Лекция 4

Решения уравнений изотропной однородной космологии. Зоопарк космологических моделей. Стандартные свечи.

Полная система уравнений изотропной космологии:

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G(\rho+\Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2} \quad \text{(уравнение Фридмана)} \tag{4.1}$$

$$\dot\rho + 3\frac{\dot a}{a}(\rho + p) = 0 \quad \text{(ковариантное сохранение)} \tag{4.2}$$

$$p = p(\rho) \quad \text{(уравнение состояния)} \tag{4.3}$$

Решения уравнений изотропной однородной космологии

Решения для $\varkappa = 0$, $\Lambda = 0$

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \tag{4.4}$$

Нерелятивистская пыль
Уравнение состояния:

$$p = 0 \tag{4.5}$$

Из (4.2):

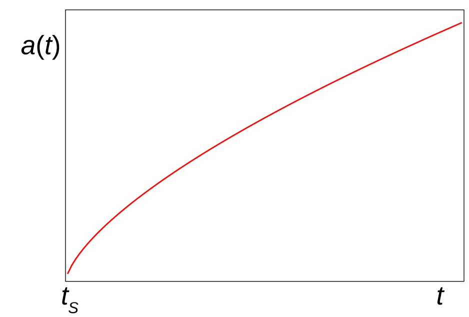
$$\frac{\dot\rho}{\rho} = -3\frac{\dot a}{a} \;\Rightarrow\; d(\ln\rho) = d(\ln a^{-3}) \;\Rightarrow \tag{4.6}$$

$$\rho = \frac{\mathrm{const}}{a^3} \quad \text{(сохранение числа частиц)} \tag{4.7}$$

Из (4.4):

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{\mathrm{const}}{a^3} \;\Rightarrow\; a(t) = \mathrm{const}'(t-t_s)^{2/3} \tag{4.8}$$

При $t = t_s$ $a(t) = 0$ – сингулярность.



Будем полагать $t_s = 0$:

$$a(t) = \text{const}\, t^{2/3} \tag{4.9}$$

$$\rho = \frac{\text{const}}{t^2} \tag{4.10}$$

В момент сингулярности пространство было плоским и *бесконечным*, плотность была бесконечной.
Постоянную в (4.10) можно найти:

$$\frac{\dot a}{a} = \frac{\text{const}(2/3)t^{-1/2}}{\text{const}\, t^{2/3}} = \frac{2}{3}\frac{1}{t} \Rightarrow \rho = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{1}{6\pi G}\frac{1}{t^2} \tag{4.11}$$

Постоянная Хаббла:

$$H(t) = \frac{\dot a}{a} \tag{4.12}$$

$1/H$ во всех моделях порядка возраста Вселенной (от сингулярности!)
В частности, в модели пыли

$$H(t) = \frac{2}{3}\frac{1}{t}, \quad t = \frac{2}{3}\frac{1}{H(t)} \tag{4.13}$$

Современное (t_0) значение постоянной Хаббла:

$$\boxed{H_0 \equiv H(t_0) = h \times 100 \frac{\text{км/с}}{\text{Мпк}}, \quad h = 0.6774 \pm 0.0046} \tag{4.14}$$

$$t_0 \approx 3.0 \cdot 10^{17}\, sec \approx 9.6 \cdot 10^9\, years \bigstar \tag{4.15}$$

Космологический горизонт

Конформное время.

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j = a^2(t)(d\eta^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j) \tag{4.16}$$

– конформно-плоская метрика.

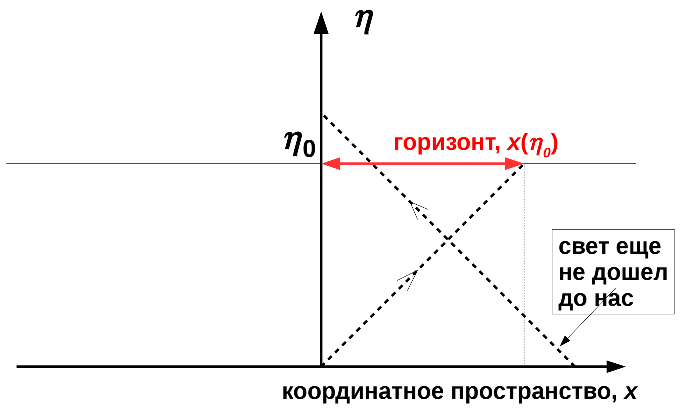
$$d\eta = dt/a(t) \tag{4.17}$$

Для плоской модели с пылью:

$$\eta(t) = \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^t \frac{dt}{\text{const}\cdot t^{2/3}} = \frac{3}{\text{const}}\cdot t^{1/3} \tag{4.18}$$

Светоподобные геодезические: $ds^2 = 0 \Rightarrow$

$$d\eta^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j = dx^2 \ \Rightarrow \ d\eta = |dx| \tag{4.19}$$



$$x(\eta_0) = \eta_0 = \eta(t_0) \tag{4.20}$$

$$l_H(t_0) = a(t_0)x(\eta_0) = a(t_0)\eta(t_0) =$$
$$= a(t_0)\int_0^{t_0}\frac{dt}{a(t)} = \text{const}\cdot t_0^{2/3}\int_0^{t_0}\frac{dt}{\text{const}\cdot t^{2/3}} = 3t_0 =$$
$$= 28.8\cdot 10^9\,\text{св. лет} \quad (4.21)$$

($ct_0 \sim 9.6\cdot 10^9$ св. лет – много меньше горизонта!)

★ Пусть мы наблюдаем объект с возрастом Δt. Каково до него расстояние (в модели пыли)? Почему для малых расстояний $L \approx c\Delta t$?

Красное смещение

Эволюция свободного электромагнитного поля

$$S_{Mink} = -\frac{1}{4}\int d^4x\, F^{\nu\rho}F_{\nu\rho};\; F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.22)$$

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}F^{\nu\rho}F_{\nu\rho} \quad (4.23)$$

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.24)$$

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}F_{\mu\lambda}F_{\nu\rho} \quad (4.25)$$

В конформно-плоской метрике

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j] \quad (4.26)$$

Имеем

$$g_{\mu\nu}(\eta) = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu} \quad (4.27)$$
$$g^{\mu\nu}(\eta) = \frac{1}{a^2(\eta)}\eta^{\mu\nu} \quad (4.28)$$
$$\sqrt{-g} = a^4 \quad (4.29)$$

Из (4.25):

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x\, a^4\frac{1}{a^4}\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho}F_{\mu\lambda}F_{\nu\rho} =$$
$$= -\frac{1}{4}\int d^4x\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho}F_{\mu\lambda}F_{\nu\rho} \quad (4.30)$$

– электромагнитное поле конформно-инвариантно. Плоская волна в (η, x^i)-пространстве распространяется как в пространстве Минковского:

$$A_\mu^{(\alpha)} = e_\mu^{(\alpha)}\exp[i(|k|\eta - \mathbf{kx})] \quad (4.31)$$

$|k|$ – не частота, и $\mathbf{k}$ – не волновой вектор в физическом пространстве!
Но можно перейти к физическим величинам:

$\Delta\eta = \dfrac{2\pi}{k}$ – конформный период,

не зависит от времени (4.32)

$\Delta T(t) = a(t)\Delta\eta$ – физический период,

растет пропорционально $a(t)$ (4.33)

$\omega(t) = \dfrac{2\pi}{\Delta T(t)} = \dfrac{2\pi}{a(t)\Delta\eta} = \dfrac{k}{a(t)}$ – физическая частота,

падает обратно пропорционально $a(t)$ (4.34)

Уменьшение частоты – красное смещение.

Эволюция скорости свободных частиц

Координатная скорость частицы отлична от нуля:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \neq 0; \quad ds^2 = dt^2 - \delta_{ij} x^i x^j \tag{4.35}$$

Физическая скорость частицы:

$$dX^i = a(t) dx^i \Rightarrow U^i = \frac{dX^i}{ds} = a(t) u^i \tag{4.36}$$

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} u^\nu u^\lambda = 0 \Rightarrow \backslash \Gamma^i_{jk} = 0 \backslash \Rightarrow \tag{4.37}$$

$$\frac{du^i}{ds} + 2\Gamma^i_{0j} u^0 u^j = 0 \tag{4.38}$$

$$\Gamma^i_{0j} = \delta^i_j \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \frac{du^i}{ds} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{dt}{ds} u^i = 0 \tag{4.39}$$

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{du^i}{dt} = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}\left(\frac{U^i}{a}\right) = \frac{dt}{ds}\left(\frac{dU^i}{dt}\frac{1}{a} - \frac{\dot{a}}{a^2} U^i\right) \tag{4.40}$$

$$\frac{dt}{ds}\left(\frac{dU^i}{dt}\frac{1}{a} - \frac{\dot{a}}{a^2} U^i\right) + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{dt}{ds}\frac{1}{a} U^i = 0 \tag{4.41}$$

$$\frac{dU^i}{dt} = -\frac{\dot{a}}{a} U^i \tag{4.42}$$

$$\frac{dU^i}{U^i} = -\frac{da}{a} \Rightarrow U^i = \frac{\mathrm{const}}{a(t)} = U^i(t_i)\frac{a(t_i)}{a(t)} \tag{4.43}$$

Скорость (и импульс $p_i = mU_i$, но не энергия!) массивных частиц падает как $1/a(t)$.

- Все импульсы падают как $1/a(t)$!

Красное смещение z определяется через изменение частоты света:

$$\frac{\omega_i}{\omega_0} = 1 + z(t_i) = \frac{a(t_0)}{a(t_i)} \Rightarrow \tag{4.44}$$

$$\boxed{z(t_i) = \frac{a(t_0)}{a(t_i)} - 1} \tag{4.45}$$

Закон Хаббла

t_i близко в прошлом к t_0

$$\begin{aligned} a(t_i) &= a(t_0) + (t_i - t_0)\dot{a}(t_0) = \\ &= a(t_0)\left[1 - (t_0 - t_i)\frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}\right] = \\ &= a(t_0)[1 - (t_0 - t_i)H_0] \end{aligned} \tag{4.46}$$

$$z(t_i) = \frac{a(t_0)}{a(t_0)[1 - (t_0 - t_i)H_0]} - 1 \cong (t_0 - t_i)H_0 \tag{4.47}$$

Но $t_0 - t_i = r \Rightarrow$

$$z(t_i) = rH_0 \tag{4.48}$$

Космологическое красное смещение – не Допплеровское!

Это следует также из контекста, в котором относительные скорости могут превышать скорость света.

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dl^2 \tag{4.49}$$

Поместим себя в точку 0, момент времени t_0. Физическое расстояние до точки на координатном расстоянии l

$$r(t_0) = a(t_0)l \quad \text{(это точное равенство)} \tag{4.50}$$

$$\dot{r}(t_0) = v(t_0) = \dot{a}l \tag{4.51}$$

– скорость может быть сколь угодно велика при достаточно большом l!
Эффект Допплера не описывает такую ситуацию.

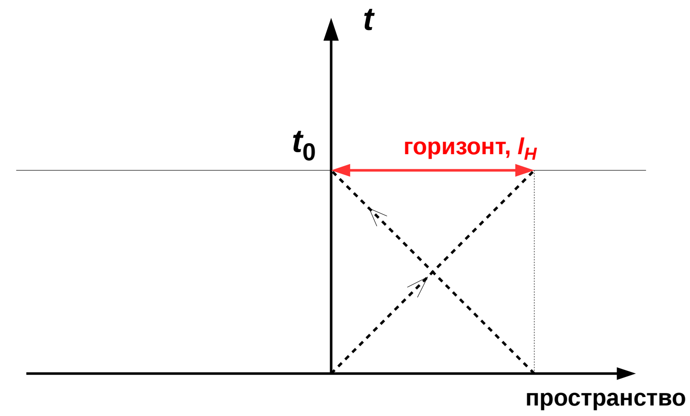
Откуда берется иллюзия эффекта Допплера?

Эффект Допплера для малых v есть:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{v}{c} \equiv v = \dot{a}l = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) al = Hr \tag{4.52}$$

Для малых расстояний космологическое красное смещение *выглядит* как эффект Допплера (и ошибочно трактуется как эффект Допплера).

Как мы видим горизонт?



Для горизонта $t_i = 0 \Rightarrow$

$$z(0) = \frac{a(t_0)}{a(0)} - 1 = \frac{a(t_0)}{0} - 1 = \infty \tag{4.53}$$

Горизонт виден при бесконечном красном смещении – *как бы* удаляющийся со скоростью света

Ультрарелятивистское вещество, плоская вселенная

$$p = \frac{1}{3}n\langle vP\rangle - \text{для любого газа} \tag{4.54}$$

Ультрарелятивистский (УР) газ:

$$E^2 = m^2 + P^2 \approx P^2 \Rightarrow P \cong E, \; v \cong 1 \Rightarrow \tag{4.55}$$

$$p = \frac{1}{3}nE = \frac{1}{3}\rho \tag{4.56}$$

$$\boxed{p = \frac{1}{3}\rho} \tag{4.57}$$

Как ρ зависит от a?

$$\dot\rho + 3\frac{\dot a}{a}(\rho + p) = 0 \text{ (сохр. ТЭИ)} \tag{4.58}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -4\frac{da}{a} \tag{4.59}$$

$$\boxed{\rho = \frac{\text{const}}{a^4}} \tag{4.60}$$

(не $1/a^3$!)

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho = \frac{\text{const}}{a^4} \tag{4.61}$$

$$\boxed{a(t) = \text{const}' t^{1/2}} \tag{4.62}$$

$$H(t) = \frac{\dot a}{a} = \frac{1}{2t} \tag{4.63}$$

(для пыли было $\frac{2}{3t}$)

$$\rho = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{3}{32\pi G}\frac{1}{t^2} \tag{4.64}$$

Горизонт:

$$l_H(t) = a(t)\int_0^t \frac{dt}{a(t)} = 2t = \frac{1}{H(t)} \tag{4.65}$$

(для пыли $2/H(t)$)

Вакуум и де-Ситтеровское плоское решение

Никакой материи кроме Λ-члена.

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\Lambda, \quad \Lambda = \text{const} \geq 0 \tag{4.66}$$

В плоском случае для $\Lambda < 0$ решения нет!

$$\frac{\dot a}{a} = (\pm)\sqrt{\frac{8\pi}{3}G\Lambda} = (\pm)H_{dS} \Rightarrow \tag{4.67}$$

$$a(t) = \text{const} \times e^{(+)H_{dS}t} \tag{4.68}$$

Сжимающиеся решения не физичны (?). Сингулярности нет. Космологический горизонт $= +\infty$ (тоже нет).

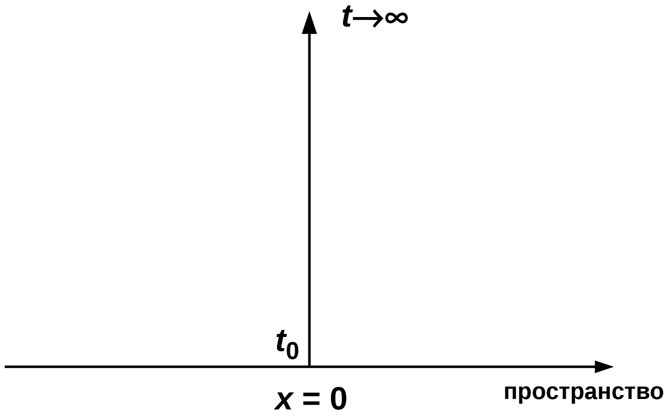
Λ ведет себя как плотность вакуума:

$$\dot\rho + 3\frac{\dot a}{a}(\rho + p) = 0 \Rightarrow \backslash p = -\rho\backslash \Rightarrow \dot\rho = 0 \tag{4.69}$$

Плотность постоянна (что и ожидается от вакуума).

ДеСиттеровский горизонт

Каков в момент времени t_0 размер области, из которой дойдут сигналы в точку $x = 0$ к моменту $t > t_0$?



$$l_{dS}(t) = a(t_0)\int_{t_0}^{t}\frac{dt'}{a(t')} =$$

$$= \text{const}\times e^{H_{dS}t_0}\int_{t_0}^{t}\frac{dt'}{\text{const}\times e^{H_{dS}t'}} =$$

$$= \frac{1}{H_{dS}}\left[1 - e^{-H_{dS}(t-t_0)}\right] \qquad (4.70)$$

$$l_{dS}(\infty) = \frac{1}{H_{dS}} \qquad (4.71)$$

Сигналы из областей, которые сейчас дальше $l_{dS}(\infty)$ не дойдут до точки $x = 0$ никогда!

Случаи $\varkappa = +1, -1$

Пылевидная материя, $\Lambda = 0$. Из (4.2):

$$\rho = \frac{\text{const}}{a^3} \qquad (4.72)$$

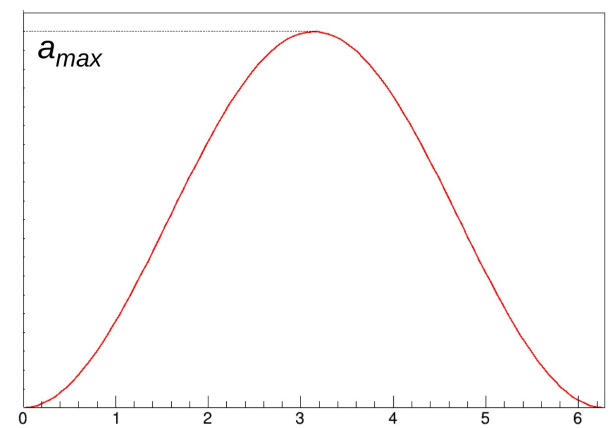
$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\text{const}}{a^3} - \frac{\varkappa}{a^2} = \frac{a_{max}}{a^3} - \frac{\varkappa}{a^2} \qquad (4.73)$$

$$dt = a(t)d\eta \Rightarrow \left(\frac{da}{d\eta}\right)^2 = a_{max}a - \varkappa a^2 \qquad (4.74)$$

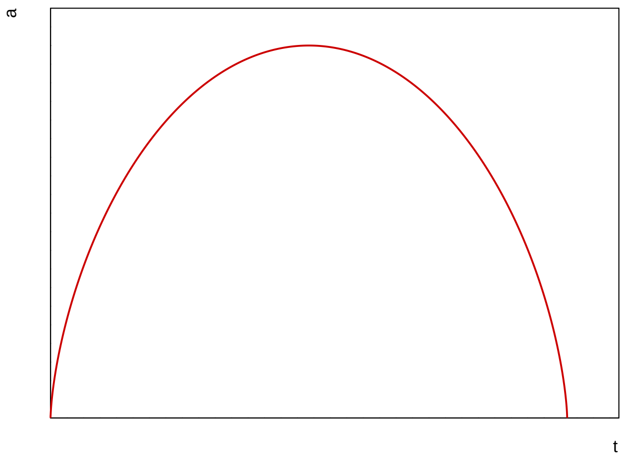
$\varkappa = +1$

$$a(\eta) = a_{max}\sin^2\frac{\eta}{2} \qquad (4.75)$$

Вселенная рождается в точке и коллапсирует в точку.



$$t = \int_0^{\eta} a(\eta)d\eta = \frac{a_{max}}{2}(\eta - \sin\eta) \qquad (4.76)$$



Для $\varkappa = +1$ можно явно выразить a_{max} через массу вселенной:

$$\frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{a_{max}}{a^3} \text{ (по определению, см. (4.73))} \tag{4.77}$$

$$\rho \times 2\pi^2 a^3 = m \Rightarrow \rho = \frac{m}{2\pi^2 a^3} \tag{4.78}$$

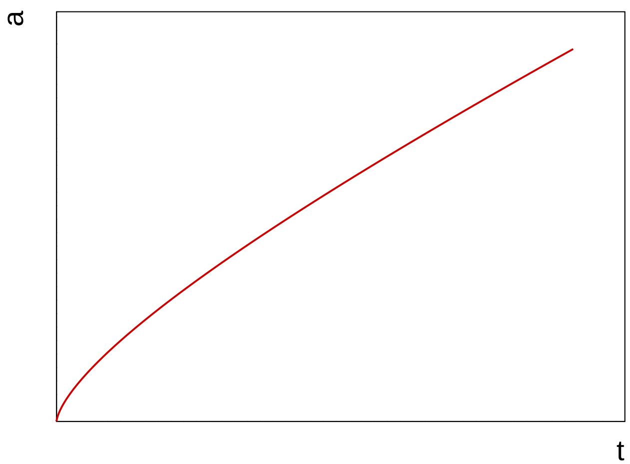
$$\frac{8\pi G}{3}\frac{m}{2\pi^2 a^3} = \frac{a_{max}}{a^3} \Rightarrow a_{max} = \frac{4}{3\pi} mG \tag{4.79}$$

$\varkappa = -1$

$$a(\eta) = a_{max}\,\mathrm{sh}^2\,\frac{\eta}{2} \tag{4.80}$$

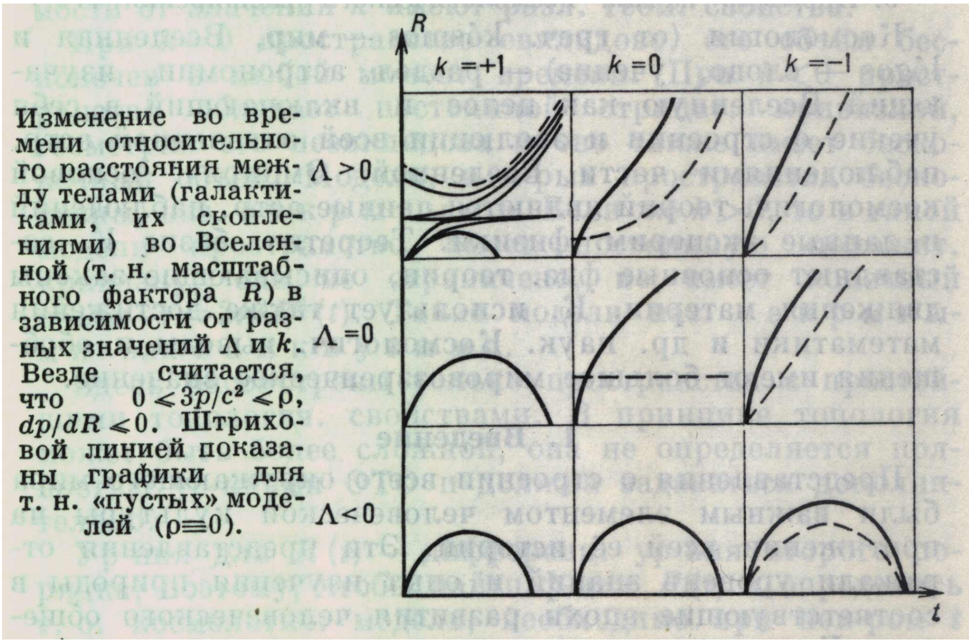
$$t = \int_0^\eta a(\eta)d\eta = \frac{a_{max}}{2}(\mathrm{sh}\,\eta - \eta) \tag{4.81}$$

Коллапса нет, вселенная открыта и бесконечна.



★ Найдите асимптотику решения при $t \to \infty$.

Зоопарк космологических моделей



И.Д. Новиков. Космологические модели. Физическая энциклопедия, Т.2, стр. 475

Параметр замедления (или как была открыта темная энергия)

$$q_0 = -\frac{1}{H_0^2}\frac{\ddot a}{a}\bigg|_{t_0} = -\frac{\ddot a\, a}{\dot a^2} \tag{4.82}$$

Пыль:

$$\begin{aligned} a(t) &= \mathrm{const}\, t^{2/3} \\ \dot a(t) &= \frac{2}{3}\mathrm{const}\, t^{-1/3} \\ \ddot a(t) &= -\frac{2}{9}\mathrm{const}\, t^{-4/3} \end{aligned} \tag{4.83}$$

$$q_0 = +\frac{1}{2} \tag{4.84}$$

Каков параметр замедления в более общем случае? (И в чем заключается этот более общий случай)?

Критическая плотность

Уравнение Фридмана:

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G(\rho + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2} \tag{4.85}$$

$\Rightarrow$ Постоянная Хаббла сейчас:

$$H_0^2 = \frac{8\pi}{3}G(\rho_0 + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a_0^2} \tag{4.86}$$

Если пространство плоское, $\varkappa = 0$, то

$$\frac{8\pi}{3}G(\rho_0 + \Lambda) = H_0^2 \Rightarrow \rho_0 + \Lambda = \frac{3}{8\pi G}H_0^2 \tag{4.87}$$

$$\boxed{\rho_c \equiv \frac{3}{8\pi G} H_0^2 \;-\; \text{критическая плотность}} \tag{4.88}$$

$$\begin{aligned} h &= 0.68 \Rightarrow \\ \rho_c &= 4.9 \cdot 10^{-6}\, \frac{\text{ГэВ}}{\text{см}^3} \end{aligned} \tag{4.89}$$

$\rho_0 + \Lambda$ измеряются.
Результат: в пределах ошибок

$$\rho_0 + \Lambda = \rho_c \Rightarrow \tag{4.90}$$

Наше пространство очень близко к плоскому.

Из (4.85):

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi}{3} G(\rho + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2} = \\ &= \frac{8\pi}{3} G\left(\rho_M + \rho_{rad} + \rho_\Lambda - \frac{3}{8\pi G}\frac{\varkappa}{a^2}\right) = \\ &= \frac{8\pi}{3} G\left(\rho_M + \rho_{rad} + \rho_\Lambda + \rho_{curv}\right) \end{aligned} \tag{4.91}$$

Уравнение справедливо всегда, когда можно пренебречь плавным превращением ультрарелятивистской материи в нерелятивистскую $\Rightarrow$
Всегда, кроме очень ранних эпох после сингулярности.

Из (4.91):

$$\rho_M + \rho_{rad} + \rho_\Lambda + \rho_{curv} = \frac{3}{8\pi G} H^2 \tag{4.92}$$

В современную эпоху (по определению (4.88))

$$\rho_M^0 + \rho_{rad}^0 + \rho_\Lambda^0 + \rho_{curv}^0 = \rho_c \tag{4.93}$$

Введем относительные плотности *сейчас*:

$$\Omega_M = \rho_M^0/\rho_c \tag{4.94}$$
$$\Omega_{rad} = \rho_{rad}^0/\rho_c \tag{4.95}$$
$$\Omega_\Lambda = \rho_\Lambda^0/\rho_c \tag{4.96}$$
$$\Omega_{curv} = \rho_{curv}^0/\rho_c \tag{4.97}$$

$$\Omega_M + \Omega_{rad} + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} = 1 \tag{4.98}$$

$$\rho_M = \rho_M^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \tag{4.99}$$

$$\rho_{rad} = \rho_{rad}^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \tag{4.100}$$

$$\rho_\Lambda = \rho_\Lambda^0 \equiv \Lambda \tag{4.101}$$

$$\rho_{curv} = \rho_{curv}^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \tag{4.102}$$

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G} H_0^2 \Rightarrow \frac{8\pi}{3} G = \frac{H_0^2}{\rho_c} \tag{4.103}$$

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{H_0^2}{\rho_c}\left[\rho_M^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \rho_{rad}^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \rho_\lambda + \rho_{curv}^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right] = \\ &= H_0^2 \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{rad} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{4.104}$$

Уравнение Фридмана в относительных плотностях:

$$\boxed{\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = H_0^2\left[\Omega_M\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{rad}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv}\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right]} \quad (4.105)$$

Считая $\Omega_{rad} \ll \Omega_M$ найдем q_0 в современную эпоху

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = H_0^2\left[\Omega_M\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv}\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right] \quad (4.106)$$

$$\dot a = H_0\sqrt{\Omega_M\, a_0^3/a + \Omega_\Lambda a^2 + \Omega_{curv} a_0^2} \quad (4.107)$$

$$\ddot a = \frac{H_0}{2}\frac{-\Omega_M\, a_0^3/a^2 + 2a\,\Omega_\Lambda}{\sqrt{\Omega_M\, a_0^3/a + \Omega_\Lambda a^2 + \Omega_{curv} a_0^2}}\,\dot a = $$
$$= \frac{1}{2}H_0^2(2a\Omega_\Lambda - \frac{1}{a^2}\Omega_M a_0^3) \quad (4.108)$$

$$q_0 = -\frac{1}{H_0^2}\frac{\ddot a}{a}\bigg|_{t_0 \Rightarrow a=a_0} = \frac{1}{2}(\Omega_M - 2\Omega_\Lambda) \quad (4.109)$$

(Ω_{curv} ушло!)

$$q_0 = \frac{1}{2}(\Omega_M - 2\Omega_\Lambda) \quad [\Omega_M = 1,\ \Lambda = 0 \Rightarrow q_0 = 1/2] \quad (4.110)$$

В каком соотношении находятся Ω_M и Ω_Λ?

Стандартные свечи и параметр замедления

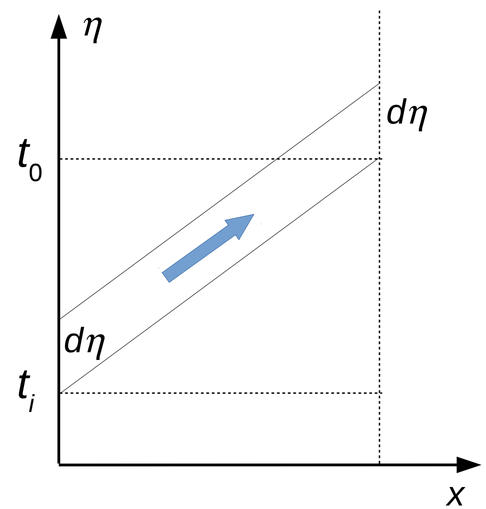
Наблюдаемая яркость $J(z)$ стандартного источника со светимостью L:

$$J(z) = \frac{L}{S(z)} \times \underbrace{\frac{1}{1+z}}_{\text{покраснение}} \times \underbrace{\frac{1}{1+z}}_{\text{растяжение времени}} = \frac{L}{S(z)}\frac{1}{(1+z)^2} \quad (4.111)$$

$S(z)$ – площадь 2-сферы, окружающей источник.

Растяжение времени:

$$d\eta_i = \frac{dt_i}{a_i} = \frac{dt_0}{a_0} \Rightarrow dt_i = \frac{a_i}{a_0}dt_0 = \frac{dt_0}{1+z} \quad (4.112)$$



$S(z) =?$