}^2\delta_\lambda = -(1+w_\lambda)\Phi \quad (11.21)$$

## Адиабатическая мода и мода постоянной кривизны

Контекст:

- Интерес представляют моды, отвечающие за анизотропию СМВ и за рост структур вещества.
- Такие моды входят под горизонт при температурах не более  $T \sim 100$  кэВ:
  - барионы и электроны нерелятивистские
  - СDM нерелятивистская
  - нейтрино ( $\sim 1$  МэВ) и СDM ( $> 0.05$  ГэВ) заморожены, не взаимодействуют с барион-электрон-фотонной плазмой

Основные параметры космической плазмы:

- $n_B, n_{CDM}, n_L$
- $T$  (или  $s \propto T^3$ )

- Вообще говоря, имеют место возмущения температуры, плотности и состава среды вместе.
- Если возмущения малы (линейный режим), то можно разделить на две линейно-независимые компоненты:
  - Возмущения плотности (температуры) – отдельно;
  - Возмущения состава – отдельно.

*Возмущения плотности – адиабатическая мода*

Вещество имеет ненулевые возмущения плотности энергии (температуры), но относительные величины, характеризующие барионную асимметрию, плотность темной материи и плотность лептонов не зависят от типа материи:

$$\delta\left(\frac{n_B}{s}\right) = \delta\left(\frac{n_{CDM}}{s}\right) = \delta\left(\frac{n_L}{s}\right) = 0 \quad (11.22)$$

*Возмущения состава – моды постоянной кривизны*

Возмущения плотности вещества отсутствуют, но:

- Неоднородность барионного числа  $\rightarrow$  барионная мода постоянной кривизны
- Неоднородность плотности темной материи  $\rightarrow$  СDM-мода постоянной кривизны
- Неоднородность лептонного числа  $\rightarrow$  лептонная мода постоянной кривизны (при прочих фоновых концентрациях)

Кривизна постоянна потому, что изменения концентраций рассматриваются на фоне постоянной полной

плотности энергии.

Общее определение: для мод постоянной кривизны за горизонтом возмущение гравитационных потенциалов отсутствует.

Наблюдения показывают: вклад мод постоянной кривизны мал.

**Адиабатическая мода за горизонтом.**

**Начальные условия для адиабатической моды – что это такое?**

За горизонтом возмущения существуют в виде константных мод  $\Phi = \Phi_{(i)} = \text{const}$ ,  $\delta\rho/\rho = \text{const}$  и общая пространственно-временная картина, соответствующая одной *адиабатической* константной моде, на эвристическом уровне соответствует набору независимых однородных вселенных несколько различающихся по времени эволюции и потому имеющих разную температуру, или начавших развиваться в разное время.

Тогда для адиабатической моды для каждой независимой компоненты среды можно записать:

$$\delta\rho_\lambda = \rho'_\lambda \delta\eta(\mathbf{x}, \eta) \equiv \rho'_\lambda \varepsilon(\mathbf{x}, \eta) \quad (11.23)$$

$$\delta p_\lambda = p'_\lambda \delta\eta(\mathbf{x}, \eta) \equiv p'_\lambda \varepsilon(\mathbf{x}, \eta) \quad (11.24)$$

Функция  $\varepsilon(\mathbf{x}, \eta)$  – одна для всех компонент  $\lambda$ , так как моды адиабатические.

В то же время, при фиксированном составе среды,  $\rho$

и  $p$  однозначно зависят от температуры  $\Rightarrow$ :

$$\delta\rho_\lambda = \frac{\partial\rho_\lambda}{\partial T} \delta T(\mathbf{x}, \eta) \quad (11.25)$$

$$\delta p_\lambda = \frac{\partial p_\lambda}{\partial T} \delta T(\mathbf{x}, \eta) \quad (11.26)$$

Но:

$$\delta T(\mathbf{x}, \eta) = \frac{\partial T}{\partial \eta} \delta\eta \equiv \frac{\partial T}{\partial \eta} \varepsilon(\mathbf{x}, \eta) \quad (11.27)$$

$\varepsilon(\mathbf{x}, \eta)$  и  $\delta T(\mathbf{x}, \eta)$  однозначно связаны, поэтому определения (11.25,11.26) и (11.23,11.24) эквивалентны.

Формулы (11.25,11.26) можно считать определением адиабатической моды.

Совместимо ли определение (11.25,11.26) или (11.23,11.24) с уравнениями (11.12)–(11.16)?

Покажем, что  $\Phi$  (а следовательно и все остальное) действительно выражается только через  $\varepsilon$  – при том, что уравнения записаны для отдельных компонент  $\lambda$ .

Используем (11.15) –  
сохранение ТЭИ, зависящее от  $\lambda$ :

$$(11.15): \delta\rho'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho_\lambda + \delta p_\lambda) - (\rho_\lambda + p_\lambda)(k^2 v_\lambda + 3\Phi') = 0 \quad (11.28)$$

За горизонтом можно считать  $k = 0$ , остается:

$$\begin{aligned} \delta\rho'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho_\lambda + \delta p_\lambda) - (\rho_\lambda + p_\lambda)3\Phi' &= \\ = \left\langle \delta\rho_\lambda = \rho'_\lambda \varepsilon; \rho'_\lambda = -3\frac{a'}{a}(\rho_\lambda + p_\lambda) \text{ ков. сохр. (8.90)} \right\rangle & \\ = -3(\rho_\lambda + p_\lambda) \left[ \left( \frac{a'}{a} \varepsilon \right)' + \Phi' \right] = 0 \Rightarrow & \quad (11.29) \end{aligned}$$

$$\boxed{\Phi' = - \left( \frac{a'}{a} \varepsilon \right)'} \quad (11.30)$$

– Зависимости от  $\lambda$  нет!

Решение (11.30):

$$\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \eta) = -\frac{a'}{a}\varepsilon(\mathbf{x}, \eta) - \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \quad (11.31)$$

$\zeta(\mathbf{x}, \mathbf{k})$  важна, т.к., в действительности, и определяет константную моду за горизонтом.

Из ковариантного сохранения (8.90)

$$\rho'_\lambda = -3\frac{a'}{a}(\rho_\lambda + p_\lambda) \Rightarrow \quad (11.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{a'}{a} &= -\frac{1}{3} \frac{\rho'_\lambda}{(\rho_\lambda + p_\lambda)} = \left\langle \rho'_\lambda = \frac{\delta\rho_\lambda}{\varepsilon} \right\rangle = \\ &= -\frac{1}{3} \frac{\delta\rho_\lambda}{\varepsilon(\rho_\lambda + p_\lambda)} \Rightarrow \quad (11.33) \end{aligned}$$

$\varepsilon$  в (11.31) сокращается!  $\Rightarrow$

$$\zeta = -\Phi + \frac{1}{3} \frac{\delta\rho_\lambda}{\rho_\lambda + p_\lambda} = -\Phi + \frac{1}{3} \frac{\delta\rho_{tot}}{\rho_{tot} + p_{tot}} \quad (11.34)$$

– так как мода адиабатическая

$$\boxed{\zeta = -\Phi + \frac{1}{3} \frac{\delta\rho_{tot}}{\rho_{tot} + p_{tot}}} \quad (11.35)$$

– не зависит от времени, в то время, как слагаемые в п.ч. могут зависеть от времени!

Выразим  $\Phi$  только через  $\zeta$ .

Решаем уравнение (11.12)

(00-компонента уравнений Эйнштейна)

$$(11.12): k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi G a^2 \sum_{\lambda} \delta\rho_{\lambda} \quad (11.36)$$

- Для константной моды  $k = 0$
- Подставляем  $\delta\rho_\lambda = \rho_\lambda\varepsilon$
- Подставляем  $\Phi$  из (11.31),  $\Phi'$  из (11.30)

- Используем  $\rho_{tot} = \frac{3}{8\pi G} \frac{a'^2}{a^4}$
- Используем  $2\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} = -8\pi G p_{tot}$

$$\boxed{2\frac{a'}{a}\varepsilon + \varepsilon' + \zeta = 0 \star} \quad (11.37)$$

Решение вариацией постоянных.

Общее решение при  $\zeta = 0 \Rightarrow \varepsilon = Ca^{-2}$

– падающая мода, должно быть отброшено  $\Rightarrow \zeta \neq 0$

Ответ:

$$\varepsilon(\eta) = -\zeta \frac{1}{a^2(\eta)} \int_0^\eta a^2(\eta) d\eta \quad (11.38)$$

Нижний предел выбран исходя из  $\varepsilon(\eta \rightarrow 0) = 0$ , так как только в этом случае  $\Phi = -\frac{a'}{a}\varepsilon - \zeta$  конечен в  $\eta = 0$ .

Уравнение (11.14) (пространственные компоненты линеаризованного уравнения Эйнштейна для скалярных мод) с (11.38) удовлетворяется автоматически  $\star$ .

Из (11.31):

$$\Phi = -\zeta \left( 1 - \frac{a'}{a^3} \int_0^\eta a^2(\eta) d\eta \right) \quad (11.39)$$

Из (11.13) ищется потенциал скорости  $v_\lambda$  (и сама скорость).  $\delta\rho_\lambda$  определяется из (11.34).

$\Rightarrow \zeta(\mathbf{k})$  полностью определяет адиабатическую моду за горизонтом.

Вместо  $\zeta$  можно использовать (и часто используется) величину

$$\mathcal{R} = -\Phi + \frac{a'}{a}v_{tot}; \quad v_{tot} \equiv \frac{\sum_\lambda(\rho_\lambda + p_\lambda)v_\lambda}{\sum_\lambda(\rho_\lambda + p_\lambda)} \quad (11.40)$$

Из (11.12), (11.13) и

$$\frac{\delta\rho_\lambda}{\rho_\lambda + p_\lambda} = \frac{\delta\rho_{tot}}{\rho_{tot} + p_{tot}} \quad (\text{адиабатичность}) \quad (11.41)$$

следует  $\star$

$$\zeta - \mathcal{R} = -\frac{k^2\Phi}{12\pi Ga^2(\rho + p)_{tot}} \rightarrow 0 \quad \text{в пределе } k \rightarrow 0 \quad (11.42)$$

За горизонтом  $\zeta$  и  $\mathcal{R}$  – одно и то же.

В качестве начального условия для адиабатических скалярных мод можно взять  $\zeta_{(i)}(\mathbf{k})$  или  $\mathcal{R}_{(i)}(\mathbf{k})$

*Начальные условия для УР вещества за горизонтом*

На РД-стадии, для главных УР мод за горизонтом (10.114) (поскольку УР моды доминируют)

$$\delta_{rad} = -2\Phi \quad (11.43)$$

$p_{tot} = \rho_{tot}/3 \Rightarrow$

$$\zeta = -\Phi + \frac{\delta\rho_{tot}}{3(\rho_{tot} + p_{tot})} = -\Phi + \frac{1}{4}\delta = -\frac{3}{2}\Phi \Rightarrow \quad (11.44)$$

$$\Phi = -\frac{2}{3}\zeta = -\frac{2}{3}\mathcal{R}; \quad \delta_{rad} = \frac{4}{3}\mathcal{R} \quad (11.45)$$

Начальные условия для НР вещества

На РД стадии, не слишком задолго до РД→МД перехода имеется нерелятивистское вещество – В и CDM. Для НР вещества

$$\rho_M \propto 1/a^3 \Rightarrow \rho'_M = -3\rho_M \frac{a'}{a} \quad (11.46)$$

Для УР вещества

$$\rho_{rad} \propto 1/a^4 \Rightarrow \rho'_{rad} = -4\rho_{rad} \frac{a'}{a} \quad (11.47)$$

Отсюда

$$\delta_M = \frac{\delta\rho_M}{\rho_M} = \frac{\rho'_M \varepsilon}{\rho_M} = -3\frac{a'}{a}\varepsilon \quad (11.48)$$

$$\delta_{rad} = \frac{\delta\rho_{rad}}{\rho_{rad}} = \frac{\rho'_{rad} \varepsilon}{\rho_{rad}} = -4\frac{a'}{a}\varepsilon \quad (11.49)$$

$$\delta_M = \frac{3}{4}\delta_{rad} = -\frac{3}{2}\Phi = \mathcal{R} \quad (11.50)$$

Эти соотношения выполняются для каждой компоненты в отдельности: В, CDM,  $\gamma$ ...

Итог:

$$\Phi(\mathbf{k}) = -\frac{2}{3}\zeta(\mathbf{k}) = -\frac{2}{3}\mathcal{R}(\mathbf{k}) \quad (11.51)$$

$$\delta_{rad}(\mathbf{k}) = \frac{4}{3}\mathcal{R}(\mathbf{k}) \quad (11.52)$$

$$\delta_M(\mathbf{k}) = \mathcal{R}(\mathbf{k}) \quad (11.53)$$

## Начальные условия для мод постоянной кривизны

Для мод постоянной кривизны  $\zeta_{tot} = \mathcal{R}_{tot} \equiv 0$  по определению.

Для каждой отдельной компоненты  $\lambda$ :

$$\zeta_\lambda = -\Phi + \frac{\delta\rho_\lambda}{3(\rho_\lambda + p_\lambda)} = -\Phi + \frac{\delta_\lambda}{3(1 + w_\lambda)} \quad (11.54)$$

не зависит от времени (см. (11.34)).

Начальные условия для мод постоянной кривизны выражаются через  $\zeta_\lambda$ :

$$S_{\lambda,\lambda'} = 3(\zeta_\lambda - \zeta_{\lambda'}) = \frac{\delta_\lambda}{1 + w_\lambda} - \frac{\delta_{\lambda'}}{1 + w_{\lambda'}} \quad (11.55)$$

Обычно  $\lambda' = \gamma$ ;  $S_\lambda \equiv S_{\lambda,\gamma}$

$$S_\lambda = \delta_\lambda - \frac{3}{4}\delta_\gamma, \quad \lambda = B, CDM \quad (11.56)$$

Для УР материи ( $\gamma$ )

$$s_\gamma = g_\gamma \frac{4\pi^2}{90} T^3 \quad (11.57)$$

$$n_\gamma = g_\gamma \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \quad (11.58)$$

$$\rho_\gamma = g_\gamma \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad (11.59)$$



$$\frac{\delta s_\gamma}{s_\gamma} = 3 \frac{\delta T}{T} \quad (11.60)$$

$$\frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} = 3 \frac{\delta T}{T} \quad (11.61)$$

$$\frac{\delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma} = 4 \frac{\delta T}{T} \quad (11.62)$$

$$(11.63)$$

$$\frac{\delta s_\gamma}{s_\gamma} = \frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} = \frac{3}{4} \delta_\gamma \quad (11.64)$$

Реальный интерес представляют:

$$\begin{aligned} \frac{\delta(n_\lambda/s_\gamma)}{n_\lambda/s_\gamma} &= \frac{\delta n_\lambda}{n_\lambda} - \frac{\delta s_\gamma}{s_\gamma} = \frac{\delta n_\lambda}{n_\lambda} - \frac{3}{4} \delta_\gamma = \\ &= \backslash \lambda - \text{HP} \backslash = \frac{\delta \rho_\lambda}{\rho_\lambda} - \frac{3}{4} \delta_\gamma = \delta_\lambda - \frac{3}{4} \delta_\gamma = S_\lambda \Rightarrow \end{aligned} \quad (11.65)$$

$$S_\lambda = \frac{\delta(n_\lambda/s)}{n_\lambda/s} - \text{«Энтропийные моды»} \quad (11.66)$$

## Гауссовы случайные поля

### Распределение Гаусса

$$F(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[ -\frac{(q - q_0)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (11.67)$$

$q_0$  – среднее,  $\sigma^2$  – дисперсия.

$$\tilde{q} = aq + b \quad (11.68)$$

– снова Гаусс,  $\tilde{q}_0 = aq_0 + b$ ,  $\tilde{\sigma} = a\sigma$ .

Для определения случайной величины нужен ансамбль событий (систем).

### Обобщение на многомерный случай

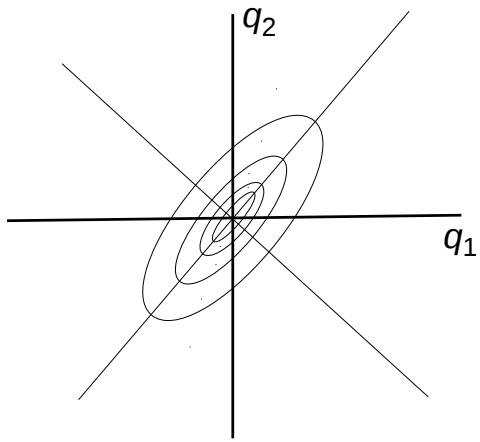
Гауссов набор случайных величин

$$F(q_1, \dots, q_N) = \mathcal{N} \exp \left[ -\frac{1}{2} q_m M_{mn} q_n + L_n q_n \right] \quad (11.69)$$

$M$  – положительно определенная симметричная матрица

$$\int F(q) d^n q = 1; \quad \mathcal{N} = (\det M)^{-1/2} (2\pi)^{-N/2} \quad (11.70)$$

$$\langle q_m \rangle = (M^{-1})_{mn} L_n \quad (11.71)$$



Если привести  $M_{mn}$  к главным осям, то получится просто произведение одномерных Гауссовых функций

Набор линейных функций от гауссовых случайных величин – тоже набор гауссовых случайных величин.

Рассматриваем случай  $L_n = 0 \Rightarrow \langle q_m \rangle = 0$

### Теорема Вика

Если  $q_n$  – гауссов набор случайных величин, то корреляторы нечетного числа величин равны нулю, а для четного числа величин

$$\langle q_p q_r q_s q_t \rangle = D_{pr} D_{st} + D_{ps} D_{rt} + D_{pt} D_{rs}; \quad \text{и т.д.} \quad (11.72)$$

где  $D_{pr} = \langle q_p q_r \rangle$  и т.д. И обратно.

Смысл усреднения – *усреднение по ансамблю*

### Случайное поле

Кубическая решетка со стороной  $L$ , шаг  $a$ .

$\varphi_i = \varphi(\mathbf{x}_i)$  – гауссов набор случайных величин  $\Rightarrow$  случайное поле на решетке.

• Гауссово случайное поле: предел  $a \rightarrow 0$

### Теорема Вика гауссовых для случайных полей

$$\langle \varphi(\mathbf{x}_1) \varphi(\mathbf{x}_2) \varphi(\mathbf{x}_3) \varphi(\mathbf{x}_4) \rangle = D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) D(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) + D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) D(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4) + D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4) D(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \quad (11.73)$$

где

$$D(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \langle \varphi(\mathbf{x}_i) \varphi(\mathbf{x}_j) \rangle \quad (11.74)$$

– двухточечные корреляторы – основной объект изучения теории случайных полей.

*Однородное и изотропное случайное поле:*

$$D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = D(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \quad (11.75)$$

Переходим к Фурье-образу

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int d^3 \mathbf{k} e^{i \mathbf{k} \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{k}); \quad \varphi^*(-\mathbf{k}) = \varphi(\mathbf{k}) \quad (11.76)$$

$$\varphi(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{x} e^{-i \mathbf{k} \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \quad (11.77)$$

Будучи интегралом случайного поля, Фурье-образ случайного поля сам является случайным полем (в пространстве  $\mathbf{k}$ ).

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\mathbf{k}) \varphi(\mathbf{k}') \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{y} e^{-i \mathbf{k} \mathbf{x}} e^{-i \mathbf{k}' \mathbf{y}} D(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = \\ &= \langle \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{z} \rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{z} e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \mathbf{x}} e^{i \mathbf{k}' \mathbf{z}} D(|\mathbf{z}|) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \int d^3 \mathbf{z} e^{i \mathbf{k}' \mathbf{z}} D(|\mathbf{z}|) = \frac{P(k)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \end{aligned} \quad (11.78)$$

так как  $P(\mathbf{k})$  зависит от  $|\mathbf{k}|$ , четна, действительна.

$$\langle \varphi(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{k}') \rangle = \frac{P(k)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (11.79)$$

$$P(k) = \int d^3\mathbf{z} e^{i\mathbf{kz}} D(|\mathbf{z}|) \quad (11.80)$$

$P(k)$  – неотрицательна:

$$\varphi[f] = \int f(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{k})d^3\mathbf{k}, \quad f^*(\mathbf{k}) = f(-\mathbf{k}) \quad (11.81)$$

Очевидно:  $\langle \varphi^2[f] \rangle \geq 0$  (усреднение по ансамблю  $\phi!$ ).

$$\begin{aligned} \langle \varphi^2[f] \rangle &= \left\langle \int f(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{k})d^3\mathbf{k} \cdot \int f(\mathbf{k}')\varphi(\mathbf{k}')d^3\mathbf{k}' \right\rangle = \\ &= \text{\( (11.79) \}} = \int d^3\mathbf{k} |f(\mathbf{k})|^2 \frac{P(k)}{(2\pi)^3} \geq 0 \Rightarrow P(k) \geq 0. \end{aligned} \quad (11.82)$$

$P(k)$  – спектр мощности случайного поля.

$$\mathcal{P}(k) = \frac{k^3 P(k)}{2\pi^2} \quad (11.83)$$

– тоже называется спектром мощности. Смысл:

$$\begin{aligned} \langle \varphi^2(\mathbf{x}) \rangle &= \int d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}' e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}} \langle \varphi(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{k}') \rangle = \\ &= 4\pi \int_0^\infty dk k^2 \frac{P(k)}{(2\pi)^3} = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}(k) = \int_0^\infty d(\ln k) \mathcal{P}(k) \end{aligned} \quad (11.84)$$

Важно: Согласно (11.79)  $P(k)$  определяется усреднением по ансамблю, но согласно (11.80)  $P(k)$  может быть приблизительно оценено усреднением по реализации, если гауссово случайное поле однородное и изотропное  $\Rightarrow$  байесовская вероятность.

## Первичные адиабатические скалярные моды и наблюдения

- Наблюдения говорят о том, что в начальных возмущениях доминируют адиабатические скалярные моды.
- Тензорные моды и скалярные моды постоянной кривизны не обнаружены, есть только ограничения сверху.

Адиабатические скалярные моды самые существенные – *стандартная космологическая модель* (СКМ) включает пока только их.

Начальные данные для адиабатической скалярной моды – константные моды за горизонтом – характеризуются функцией  $\mathcal{R}(\mathbf{k})$  ( $\zeta(\mathbf{k})$ ), через которую вычисляются относительные флуктуации плотности и возмущения гравитационного потенциала, (11.51)–(11.53).

$\mathcal{R}(\mathbf{k})$  – в СКМ однородное и изотропное случайное гауссово поле.

Однозначно описывается двухточечным коррелятором:

$$\langle \mathcal{R}(\mathbf{k})\mathcal{R}(\mathbf{k}') \rangle = \frac{P_{\mathcal{R}}(k)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (11.85)$$

Задача наблюдений – найти одну скалярную функцию  $P_{\mathcal{R}}(k)$  – спектр мощности константной моды адиабатических скалярных возмущений.

Смысл усреднения  $\langle \mathcal{R}(\mathbf{k})\mathcal{R}(\mathbf{k}') \rangle$  – усреднение по ансамблю вселенных.

Оценка  $P_{\mathcal{R}}(k)$  через двухточечный коррелятор:

$$P_{\mathcal{R}}(k) = \int d^3\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} D(|\mathbf{x}|) \quad (11.86)$$

Так как мы имеем дело только с конечным фрагментом Вселенной внутри горизонта, то оценка дает лишь конечную точность, в предположении однородности и изотропии.

Остаточная неопределенность – *космическая неопределенность*, cosmic variance

Если некоторая теория предсказывает определенную  $P_{\mathcal{R}}(k)$ , то предсказание это невозможно будет проверить с любой наперед заданной точностью. Точность измерений здесь ни при чем. См. картинку.

Вместо  $P_{\mathcal{R}}(k)$  обычно используют

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} P_{\mathcal{R}}(k) \Rightarrow \quad (11.87)$$

$$\langle \mathcal{R}^2(\mathbf{x}) \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \int_0^\infty d(\ln k) \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \quad (11.88)$$

Иногда используется обозначение:  $\Delta_{\mathcal{R}}^2(k) = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$

Простейшее предположение – плоский спектр:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \text{const} \quad (11.89)$$

– *спектр Гаррисона-Зельдовича*.

Как реальный спектр мощности отличается от спектра Гаррисона-Зельдовича?

Наблюдения показывают, что начальный спектр флуктуаций близок к плоскому.

Степенная параметризация ( $s$  – scalar):

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = A_s \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_s - 1} \quad (11.90)$$

$$\frac{k_*}{a_0} = \frac{1}{500 \text{ Мпк}} = 0.002 \text{ Мпк}^{-1} \quad (11.91)$$

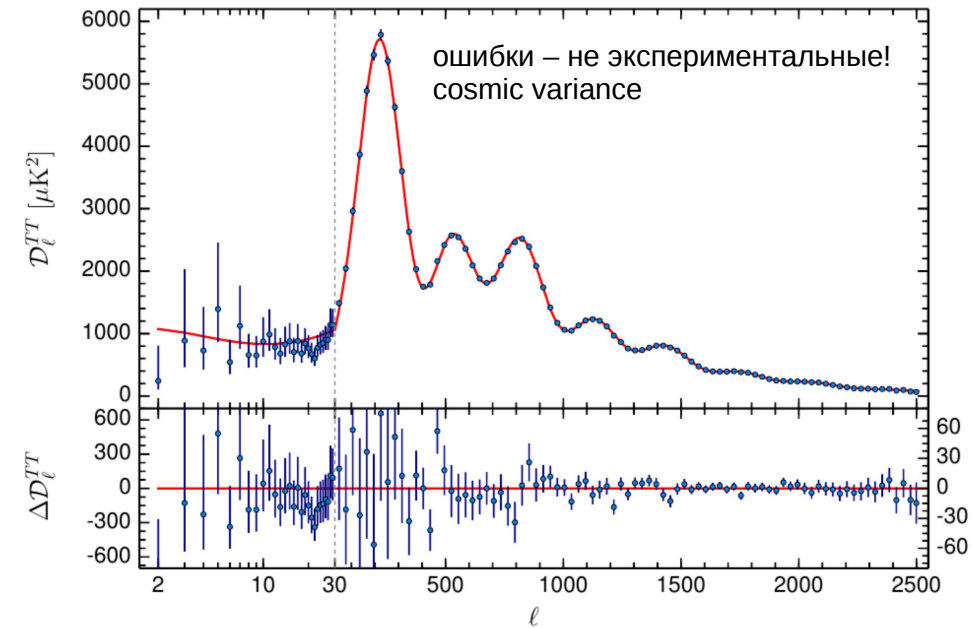
Современные значения:

$$n_s = 0.9667 \pm 0.0040 \quad (11.92)$$

$$A_{\mathcal{R}} = 2.441_{-0.092}^{+0.088} \times 10^{-9} \quad (11.93)$$

Относительная амплитуда возмущений

$$\Delta_{\mathcal{R}} = \sqrt{A_{\mathcal{R}}} \approx 4.5 \cdot 10^{-5} \quad (11.94)$$



## 6 параметров СКМ

Физическая плотность барионов	$\Omega_B h^2$	$0.02230 \pm 0.00014$
Физическая плотность темной материи	$\Omega_{CDM} h^2$	$0.1188 \pm 0.00010$
Возраст	$t_0$	$(13.799 \pm 0.021) \cdot 10^9 \text{ лет}$
Скалярный спектральный индекс	$n_s$	$0.9667 \pm 0.0040$
Амплитуда флуктуаций кривизны	$A_{\mathcal{R}}, \Delta_{\mathcal{R}}^2$	$2.441_{-0.092}^{+0.088} \times 10^{-9}$
Оптическая толщина реионизации	$\tau$	$0.066 \pm 0.012$
Приведенная постоянная Хаббла*	$h$	$0.6774 \pm 0.0046$

\*Постоянная Хаббла не входит в число 6 параметров!

## Первичные моды постоянной кривизны и наблюдения

Аналогично адиабатическим модам:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}(k) \text{ и } \mathcal{P}_{\mathcal{S}_B}(k)$$

Дополнительно, могут быть корреляции с адиабатической модой, которые задаются параметром

$$\beta = \frac{\mathcal{P}_{\mathcal{RS}}}{\sqrt{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}\mathcal{P}_{\mathcal{S}}}}, \quad \langle \mathcal{R}(\mathbf{x})\mathcal{S}(\mathbf{x}) \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\mathcal{RS}}(k) \quad (11.95)$$

Оценки для  $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}(k)$  и  $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_B}(k)$  зависят от предположений о  $\beta$ :

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}(k)}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} < 0.07, \quad \beta = 0 \quad (11.96)$$

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}(k)}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} < 0.004, \quad \beta = 1 \quad (11.97)$$

Моды постоянной кривизны малы.

В СКМ  $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}(k) = \mathcal{P}_{\mathcal{S}_B}(k) = 0$ .

## Первичные тензорные моды и наблюдения

Тензорные моды до сих пор (ноябрь 2019) не обнаружены, поэтому можно только предполагать, что они образуют гауссовы случайные поля, причем одинаковые, но независимые для разных компонент поляризации:

$$\langle h_{(i)}^{(A)}(\mathbf{k})h_{(i)}^{(B)}(\mathbf{k}') \rangle = \frac{1}{2}\delta_{AB} \frac{P_T(k)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (11.98)$$

Предполагается спектр, близкий к плоскому:

$$\mathcal{P}_T = A_T \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_T-1}, \quad n_T \approx 1 \quad (11.99)$$

$$\sum_A \langle [h_i^{(A)}(\mathbf{x})]^2 \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_T(\mathbf{k}) \quad (11.100)$$

Отношение тензорных и скалярных мод (PLANCK-2015)

$$r = \frac{A_T}{A_{\mathcal{R}}} < 0.067, \quad 95\% \quad (11.101)$$

Очень важная величина, так как позволяет различать разные модели инфляции.

В СКМ  $r = 0$ .