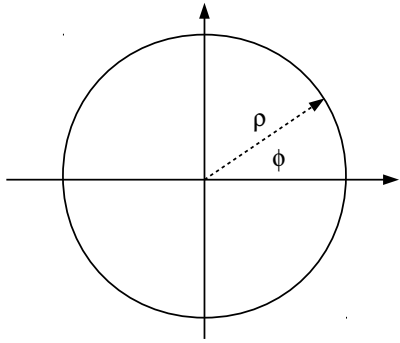


Лекция 5

Параметр замедления и темная энергия. Модель Λ CDM.
Временная шкала трех основных эпох Вселенной и функция $z(t)$.
Угловой размер, стандартные линейки и стандартные сирены.
Термодинамика Вселенной.

Площадь 2-сферы в 3-плоском пространстве, 3-сфере и 3-псевдосфере

1. Длина окружности радиуса ρ на 2-плоскости

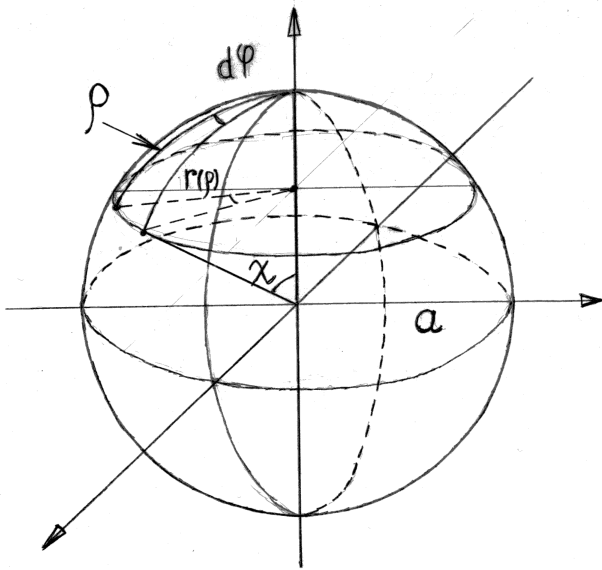


$$C_\rho = 2\pi\rho = 2\pi r(\rho) \quad (5.1)$$

$$r(\rho) = a \left(\frac{\rho}{a} \right) = a\chi(\rho) \quad (5.2)$$

a – произвольный масштабный фактор

2. Длина окружности радиуса ρ на 2-сфере

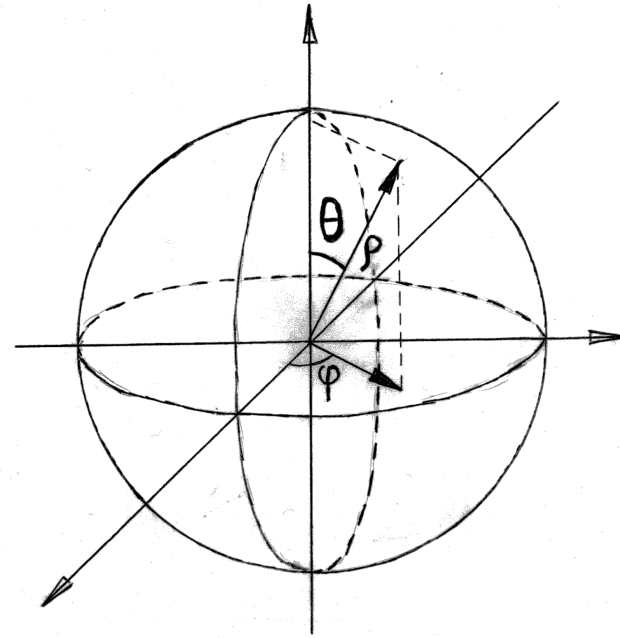


$$C_\rho = 2\pi r(\rho) \quad (5.3)$$

$$r(\rho) = a \sin \left(\frac{\rho}{a} \right) = a \sin \chi(\rho) \quad (5.4)$$

a – радиус

3. Площадь 2-сферы в 3-плоскости



$$S_\rho = 4\pi\rho^2 = 4\pi r^2(\rho) \quad (5.5)$$

$$r(\rho) = a \left(\frac{\rho}{a} \right) = a\chi(\rho) = a\chi(\rho(z)) \quad (5.6)$$

4. Площадь 2-сферы в 3-сфере

$$S_\rho = 4\pi r^2(\rho) \quad (5.7)$$

$$r(\rho) = a \sin \left(\frac{\rho}{a} \right) = a \sin \chi(\rho) = a \sin \chi(\rho(z)) \quad (5.8)$$

5. Площадь 2-сферы в 3-псевдосфере

$$S_\rho = 4\pi r^2(\rho) \quad (5.9)$$

$$r(\rho) = a \operatorname{sh} \left(\frac{\rho}{a} \right) = a \operatorname{sh} \chi(\rho) = a \operatorname{sh} \chi(\rho(z)) \quad (5.10)$$

$$S(z) = 4\pi r^2(z) \quad (5.11)$$

$$r(z) = \begin{cases} a \chi(z) & - 3\text{-плоскость} \\ a \sin \chi(z) & - 3\text{-сфера} \\ a \operatorname{sh} \chi(z) & - 3\text{-псевдосфера} \end{cases} \quad (5.12)$$

$$\chi(z) = \frac{\rho(z)}{a} \quad (5.13)$$

$\chi(z)$ – координатное расстояние от источника, излучившего при красном смещении z (момент времени t_i) до приемника на Земле.

Вычисление $r(z)$

Координатное расстояние до источника, излучившего в момент t_i , и принятого на Земле в момент t_0 :

$$x = \chi = \int_{t_i}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}; \quad \chi(z) = ? \quad (5.14)$$

$$z(t) = \frac{a_0}{a(t)} - 1 \Rightarrow dz = -\frac{a_0}{a^2} \dot{a} dt \Rightarrow dt = -\frac{a^2}{a_0 \dot{a}} dz \Rightarrow \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \chi(z) &= \int_z^0 \left(-\frac{a^2}{a_0 \dot{a}} \right) dz \frac{1}{a} = \int_0^z \frac{dz}{a_0 (\dot{a}/a)} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \right]}; \\ &\quad (\text{пренебрегли излучением}); \quad \frac{a_0}{a} = z + 1 \sqrt{\quad} = \\ &= \int_0^z \frac{dz}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} (1+z)^2}} \quad (5.16) \end{aligned}$$

Результат:

$\varkappa = 0$:

$$r(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}; \quad \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1 \quad (5.17)$$

$\varkappa = +1$:

$$r(z) = a_0 \sin \left[\int_0^z \frac{dz}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} (1+z)^2}} \right] \quad (5.18)$$

$\varkappa = -1$:

$$r(z) = a_0 \operatorname{sh} \left[\int_0^z \frac{dz}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} (1+z)^2}} \right] \quad (5.19)$$

Можно из П.Ч. исключить H_0 :

$$\begin{aligned}\Omega_{curv} &= \frac{\rho_{curv}^0}{\rho_c} = \frac{1}{\rho_c} \left(-\frac{\varkappa}{a_0^2} \right) \frac{3}{8\pi G} = \\ &= \frac{8\pi G}{3H_0^2} \left(-\frac{\varkappa}{a_0^2} \right) \frac{3}{8\pi G} = -\frac{1}{H_0^2} \frac{\varkappa}{a_0^2} \Rightarrow\end{aligned}\quad (5.20)$$

$$H_0 a_0 = 1 / \sqrt{-\varkappa \Omega_{curv}} \quad (5.21)$$

$H_0 r(z)$ – выражение $r(z)$ в естественных космологических единицах:

$\varkappa = 0$:

$$H_0 r(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}; \quad \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1 \quad (5.22)$$

$\varkappa = +1$:

$$\frac{1}{\sqrt{-\Omega_{curv}}} \sin \left[\int_0^z \frac{\sqrt{-\Omega_{curv}} dz}{\sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv}(1+z)^2}} \right] \quad (5.23)$$

$\varkappa = -1$:

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega_{curv}}} \text{sh} \left[\int_0^z \frac{\sqrt{\Omega_{curv}} dz}{\sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv}(1+z)^2}} \right] \quad (5.24)$$

Наблюдаемая яркость

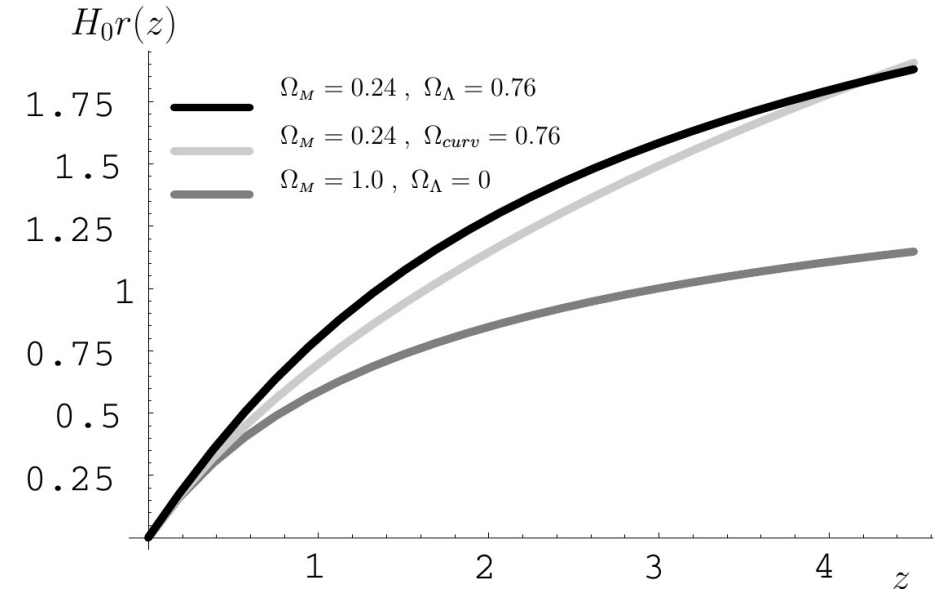
$$J(z) = \frac{L}{4\pi[(z+1)r(z)]^2} \Rightarrow \quad (5.25)$$

$$r(z) = \frac{1}{z+1} \sqrt{\frac{L}{4\pi J(z)}} \Rightarrow \quad (5.26)$$

$$H_0 r(z; \Omega_M, \Omega_\Lambda, \Omega_{curv}) = \frac{H_0}{z+1} \sqrt{\frac{L}{4\pi J(z)}} \quad (5.27)$$

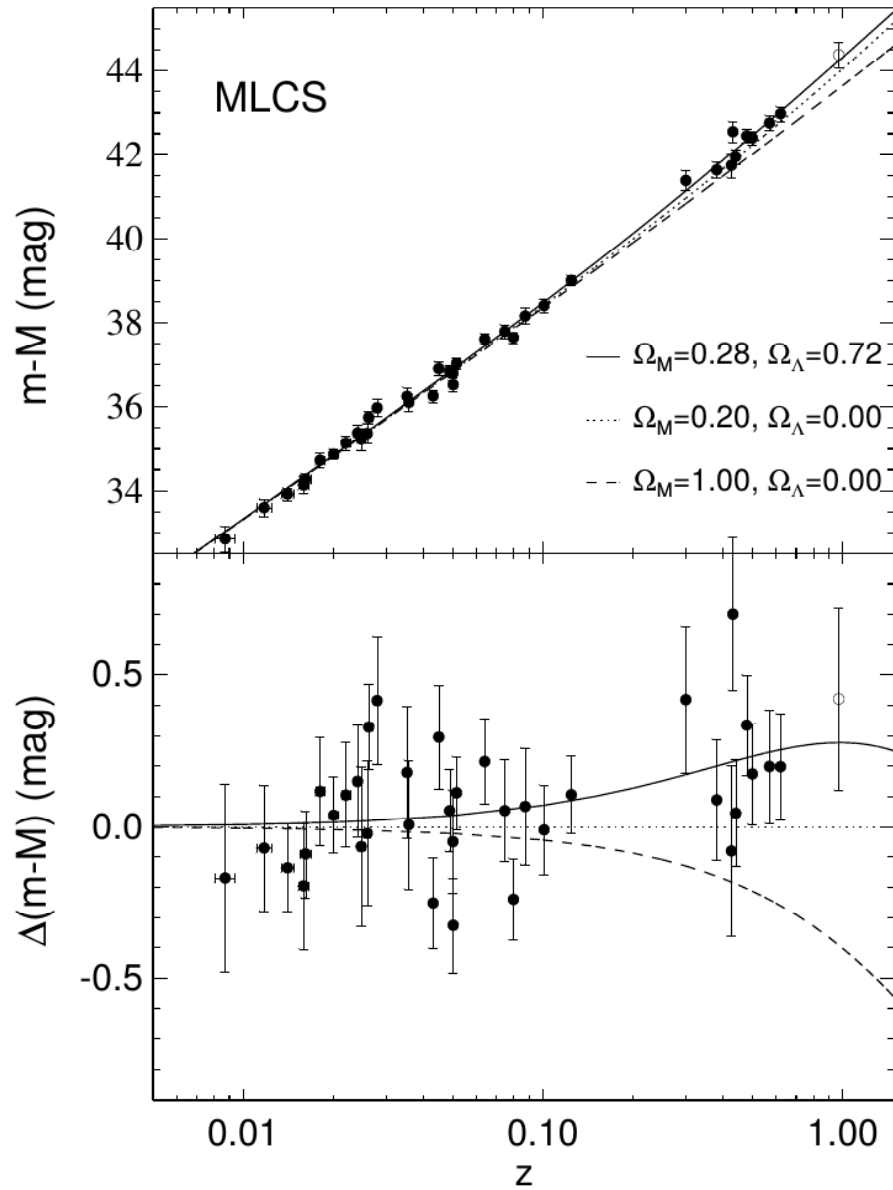
Яркостное расстояние: $D_L = (z+1)r(z)$.

Если есть «стандартная свеча» L , то $H_0 r(z)$ можно измерить.



В плоской вселенной при больших Λ при одном и том же z расстояние $r(z)$ больше – сверхновые тусклее.

Стандартные свечи – сверхновые типа Ia.



A.G. Riess et. al. The Astronomical Journal, 116 : 1009-1038, 1998.

$M - m$ – светимость (чем больше, тем тусклее)
Эксперимент не согласуется с предположением, что Вселенная заполнена только материей.

Назад к параметру замедления

Во втором порядке по z ★

$$r(z) \cong \frac{1}{H_0} \left[z - \frac{z^2}{2} \left(1 + \frac{\Omega_M - 2\Omega_\Lambda}{2} \right) \right] \quad (5.28)$$

Из (4.109):

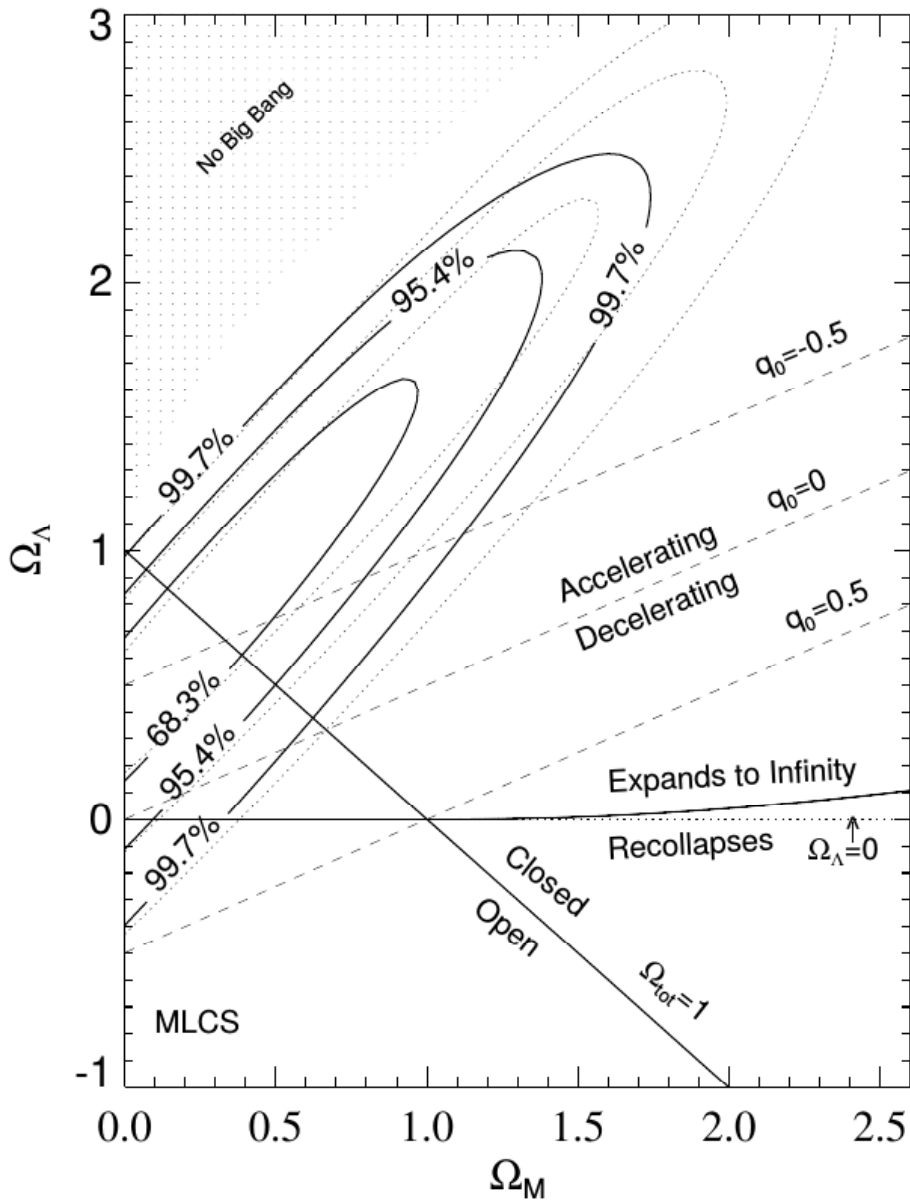
$$q_0 = \frac{\Omega_M - 2\Omega_\Lambda}{2} \Rightarrow \quad (5.29)$$

$$r(z) \cong \frac{1}{H_0} \left[z - \frac{z^2}{2} (1 + q_0) \right] \quad (5.30)$$

q_0 определяется прямо по кривой $r(z)$, $q_0 < 0 \Rightarrow$ не замедление, а ускорение!

Имеется приблизительное вырождение по Ω_M и Ω_Λ при малых $z \Rightarrow$

Чем больше z , тем точнее определение q_0 .



A.G. Riess et. al. The Astronomical Journal, 116 : 1009-1038, 1998.

Ограничения на Ω_M и Ω_Λ по одним только сверхновым Ia.

Нельзя ли найти стандартные свечи поярче?

Можно ли использовать гамма-барстеры как стандартные свечи при больших z ?

Mon. Not. R. Astron. Soc. 000, 000 (2015) Printed August 21, 2015 (MN \LaTeX style file v2.2)

Arc long gamma-ray bursts standard candles?

Hai-Nan Lin^{1*}, Xin Li^{1,2†}, Sai Wang^{2‡} and Zhe Chang^{3§}

¹Department of Physics, Chongqing University, Chongqing 401331, China

²State Key Laboratory Theoretical Physics, Institute of Theoretical Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

³Institute of High Energy Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

Accepted xxxxx; Received xxxxx; in original form xxxxx

ABSTRACT

Gamma-ray bursts (GRBs) are widely proposed as an effective probe to trace the Hubble diagram of the Universe in high redshift range. However, the calibration of GRBs is not as easy as that of type-Ia supernovae (SNe Ia). Most calibrating methods at present make use one or some of the empirical luminosity correlations, e.g., Amati relation. One of the underlying assumptions of these calibrating methods is that the empirical correlation is universal over all redshifts. In this paper, we check to what extent this assumption holds. Assuming that SNe Ia exactly trace the Hubble diagram of the Universe, we re-investigate the Amati relation for low redshift ($z < 1.4$) and high redshift ($z > 1.4$) GRBs, respectively. It is found that the Amati relation of low- z GRBs differs from that of high- z GRBs at more than 3σ confidence level. This result is insensitive to cosmological models. We should be cautious when using Amati relation to reconstruct the Hubble diagram of the Universe.

Key words: cosmological parameters – gamma-ray burst: general – supernovae: general

1 INTRODUCTION

Gamma-ray bursts (GRBs) are the most luminous explosions in the Universe since the big bang. The isotropic equivalent energy they released in a few seconds can be as large as $10^{48} \sim 10^{55}$ ergs. For recent reviews, see, e.g., Pirani (1999); Mészáros (2002, 2006); Kumar & Zhang (2015). Thanks to their extreme brightness, GRBs are detectable up to redshift $z \gtrsim 9$ (Salvaterra 2015). For example, the most distant GRB known today is GRB 090429B, whose redshift is as high as $z \approx 9.4$ (Cucchiara et al. 2011). Due to their high redshift properties, GRBs are often proposed as potential candles to trace the Hubble diagram of the Universe in the high redshift range. In fact, GRBs have already been widely used, together with other candles, such as type-Ia supernovae (SNe Ia), to constrain the cosmological parameters (Schaefer 2003; Bloom, Frail & Kulkarni 2003; Xu, Dai & Liang 2005; Firmani et al. 2003; Liang & Zhang 2003; Firmani et al. 2006a; Schaefer 2007; Liang et al. 2008; Liang & Zhang 2008; Wei & Zhang 2009; Wei 2010; Wang, Qi & Dai 2011; Capozziello et al. 2012; Wei, Wu & Melia 2013; Velten, Montiel & Carneiro 2013; Cai et al. 2013; Bretón & Montiel 2013; Chang et al. 2014; Cano & Jakobsson 2014; Cuzinatto, Medeiros & de Moraes 2014; Wang & Wang 2014; Wang, Dai & Liang 2015; Li, Ding & Zhu 2015). The consistent luminosities of SNe Ia make them the ideal distance indicators in tracing the Hubble diagram of the local (low-redshift) universe. However, since we have little knowledge about the explosion mechanism of GRBs, the GRB candle is much less standard than the SN Ia candle.

Nevertheless, one can still calibrate GRBs using the empirical luminosity correlations found in long GRBs. These correlations includes Amati relation ($E_{\text{peak}} - E_{\text{iso}}$) (Amati et al. 2002; Amati 2003, 2006), Ghirlanda relation ($E_{\text{peak}} - E_\gamma$) (Ghirlanda, Ghisellini & Lazzati 2004), Yonetoku relation ($E_{\text{peak}} - L_{\text{iso}}$) (Yonetoku et al. 2004), Liang-Zhang relation ($t_b - E_{\text{peak}} - E_{\text{iso}}$) (Liang & Zhang 2003), Firmani relation ($T_{0.45} - E_{\text{peak}} - L_{\text{iso}}$) (Firmani et al. 2006b), lag-luminosity relation

* e-mail: linhn@ihep.ac.cn.

† e-mail: lixin1981@cqu.edu.cn.

‡ e-mail: wangesai@itp.ac.cn.

§ e-mail: changz@ihep.ac.cn.

Пока есть проблемы.

arXiv:1504.07026v2 [astro-ph.HE] 20 Aug 2015

Λ CDM-модель – стандартная модель космологии

Λ CDM – Λ Cold Dark Matter

(Некоторые) параметры стандартной модели

$$\Omega_M = 0.309 \pm 0.006 \quad (\Omega_B \approx 0.05, \Omega_{CDM} \approx 0.26) \quad (5.31)$$

$$\Omega_\Lambda = 0.691 \pm 0.006 \quad (5.32)$$

$$\Omega_{rad} \lesssim 10^{-4} \quad (5.33)$$

$$|\Omega_{curv}| < 0.005 \quad (5.34)$$

$$h = 0.6780 \pm 0.0077 \quad (5.35)$$

$$w = -1.006 \pm 0.045 \quad (5.36)$$

1. Уравнение состояния темной энергии:

$$p = w\rho \quad (5.37)$$

$w = -1 \Rightarrow$ темная энергия есть в точности вакуумный космологический член. Иначе «квинтэссенция» ($w > -1$, скалярное поле) или «фантомная энергия» ($w < -1$, непонятно что \Rightarrow Большой разрыв, Big Rip).

2. Оценка Ω_{rad}

$$\Omega_\gamma = \frac{\rho_\gamma}{\rho_c} \quad (5.38)$$

«Закон Стефана-Больцмана»

$$\rho_\gamma = 2 \frac{\pi^2}{30} T_0^4, \quad T_0 = 2.725 \text{ K}^\circ \quad (5.39)$$

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G} H_0^2; \quad h = 0.68 \Rightarrow \quad (5.40)$$

$$\Omega_\gamma = 0.53 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \Omega_{rad} \simeq 10^{-4} \quad (5.41)$$

(Проверьте ★)

Основные фазы эволюции Вселенной

Уравнение Фридмана:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{rad} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \right] \quad (5.42)$$

1. При $a \rightarrow 0$ доминирует радиационный член $\Omega_{rad} \Rightarrow$
радиационно-доминированная стадия, эра доминирования ультрарелятивистской материи, «Горячий Большой взрыв»
2. Потом доминирует член $\Omega_M \Rightarrow$
эра доминирования (холодной нерелятивистской) материи, эра пылевидной материи
3. Потом доминирует член $\Omega_\Lambda \Rightarrow$
эра ДеСиттера

В первом приближении есть всего три основные фазы эволюции, связанные соответственно с $\Omega_{rad}, \Omega_M, \Omega_\Lambda$.

От радиационно-доминированной стадии к стадии холодной материи

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_c \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{rad} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \right] \quad (5.43)$$

$$\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \sim \Omega_{rad} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \Rightarrow a_{eq} \quad (5.44)$$

$$\frac{a_0}{a_{eq}} \sim \frac{\Omega_M}{\Omega_{rad}} \sim \frac{0.3}{10^{-4}} = 1 + z_{eq} \Rightarrow \quad (5.45)$$

$$\boxed{z_{eq} \approx 3 \cdot 10^3} \quad (5.46)$$

$$\frac{T_{eq}}{T_0} = 1 + z_{eq} \Rightarrow T_{eq} = T_0(1 + z_{eq}) \approx 10^4 \text{ K}^\circ \sim 1 \text{ эВ} \quad (5.47)$$

Как найти время t_{eq} ?

– Не совсем просто, через температуру.

$$\boxed{M_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = \frac{1}{\sqrt{G}} \Rightarrow G = \frac{1}{M_{Pl}^2}} \quad (5.48)$$

$$[G] = [\text{ГэВ}]^{-2} = [M]^{-2} \quad (5.49)$$

$$M_{Pl} = 1.6 \cdot 10^{19} \text{ ГэВ} = 2.2 \cdot 10^{-5} \text{ Г} \star \quad (5.50)$$

«Закон Стефана-Больцмана» для фотонов и нейтрино (других УР частиц нет):

$$\rho_{rad} = \frac{\pi^2}{30}g_*T^4 \quad (5.51)$$

g_* – эффективное число степеней свободы (стат. вес) фотонов и нейтрино:

$$g_* = 2 + \frac{21}{4} \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} \approx 3.36 \text{ (получим потом)} \quad (5.52)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \quad (5.53)$$

$$T = (1 + z)T_0 \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} H_{eq} &= \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\rho} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G2\rho_{rad}} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G2\frac{\pi^2}{30}g_*T^4} = \\ &= T^2\sqrt{2}\sqrt{\frac{8\pi^3}{90}g_*\frac{1}{M_{Pl}^2}} = \frac{T^2}{M_{Pl}^*}\sqrt{2} = \frac{[(1 + z_{eq})T_0]^2}{M_{Pl}^*}\sqrt{2} \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$\boxed{M_{Pl}^* = \frac{M_{Pl}}{\sqrt{\frac{8\pi^3}{90}g_*}}} \quad (5.56)$$

На радиационно-доминированной стадии

$$t_{eq} = \frac{1}{2H_{eq}} = \frac{1}{2} \frac{M_{Pl}^*}{[(1 + z_{eq})T_0]^2} \sqrt{2} \approx 120000 \text{ лет} \quad (5.57)$$

От доминирования материи к фазе ДеСиттера – от замедления к ускорению

Ищем точку перегиба $a(t)$:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_c \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_\Lambda \right] \quad (5.58)$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_c \left(\Omega_M \frac{a_0^3}{a} + \Omega_\Lambda a^2 \right) \quad (5.59)$$

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi}{3}G\rho_c \left(-\Omega_M \frac{a_0^3}{a^2} \dot{a} + 2a\dot{a}\Omega_\Lambda \right) \quad (5.60)$$

$$\ddot{a} = 0 \Rightarrow \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 = \frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_M} \quad (5.61)$$

$$z = \frac{a_0}{a} - 1 = \sqrt[3]{\frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_M}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 0.69}{0.31}} - 1 = 0.65 \quad (5.62)$$

$t = ?$

Решение для $\Omega_M, \Omega_\Lambda \neq 0, \Omega_{curv} = \Omega_{rad} = 0$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_\Lambda \right], \quad \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1 \quad (5.63)$$

Проверяется подстановкой:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} \left[\text{sh} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 t \right) \right]^{2/3} \quad (5.64)$$

$$\frac{a_0}{a(t)} = z + 1 = \frac{(\Omega_\Lambda/\Omega_M)^{1/3}}{\left[\text{sh} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 t \right) \right]^{2/3}} \Rightarrow \quad (5.65)$$

$$t = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \text{arsh} \left[\left(\frac{1}{z+1} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}} \right] \quad (5.66)$$

Возраст Вселенной

$$z = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \text{arsh} \left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}} \right) \quad (5.67)$$

$$\Omega_\Lambda = 0.691, \quad \Omega_M = 0.309, \quad h = 0.678 \Rightarrow$$

$$t_0 = 13.80 \cdot 10^9 \text{ лет} \quad (5.68)$$

Возраст перехода от замедления к ускорению

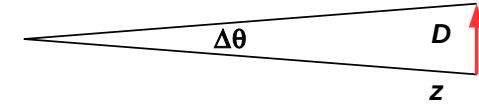
$$z + 1 = 1.65 \Rightarrow t = 7.61 \cdot 10^9 \text{ лет} \quad (5.69)$$

$$t_0 - t = 6.2 \cdot 10^9 \text{ лет} \quad (5.70)$$

Красное смещение - возраст

z	t	t0-t
0.01	13.66	0.1433
0.01259	13.62	0.18
0.01585	13.57	0.2261
0.01995	13.51	0.2838
0.02512	13.44	0.3559
0.03162	13.35	0.446
0.03981	13.24	0.5582
0.05012	13.1	0.6975
0.0631	12.93	0.8701
0.07943	12.72	1.083
0.1	12.46	1.344
0.1259	12.14	1.661
0.1585	11.75	2.045
0.1995	11.29	2.504
0.2512	10.75	3.047
0.3162	10.12	3.677
0.3981	9.401	4.397
0.5012	8.597	5.201
0.631	7.724	6.075
0.7943	6.803	6.996
1	5.865	7.934
1.259	4.946	8.853
1.585	4.08	9.719
1.995	3.294	10.5
2.512	2.608	11.19
3.162	2.028	11.77
3.981	1.552	12.25
5.012	1.172	12.63
6.31	0.875	12.92
7.943	0.6468	13.15
10	0.4743	13.32

Тест углового размера и стандартные линейки



Стандартные линейки $\Rightarrow \Delta\theta(z) \rightarrow \Omega_M, \Omega_\Lambda, \Omega_{curv}$.
 Стандартные линейки существуют – акустические пики.

1. Плоское пространство

$$ds^2 = a^2(t)(d\eta^2 - dx^2) \quad (5.71)$$

В конформных координатах все как в плоской статике:

$$\Delta\theta = \frac{D_{conf}}{x(z)} \quad (5.72)$$

$$D = D_{conf}a(t) \Rightarrow D_{conf} = \frac{D}{a(t)} \quad (5.73)$$

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{D}{a(t)x(z)} = \frac{a_0}{a(t)} \frac{D}{a_0x(z)} = \frac{z+1}{x(z)} \frac{D}{a_0} = \\ &= \frac{1}{a_0x(z)} = r(z), \quad (5.17) \Rightarrow DH_0 \frac{z+1}{\int_0^z [\Omega_M(z+1)^3 + \Omega_\Lambda]^{-1/2} dz} \end{aligned} \quad (5.74)$$

$$\Delta\theta(z) = DH_0 \frac{z+1}{\int_0^z [\Omega_M(z+1)^3 + \Omega_\Lambda]^{-1/2} dz} \quad (5.75)$$

Как себя ведет $\Delta\theta(z)$?

- $z \ll 1$

$$\Delta\theta(z) \cong DH_0 \sqrt{\Omega_M + \Omega_\Lambda} \frac{1}{z} = DH_0 \frac{1}{rH_0} = \frac{D}{r} \quad (5.76)$$

– убывает, как и ожидается.

- $z \gg 1$

$$\begin{aligned} \int_0^z [\Omega_M(z+1)^3 + \Omega_\Lambda]^{-1/2} dz &\cong \int_0^z [\Omega_M(z+1)^3]^{-1/2} dz = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\Omega_M}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{z+1}} \right) \Rightarrow \quad (5.77) \end{aligned}$$

$$\Delta\theta(z) \cong 2DH_0 \sqrt{\Omega_M} \frac{z+1}{1 - \frac{1}{\sqrt{z+1}}} \approx 2DH_0 \sqrt{\Omega_M} (z+1) \quad (5.78)$$

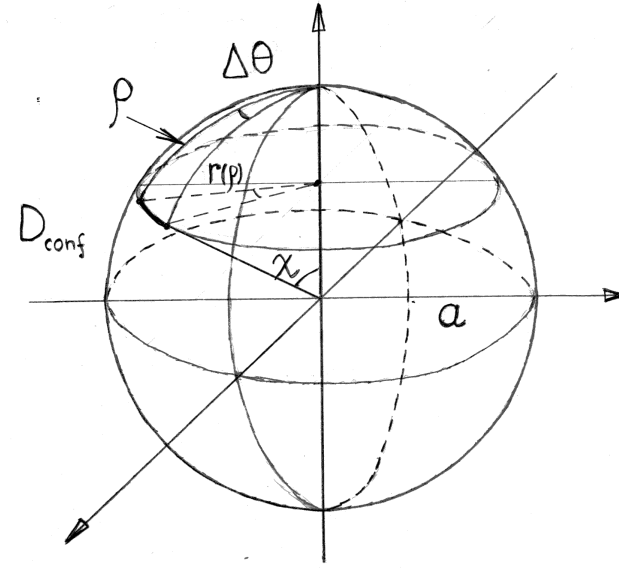
1) Угловой размер растет с ростом расстояния!

- При $z \sim 1.5$ угловой размер достигает минимума (ищется численно).

2) Если известны D и z , то определяется Ω_M !

$$\Omega_M = \left(\frac{\Delta\theta(z)}{2DH_0(z+1)} \right)^2 \quad (5.79)$$

2. 3-сфера



$$D_{conf} = \frac{D}{a} = \frac{a \sin \chi \Delta\theta}{a} = \sin \chi \Delta\theta \Rightarrow \quad (5.80)$$

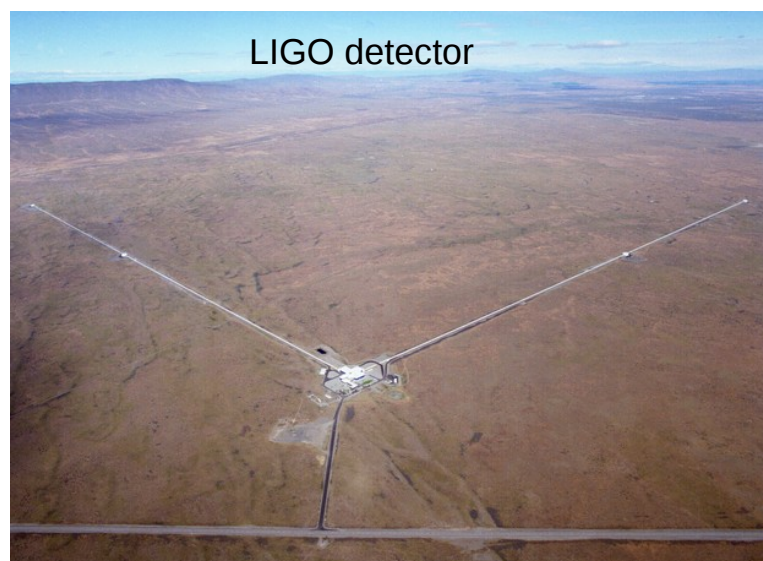
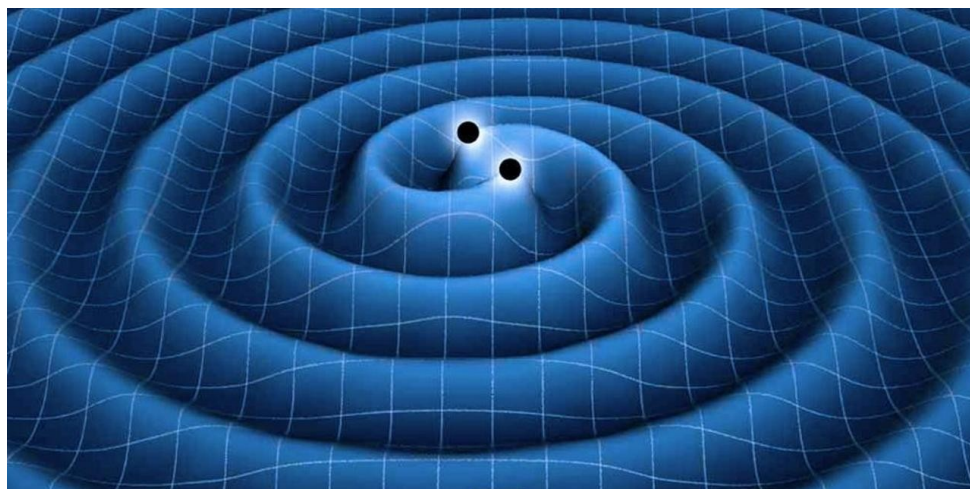
$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{D_{conf}}{\sin \chi} = \frac{D}{a(t) \sin \chi} = \frac{a_0}{a(t)} \frac{D}{a_0 \sin \chi} = \frac{D(z+1)}{a_0 \sin \chi} = \\ &= \frac{D}{a_0 \sin \left[\int_0^z \frac{dz}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv}(1+z)^2}} \right]} \quad (5.81) \end{aligned}$$

3. 3-псевдосфера

$$\Delta\theta = \frac{D}{a_0 \operatorname{sh} \left[\int_0^z \frac{dz}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv}(1+z)^2}} \right]} \quad (5.82)$$

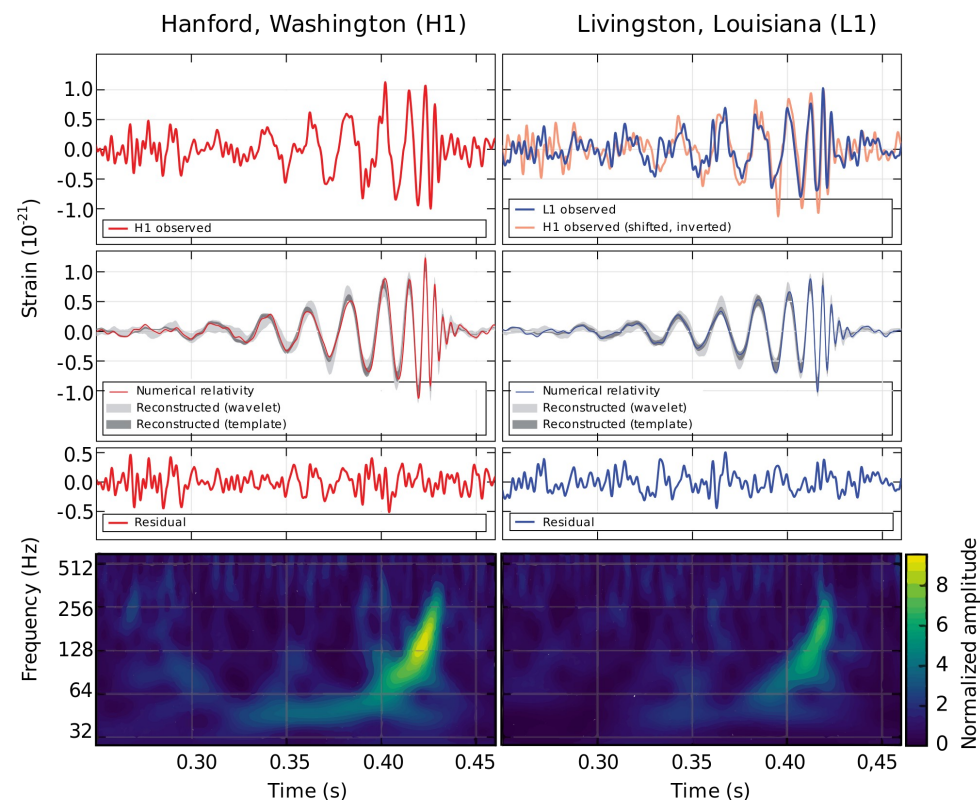
$$\Delta\theta = \Delta\theta(z, D, \Omega_M, \Omega_\Lambda, \Omega_{curv}) \quad (5.83)$$

«Стандартные сирены» - гравитационные сигналы от слияния черных дыр и нейтронных звезд (gravitational wave standard sirens)



Регистрируются наземными детекторами гравитационных волн с расстояний $z \sim 0.1$.

Увеличение чувствительности антенн в будущем увеличит расстояние.



По профилю гравитационного всплеска с хорошей точностью восстанавливаются массы черных дыр и их моменты \Rightarrow абсолютная энергетика всплеска.

По замедлению колебаний восстанавливается z .

Абсолютная энергетика всплеска + z + наблюдаемая амплитуда = «стандартная сирена».

Термодинамика (горячей) Вселенной

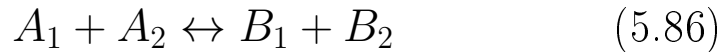
Химический потенциал в равновесии

$$dE = -PdV + TdS + \sum_i \mu_i dN_i = 0 \quad (5.84)$$

Термодинамическое **И** химическое равновесие:
Превращение частиц много быстрее расширения Вселенной:

$$dV = dS = 0 \Rightarrow \sum_i \mu_i dN_i = 0 \quad (5.85)$$

Пример реакции в равновесии:



Предположим малый выход из химического равновесия, $dN \neq 0$:

$$\begin{aligned} \mu_{A_1} dN + \mu_{A_2} dN - \mu_{B_1} dN - \mu_{B_2} dN &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu_{A_1} + \mu_{A_2} &= \mu_{B_1} + \mu_{B_2} \end{aligned} \quad (5.87)$$

В общем случае:

$$\begin{aligned} A_1 + \dots + A_n \leftrightarrow B_1 + \dots + B_m \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu_{A_1} + \dots + \mu_{A_n} &= \mu_{B_1} + \dots + \mu_{B_m} \end{aligned} \quad (5.88)$$

Полезные следствия:

$$e + e \leftrightarrow e + e + \gamma + \dots + \gamma \Rightarrow \mu_\gamma = 0 \quad (5.89)$$

$$b + \bar{b} = 2\gamma \Rightarrow \mu_b = -\mu_{\bar{b}} \quad (5.90)$$

Распределения Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна в импульсном представлении (идеальные газы)

Обычная запись распределений ФД и БЭ идеального газа:

$$N_i = \frac{g_i}{e^{(E_i - \mu)/T} \pm 1}; \quad \begin{array}{l} +\text{ФД} \\ -\text{БЭ} \end{array} \quad (5.91)$$

- N_i – число частиц в энергетическом ящике номер i с энергией E_i
- g_i – число минимальных ячеек фазового пространства одной частицы в этом ящике (стат. вес ящика).

Рассматриваем объем V с однородным газом частиц. Энергетический ящик $d\Gamma = d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{p}$ вблизи энергии E .

Тогда

$$g_i = \frac{d\Gamma}{a} g \quad (5.92)$$

- a – объем минимальной ячейки фазового пространства частицы
- g – статистический вес (количество) внутренних состояний частицы (спин, спиральность)

$$dN = \frac{g}{a} \frac{d\Gamma}{e^{(E - \mu)/T} \pm 1} \quad (5.93)$$

Из кв.мех.:

$$a = h^3 = (2\pi)^3 \hbar^3 \equiv (2\pi)^3 \quad (5.94)$$

Распределение однородно внутри $V \Rightarrow$ нет зависимости от координат и в $d\Gamma$ можно включить весь V :

$$d\Gamma = V d^3\mathbf{p} \Rightarrow \quad (5.95)$$

$$dN = \frac{1}{(2\pi)^3} g \frac{V d^3 \mathbf{p}}{e^{[E(\mathbf{p})-\mu]/T} \pm 1} \quad (5.96)$$

Можно переписать как плотность распределения импульса:

$$\frac{1}{V} \frac{dN}{d^3 \mathbf{p}} \equiv f(\mathbf{p}) = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{[E(\mathbf{p})-\mu]/T} \pm 1} = f(E(\mathbf{p})) \quad (5.97)$$

Нормировка:

$$\int f(\mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} = n - \text{число частиц в 1 объеме} \quad (5.98)$$

Как выражаются n, ρ, p через $f(E)$?

Для частиц типа $i \rightarrow f_i(\mathbf{p})$

$$E_i(\mathbf{p}) = \sqrt{p_i^2 + m_i^2} \Rightarrow E_i dE_i = p_i dp_i \quad (5.99)$$

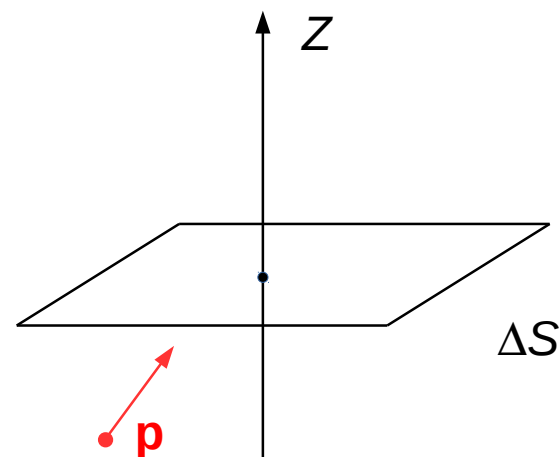
Интегрируя по углам – плотность числа частиц через распределение по энергии:

$$\begin{aligned} n_i &= \int f_i(\mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} = \int f_i(p) 4\pi p^2 dp = \\ &= 4\pi \int f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E dE \quad (5.100) \end{aligned}$$

Плотность энергии

$$\rho_i = \int f_i(\mathbf{p}) E(\mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} = 4\pi \int f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E^2 dE \quad (5.101)$$

Давление



Количество частиц с импульсом в $d^3 \mathbf{p}$ около \mathbf{p} , налетающих с одной стороны за Δt :

$$\Delta n_i = v_z f_i(\mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} \Delta S \Delta t \quad (5.102)$$

$$p_z = \frac{mv_z}{\sqrt{1-v^2}}; \quad E = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}; \Rightarrow v_z = \frac{p_z}{E} \quad (5.103)$$

От одной частицы площадка получает импульс $\Delta p_z = 2p_z \Rightarrow$

Давление есть переданный импульс через единицу площади в единицу времени (p_i слева - давление!):

$$\begin{aligned} p_i &= \int_{p_z > 0} 2p_z \frac{p_z}{E} f_i(\mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} = \left\langle p_z^2 = \frac{1}{3} p^2, 2 \rightarrow 1 \right\rangle = \\ &= \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{E(p)} f_i(p) = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty f_i(E) (E^2 - m_i^2)^{3/2} dE \quad (5.104) \end{aligned}$$

Основные формулы:

$$f(E) = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1} \quad (5.105)$$

$$n_i = 4\pi \int_0^\infty f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E dE \quad (5.106)$$

$$\rho_i = 4\pi \int_0^\infty f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E^2 dE \quad (5.107)$$

$$p_i = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty f_i(E) (E^2 - m_i^2)^{3/2} dE \quad (5.108)$$

Ультррелятивистские частицы: $T \gg m_i, \mu_i = 0$

Из (5.107):

$$\begin{aligned} \rho_i &= 4\pi \int_0^\infty \frac{g_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{E/T} \pm 1} E^3 dE = \\ &= \frac{g_i}{2\pi^2} T^4 \int_0^\infty \frac{z^3}{e^z \pm 1} dz \quad (5.109) \end{aligned}$$

Табличные интегралы:

$$\int_0^\infty \frac{z^{2n-1}}{e^z + 1} dz = \frac{2^{2n-1} - 1}{2n} \pi^{2n} B_n \quad (5.110)$$

$$\int_0^\infty \frac{z^{2n-1}}{e^z - 1} dz = \frac{(2\pi)^{2n}}{4n} B_n \quad (5.111)$$

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42} \quad (5.112)$$

$n = 2 \Rightarrow$

$$\int_0^\infty \frac{z^3}{e^z + 1} dz = \frac{7}{4} \pi^4 \frac{1}{30} \quad (5.113)$$

$$\int_0^\infty \frac{z^3}{e^z - 1} dz = 2\pi^4 \frac{1}{30} \quad (5.114)$$

Объемная формула Стефана-Больцмана для УР-частиц типа i :

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{7}{8} g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 & \text{— Ферми-Дирак} \\ g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 & \text{— Бозе-Эйнштейн} \end{cases} \quad (5.115)$$