Лекция 3

Уравнения Эйнштейна, сохранение энергии-импульса, гравитационные волны, антигравитация. Уравнение Фридмана и полная система уравнений космологии.

Получение уравнений Эйнштейна из вариационного приципа (продолжение)

$$S_R = -K\int d^4x\sqrt{-g}R = -K\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{3.1}$$

$$\delta S_R = \begin{array}{l|l} -K\int d^4x\delta(\sqrt{-g})R & = \delta S_1 \\ -K\int d^4x\sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} & = \delta S_2 \\ -K\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} & = \delta S_3 \end{array} \tag{3.2}$$

$$\boxed{\delta S_1 = -\frac{K}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,R\,g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}} \tag{3.3}$$

$$\delta S_2 = -K\int d^4x\sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{3.4}$$

$\delta g^{\mu\nu} =?$

$$\delta(g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda}) = 0 \ \Rightarrow\ g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\lambda} = -g_{\nu\lambda}\delta g^{\mu\nu}\ |g^{\rho\lambda} \tag{3.5}$$

$$\delta^\rho_\nu\delta g^{\mu\nu} = -g^{\rho\lambda}g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\lambda} \Rightarrow \tag{3.6}$$

$$\delta g^{\mu\rho} = -g^{\rho\lambda}\delta g_{\nu\lambda}g^{\mu\nu}\ |\ \rho \rightleftarrows \nu \tag{3.7}$$

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}\delta g_{\rho\lambda} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\delta S_2 = +K\int d^4x\sqrt{-g}R_{\mu\nu}g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}\delta g_{\rho\lambda} = \\ = +K\int d^4x\sqrt{-g}R^{\rho\lambda}\delta g_{\rho\lambda}\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\boxed{\delta S_2 = +K\int d^4x\sqrt{-g}\,R^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}} \tag{3.10}$$

$$\delta S_3 = -K\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \tag{3.11}$$

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda\Gamma^\mu_{\nu\rho} - \partial_\rho\Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\delta R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda\delta\Gamma^\mu_{\nu\rho} - \partial_\rho\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}+ \\ + \delta\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \delta\Gamma^\mu_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\end{aligned} \tag{3.13}$$

$\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ – тензор, в отличие от $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$! (Почему? ★)

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\mu_{\nu\rho}) - \nabla_\rho(\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}) = \\ = \partial_\lambda(\delta\Gamma^\mu_{\nu\rho}) + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}\delta\Gamma^\mu_{\sigma\rho} - \Gamma^\sigma_{\lambda\rho}\delta\Gamma^\mu_{\nu\sigma}- \\ - \partial_\rho(\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}) - \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} + \Gamma^\sigma_{\rho\nu}\delta\Gamma^\mu_{\sigma\lambda} + \Gamma^\sigma_{\rho\lambda}\delta\Gamma^\mu_{\nu\sigma} = \\ = \delta R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} \Rightarrow\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}) \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}\delta S_3 = -K\int d^4x\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}[\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})] =\\ = -K\int d^4x\sqrt{-g}[\nabla_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})] =\\ = -K\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\sigma}) =\\ = \Bigg\backslash \nabla_\lambda A^\lambda = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\lambda(\sqrt{-g}A^\lambda) \bigstar \Bigg\backslash =\\ = -K\int_\Omega d^4x\,\partial_\lambda[\sqrt{-g}\,(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\sigma})] = 0\end{aligned} \tag{3.16}$$

– так как под интегралом полная дивергенция,
а все вариации на границе исчезают.

$$\boxed{\delta S_3 = 0} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}\delta S = \delta S_\Lambda + \delta S_R =\\ = -\frac{\Lambda}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\\ - \frac{K}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}R\delta g_{\mu\nu}\\ + K\int d^4x\sqrt{-g}R^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} =\\ = \int d^4x\sqrt{-g}\left[K\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) - \frac{\Lambda}{2}g^{\mu\nu}\right]\delta g_{\mu\nu} = 0\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\boxed{R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{1}{2K}\Lambda g^{\mu\nu}} \tag{3.19}$$

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2K}\Lambda g_{\mu\nu}} \tag{3.20}$$

K пока неизвестна!

Тензор Эйнштейна:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{3.21}$$

Поля материи, тензор энергии-импульса

$$S = S_\Lambda(g) + S_R(g) + S_m(u,g) \qquad (3.22)$$

$$\delta S = \delta S_\Lambda(g)|_{\delta g} + \delta S_R(g)|_{\delta g} + \\ + \delta S_m(u,g)|_{\delta g} + \delta S_m(u,g)|_{\delta u} = 0 \qquad (3.23)$$

Символически:

$$\delta S = \frac{\delta S_\Lambda(g)}{\delta g}\delta g + \frac{\delta S_R(g)}{\delta g}\delta g + \\ + \frac{\delta S_m(u,g)}{\delta g}\delta g + \frac{\delta S_m(u,g)}{\delta u}\delta u = 0 \qquad (3.24)$$

Вариации $\delta g_{\mu\nu}$ и δu независимы! ⇒

Уравнения гравитационного поля:

$$\delta S_\Lambda(g)|_{\delta g} + \delta S_R(g)|_{\delta g} + \delta S_m(u,g)|_{\delta g} = 0 \qquad (3.25)$$

Уравнения полей материи:

$$\delta S_m(u,g)|_{\delta u} = 0 \qquad (3.26)$$

Из вариации полного действия получаются и уравнения гравитационного поля, и уравнения полей материи!

$$S_m(u,g) = \int d^4x \sqrt{-g}\, \mathcal{L}_m(u,g) \qquad (3.27)$$

$$\delta S_m(u,g)|_{\delta g} = -\frac{1}{2}\int d^4x \sqrt{-g}\, T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \qquad (3.28)$$

$T_{\mu\nu}$ – метрический тензор энергии-импульса полей материи (*симметричен!*).

Откуда берется такое определение?

Пример. Скалярное поле

$$\mathcal{L}_{sc} = \frac{1}{2}\partial^\nu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\phi) = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\phi) \qquad (3.29)$$

$$S_{sc}(g,\phi) = \int d^4x \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi)\right) \qquad (3.30)$$

$$\delta S_{sc}|_{\delta g} = \int d^4x \left[\delta\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi)\right) + \\ + \sqrt{-g}\,\frac{1}{2}\,\delta g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\right] = \\ = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\partial_\rho\varphi\partial_\sigma\varphi - V(\varphi)\right) - \\ -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{\mu\rho}\delta g_{\rho\sigma}g^{\sigma\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\right] = \\ = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\times \\ \left[g^{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\,g^{\sigma\rho}\partial_\sigma\varphi\partial_\rho\varphi - V(\varphi)\right) - g^{\rho\mu}g^{\nu\sigma}\partial_\rho\varphi\partial_\sigma\varphi\right]\delta g_{\mu\nu} \qquad (3.31)$$

(3.28) $\Rightarrow$

$$T^{\mu\nu} = g^{\rho\mu} g^{\nu\sigma} \partial_\rho \varphi \partial_\sigma \varphi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{sc}(\varphi) \mid g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \tag{3.32}$$

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi - g_{\alpha\beta} \mathcal{L}(\varphi) \tag{3.33}$$

– обычное выражение тензора энергии-импульса скалярного поля, следующее из теоремы Нетер ★.

Уравнения гравитационного поля с учетом материи

$$\begin{aligned} &\delta S|_{\delta g} = \delta S_\Lambda|_{\delta g} + \delta S_R|_{\delta g} + \delta S_m|_{\delta g} = \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[K \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) - \frac{\Lambda}{2} g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} = 0 \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{2K} (\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})} \tag{3.35}$$

Найдем константу $\frac{1}{2K}$ из нерелятивистского предела

Общее уравнение геодезической:

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0 \tag{3.36}$$

$$\tau = s,\ u^\mu(s) = \frac{dx^\mu(s)}{ds} \tag{3.37}$$

Статический нерелятивистский предел движения частицы:

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \tag{3.38}$$

$$\frac{dx^0}{ds} \approx 1,\ \frac{dx^i}{ds} \ll \frac{dx^0}{ds}\ \Rightarrow\ \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{00} = 0 \tag{3.39}$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} \tag{3.40}$$

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} \eta^{i\sigma} (\partial_0 \gamma_{0\sigma} + \partial_0 \gamma_{\sigma 0} - \partial_\sigma \gamma_{00}) = +\frac{1}{2} \partial_i \gamma_{00} \tag{3.41}$$

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = -\frac{1}{2} \partial_i \gamma_{00} \cong \frac{d^2x^i}{dt^2} = -\partial_i \varphi \tag{3.42}$$

φ - грав. потенциал $\Rightarrow$

$$\gamma_{00} = 2\varphi \tag{3.43}$$

$$g_{00} = 1 + \gamma_{00} = 1 + 2\varphi \tag{3.44}$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2} \Delta g_{00} \tag{3.45}$$

Уравнение Пуассона для грав. потенциала:

$$\Delta\varphi = 4\pi G \rho \tag{3.46}$$

Из (3.45):

$$\Delta g_{00} = 8\pi G \rho \tag{3.47}$$

Уравнение Эйнштейна без Λ

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{2K} T_{\mu\nu} \mid g^{\mu\nu} \tag{3.48}$$

$$R - \frac{1}{2} 4R = \frac{1}{2K} T, \quad T \equiv g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}\ \Rightarrow \tag{3.49}$$

$$R = -\frac{1}{2K} T\ \Rightarrow \tag{3.50}$$

$$\boxed{R_{\mu\nu} = \frac{1}{2K} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)} \tag{3.51}$$

Статический нерелятивистский предел:

$$T_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(\rho, 0, 0, 0) \tag{3.52}$$

$$R_{00} = \frac{1}{2K}\left(\rho - \frac{1}{2}\rho\right) = \frac{1}{4K}\rho \tag{3.53}$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\rho\lambda}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\nu\lambda} \tag{3.54}$$

$\Gamma^\lambda_{\rho\lambda}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\nu\lambda}$ – второй порядок малости

$$R_{00} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{00} - \partial_0 \Gamma^\lambda_{\lambda 0} = \backslash\text{статика}\backslash = \partial_i \Gamma^i_{00} \tag{3.55}$$

$$R_{00} = \partial_i\left(\frac{1}{2}\partial_i \gamma_{00}\right) = \frac{1}{2}\partial_i\partial_i g_{00} = \frac{1}{2}\Delta g_{00} \tag{3.56}$$

Подставляем в (3.53):

$$\Delta g_{00} = \frac{1}{2K}\rho \tag{3.57}$$

Сравнивая с (3.47):

$$\boxed{\frac{1}{2K} = 8\pi G} \tag{3.58}$$

Уравнение Эйнштейна с Λ-членом:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})} \tag{3.59}$$

Из уравнения Эйнштейна следует ковариантный закон сохранения энергии-импульса:

$$\nabla^\mu \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\nu \tag{3.60}$$

$$\nabla^\mu\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) = 8\pi G(0 + \nabla^\mu T_{\mu\nu}) \tag{3.61}$$

$$\nabla^\mu\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) \equiv 0 \;\Rightarrow\; \nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \tag{3.62}$$

Доказательство.

Тождество Бьянки:

$$\nabla_\rho R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\mu R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\nu R^\lambda{}_{\sigma\rho\mu} = 0 \tag{3.63}$$

Сворачиваем по λ, μ:

$$\nabla_\rho R^\lambda{}_{\sigma\lambda\nu} + \nabla_\lambda R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\nu R^\lambda{}_{\sigma\rho\lambda} = 0 \tag{3.64}$$

$$\nabla_\rho R_{\sigma\nu} + \nabla_\lambda R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho} - \nabla_\nu R_{\sigma\rho} = 0 \mid g^{\sigma\rho} \tag{3.65}$$

$$\nabla^\rho R_{\rho\nu} + \nabla^\lambda R_{\lambda\nu} - \nabla_\nu R = 0 \bigstar \tag{3.66}$$

$$\begin{aligned} \nabla^\rho R_{\rho\nu} + \nabla^\lambda R_{\lambda\nu} - \nabla^\mu(g_{\mu\nu}R) = \\ = 2\nabla^\mu R_{\mu\nu} - \nabla^\mu(g_{\mu\nu}R) = \\ = 2\nabla^\mu\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) = 0 \end{aligned} \tag{3.67}$$

Линеаризованные уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \tag{3.68}$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{3.69}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}) \;=\; 0 \;\Rightarrow \tag{3.70}$$

$$R^{\sigma}{}_{\mu\nu\lambda}(g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}) \;=\; 0 \tag{3.71}$$

Всё Γ и всё R – это возмущения над нулевыми значениями за счет возмущения $h_{\mu\nu}$
$\Rightarrow$ можно использовать формулы первого порядка для возмущений:

$$R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda\Gamma^{\mu}_{\rho\nu} - \partial_\rho\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} \tag{3.72}$$

$$\begin{aligned}\partial_\lambda\Gamma^{\mu}_{\rho\nu} &= \partial_\lambda\frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(\partial_\rho h_{\nu\sigma} + \partial_\nu h_{\sigma\rho} - \partial_\sigma h_{\rho\nu}) = \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\lambda\partial_\rho h^{\mu}_{\nu} + \partial_\lambda\partial_\nu h^{\mu}_{\rho} - \partial_\lambda\partial^\mu h_{\rho\nu})\end{aligned} \tag{3.73}$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial^\lambda\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial^\lambda\partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial^\lambda\partial_\lambda h_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\mu h^{\lambda}_{\lambda})\bigstar \tag{3.74}$$

При малом преобразовании $x'^{\mu} = x^\mu + \xi^\mu(x)$ ★:

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + \partial^\mu\xi^\nu + \partial^\nu\xi^\mu \Rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu \tag{3.75}$$

$R_{\mu\nu}$ калибровочно инвариантно относительно преобразования:

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu \text{ (проверить ★)} \tag{3.76}$$

Гармоническая калибровка:

$$\partial_\mu h^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\partial_\nu h^{\lambda}_{\lambda} = 0 \tag{3.77}$$

обеспечена, если

$$\partial_\mu\partial^\mu\xi_\nu = -\left(\partial_\mu h^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}h^{\lambda}_{\lambda}\right) \tag{3.78}$$

Тогда, из (3.74) ★:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial^\lambda\partial_\lambda h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\partial_0^2 - \Delta)h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} \;\Rightarrow \tag{3.79}$$

$$\boxed{\Box h_{\mu\nu} = -16\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T\right)} \tag{3.80}$$

Гравитационные волны

Если $T_{\mu\nu} = 0$, то

$$\Box h_{\mu\nu} = 0 \tag{3.81}$$

– волновое уравнение, грав. волны в вакууме.

Замечание: если $G = 0$, то грав. волны все равно есть.

Макроскопический феноменологический тензор энергии-импульса изотропной «жидкости»

1. Покоящееся вещество («идеальная жидкость») в пространстве Минковского (≈ тензор напряжений):

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & & & 0 \\ & p & & \\ & & p & \\ 0 & & & p \end{pmatrix} \tag{3.82}$$

$$u^{\mu} = (1, 0, 0, 0) \tag{3.83}$$

2. Вещество движется в пространстве Минковского:

$$(p+\rho)u^{\mu}u^{\nu} - p\eta^{\mu\nu} - \underline{\text{это тензор}} \tag{3.84}$$

В системе покоя материи:

$$(p+\rho)\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} - p\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix} \tag{3.85}$$

Следовательно, в произвольной движущейся системе:

$$T^{\mu\nu} = (p+\rho)u^{\mu}u^{\nu} - p\eta^{\mu\nu} \tag{3.86}$$

3. Вещество в произвольной системе.
В локально-Лоренцевой системе должно быть:

$$T^{\mu\nu} = (p+\rho)u^{\mu}u^{\nu} - p\eta^{\mu\nu} \tag{3.87}$$

Тогда общековариантный тензор ЭИ:

$$\boxed{T^{\mu\nu} = (p+\rho)u^{\mu}u^{\nu} - pg^{\mu\nu}} \tag{3.88}$$

Статическое изотропное вещество как источник гравитации (и антигравитации)

$$\Box h_{\mu\nu} = -16\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T\right) \tag{3.89}$$

Для компоненты 00: \$T = \rho - 3p$\

$$\partial_0^2 h_{00} - \Delta h_{00} = -8\pi G(\rho + 3p) \;\Rightarrow \tag{3.90}$$

$$\Delta h_{00} = 8\pi G(\rho + 3p) \tag{3.91}$$

В нерелятивистской статике (см. (3.45)):

$$\Delta h_{00} = 2\Delta\varphi \;\Rightarrow \tag{3.92}$$

$$\Delta\varphi = 4\pi G(\rho + 3p) \tag{3.93}$$

Источником гравитации является не ρ, а $\rho + 3p$.
Если $\rho < 0,\ p = 0 \;\Rightarrow$ антигравитация.
Если $\rho + 3p < 0 \;\Rightarrow$ тоже антигравитация!

Λ-член

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) \tag{3.94}$$

$$T^{(\Lambda)}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \Lambda & & & \\ & -\Lambda & & \\ & & -\Lambda & \\ & & & -\Lambda \end{pmatrix} \tag{3.95}$$

$\rho = \Lambda$, $p = -\Lambda$, уравнение состояния: $p = -\rho$.
Если $\Lambda > 0$, то $\rho + 3p = -2\Lambda < 0$.
Космологическая константа $\Lambda > 0$ приводит к антигравитации.

Классическая космология: космологический принцип и смысл однородности и изотропии

- Предполагаем, что Вселенная заполнена идеальной (без вязкости, многокомпонентной)
космологической жидкостью
В сопутствующей системе

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix} = \sum_i \hat{T}_i \qquad (3.96)$$

- *Космологический принцип:* Вселенная изотропна и однородна: космологическая жидкость однородна и геометрия однородна (кривизна одинакова).

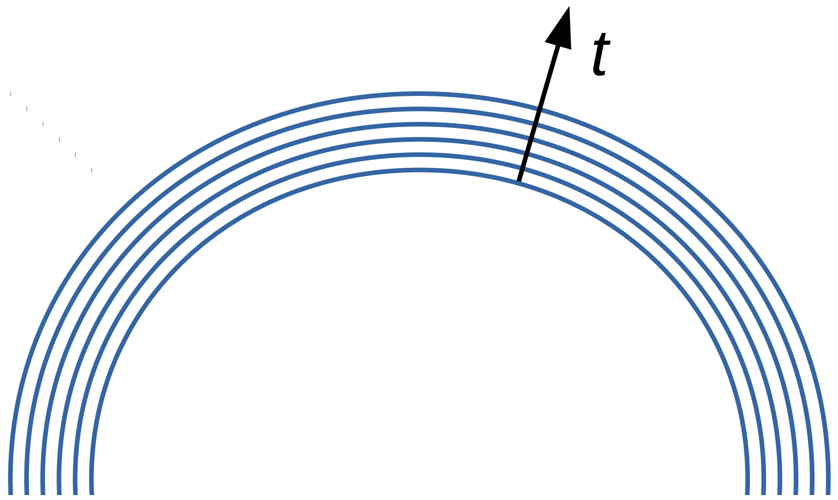
Смысл однородности.

- Multifinger time – многонаправленное время – набор пространственно-подобных поверхностей, перенумерованных параметром t.

- Через каждое событие проходит гиперповерхность изоторпии – точный смысл однородности.

- Изотропия на пространственной гиперповерхности влечет однородность на той же поверхности.
Доказательство: Если бы не было однородности, на поверхности возникли бы градиенты, нарушающие изотропию.

- На гиперповерхностях однородности космологическая жидкость должна покоиться (иначе – анизотропия). ⇒
Если все пространство-время разложено на систему поверхностей однородности, то имеет естественную сопутствующую космологическую систему отсчета, связанную с покоящейся космологической жидкостью.



Дополнительное чтение: Ч.Мизнер, К.Торн, Дж.Уилер. Гравитация, Т.2., §27.2 – §27.5.

Космологический принцип и наблюдение:

Однородность является обобщением результатов наблюдений, но Вселенная не стационарна, поэтому прямо однордность наблюдать невозможно!

На больших расстояниях наблюдается плотность материи, температура и т.д. отличные от локальных современных.

Однородные и изотропные трехмерные пространства

Однородных и изотропных трехмерных пространства всего три: евклидово пространство, трехмерная сфера, трехмерная псевдосфера.

Евклидово трехмерное пространство (3-плоскость)
Есть такая система координат, что во всем пространстве

$$dl^2 = \gamma_{ij}dx^i dx^j = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \tag{3.97}$$

3-*сфера*
Фиктивное 4-мерное евклидово пространство:

$$ds^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 + (dy^4)^2 \tag{3.98}$$

Уравнение 3-сферы:

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 + (y^4)^2 = a^2 \tag{3.99}$$

Описывается тремя параметрами:

$$\begin{aligned} y^1 &= a\cos\chi \\ y^2 &= a\sin\chi\cos\theta \\ y^2 &= a\sin\chi\sin\theta\cos\varphi \\ y^4 &= a\sin\chi\sin\theta\sin\varphi \end{aligned} \tag{3.100}$$

$$dl^2 = \gamma_{ij}dx^i dx^j = a^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)] \bigstar \tag{3.101}$$

★ Упражнение: попытайтесь отгадать параметризацию 4-х мерной сферы в 5-мерном пространстве и выражение для элемента длины на 4-х мерной сфере.

В квадратных скобках – метрика единичной 3-сферы, никаких упоминаний фиктивного 4-мерного пространства (y^1, y^2, y^3, y^4) нет.

3-*псевдосфера (гиперболоид)* Фиктивное 4-мерное псевдоевклидово пространство:

$$ds^2 = (dy^1)^2 - (dy^2)^2 - (dy^3)^2 - (dy^4)^2 \tag{3.102}$$

3-псевдосфера – это сфера в 4-пространстве Минковского (псевдосфера):

$$(y^1)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2 - (y^4)^2 = a^2, \quad y^1 > 0 \tag{3.103}$$

$$\begin{aligned} y^1 &= a\,\mathrm{ch}\,\chi \\ y^2 &= a\,\mathrm{sh}\,\chi\cos\theta \\ y^2 &= a\,\mathrm{sh}\,\chi\sin\theta\cos\varphi \\ y^4 &= a\,\mathrm{sh}\,\chi\sin\theta\sin\varphi \end{aligned} \tag{3.104}$$

$$dl^2 = \gamma_{ij}dx^i dx^j = a^2[d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\,\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)] \bigstar \tag{3.105}$$

Как понять, что эти пространства однородны?
Для 3-сферы, 3-плоскости и 3-псевдосферы

$$R_{ijkl} = \frac{\varkappa}{a^2}(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}) \tag{3.106}$$

$$\varkappa = \begin{cases} +1 & \text{– 3-сфера} \\ 0 & \text{– 3-плоскость} \\ -1 & \text{– 3-псевдосфера} \end{cases} \tag{3.107}$$

Проверяется прямым вычислением, или в ковариантном формализме: см. Robert M. Wald, General Relativity Sec. 5.1, p. 91.

$$R_{ij} = 2\frac{\varkappa}{a^2}\gamma_{ij} \bigstar \tag{3.108}$$

$$R = 6\frac{\varkappa}{a^2} \bigstar \tag{3.109}$$

Скаляр кривизны всюду одинаков – пространства постоянной кривизны.

Метрика Фридмана-Робертсона-Уокера (FRW)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j \tag{3.110}$$

γ_{ij} – метрика одного из однородных 3-пространств.

Для сферы и псевдосферы можно взять метрику единичных сфер.

Для 3-плоскости физ. смысл имеет только $a(t_1)/a(t_2)$

$$\hat{g} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & a^2(t)\hat{\gamma} \end{array}\right) \tag{3.111}$$

Только в рамках модели FRW космологическое время приобретает смысл!

Координаты FRW – сопутствующая система отсчета неподвижной космологической жидкости

Докажем, что FRW система отсчета связана с свободной неподвижной космологической жидкостью, то есть
неподвижные частицы движутся свободно, т.е. по геодезическим.

Что такое неподвижные частицы:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = 0; \;\; u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{dt}{dt} = 1 \tag{3.112}$$

$$\forall \mu : \;\; \frac{du^\mu}{ds} = 0 \tag{3.113}$$

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}u^\nu u^\lambda = 0 \tag{3.114}$$

Подставляем (3.112), (3.113):

$$\text{Должно быть: } 0 + \Gamma^\mu_{00}u^0u^0 = \Gamma^\mu_{00} = 0 \tag{3.115}$$

Нужно проверить, что действительно $\Gamma^\mu_{00} = 0$.

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\lambda}) \tag{3.116}$$

$$\Gamma^0_{00} = 0; \;\; \Gamma^i_{00} = 0; \;\; \Gamma^0_{0i} = 0 \;\bigstar \tag{3.117}$$

$$\Gamma^i_{0j} = \delta^i_j\frac{\dot{a}}{a} \;\bigstar \tag{3.118}$$

$$\Gamma^0_{ij} = a\dot{a}\gamma_{ij} \;\bigstar \tag{3.119}$$

$$\Gamma^i_{jk} = {}^{(3)}\Gamma^i_{jk} \;\bigstar \tag{3.120}$$

Уравнение Фридмана

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G(\Lambda\, g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) \tag{3.121}$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda\nu} \tag{3.122}$$

$$R_{00} = -\partial_0 \Gamma^\lambda_{0\lambda} - \Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{0\lambda} = -3\frac{\ddot a}{a} \bigstar \tag{3.123}$$

$$\boxed{R_{00} = -3\,\frac{\ddot a}{a}} \tag{3.124}$$

$$R_{0i} = \partial_j \Gamma^j_{0i} - \partial_0 \Gamma^\lambda_{i\lambda} + \Gamma^\lambda_{0i}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda i} = 0 \bigstar \tag{3.125}$$

$$\begin{gathered}
R_{ij} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{ij} - \partial_i \Gamma^\lambda_{j\lambda} + \Gamma^\lambda_{ij}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{i\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda j} = \\
\partial_0 \Gamma^0_{ij} + \partial_k \Gamma^k_{ij} \\
- \partial_i \Gamma^0_{j0} - \partial_i \Gamma^l_{jl} \\
+ (\Gamma^0_{ij}\Gamma^\sigma_{0\sigma} + \Gamma^k_{ij}\Gamma^\sigma_{k\sigma}) \\
- (\Gamma^0_{ik}\Gamma^k_{0j} + \Gamma^k_{i0}\Gamma^0_{jk} + \Gamma^k_{il}\Gamma^l_{jk}) = \\
= \partial_0 \Gamma^0_{ij} + \Gamma^0_{ij}\Gamma^\sigma_{0\sigma} - \Gamma^0_{ik}\Gamma^k_{0j} - \Gamma^k_{i0}\Gamma^0_{jk} + {}^{(3)}R_{ij} = \\
= (a\ddot a + 2\dot a^2)\gamma_{ij} + {}^{(3)}R_{ij} = \\
= \Bigg\backslash {}^{(3)}R_{ij} = 2\frac{\varkappa}{r^2}\gamma_{ij};\ r \equiv 1;\ \varkappa = +1, 0, -1 \Bigg\backslash = \\
= (a\ddot a + 2\dot a^2 + 2\varkappa)\gamma_{ij}
\end{gathered} \tag{3.126}$$

$$\boxed{R_{ij} = (a\ddot a + 2\dot a^2 + 2\varkappa)\gamma_{ij}} \tag{3.127}$$

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij} = -6\left(\frac{\ddot a}{a} + \frac{\dot a^2}{a} + \frac{\varkappa}{a^2}\right) \Rightarrow \tag{3.128}$$

ЛЧ, 00-компонента уравнений Эйнштейна:

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = 3\left(\frac{\dot a^2}{a^2} + \frac{\varkappa}{a^2}\right) \tag{3.129}$$

Покоящаяся материя:

$$T_{00} = \rho; \quad g_{00}\Lambda = \Lambda \ \Rightarrow \tag{3.130}$$

Уравнение Фридмана (с Λ-членом)

$$\boxed{\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} G(\rho + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2}} \tag{3.131}$$

Как меняется ρ в зависимости от t и a?

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{3.132}$$

$$\begin{gathered}
\nabla_\mu T^{\mu 0} = \partial_\mu T^{\mu 0} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma} T^{\sigma 0} + \Gamma^0_{\mu\sigma} T^{\mu\sigma} = \\
= \partial_0 T^{00} + \Gamma^i_{i0} T^{00} + \Gamma^0_{ij} T^{ij} = \\
= \Bigg\backslash T^{ij} = (p + \rho) u^i u^j - p g^{ij} = -p g^{ij} = \frac{1}{a^2} p \gamma^{ij} \Bigg\backslash = \\
= \dot\rho + 3\frac{\dot a}{a}(\rho + p) = 0
\end{gathered} \tag{3.133}$$

(Λ-член удовлетворяет ковариантное сохранение энергии-имульса тождественно).

Полная система уравнений изотропной космологии:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G(\rho + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2} \quad \text{(уравнение Фридмана)} \tag{3.134}$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad \text{(ковариантное сохранение)} \tag{3.135}$$

$$p = p(\rho) \quad \text{(уравнение состояния)} \tag{3.136}$$