

Введение в современную космологию.

Презентации курса лекций.

А.Д. Панов.

Осенний семестр 2019.

Оглавление

1	Основы ОТО. I. Дифференциальная геометрия: метрический тензор, аффинная связность, ковариантная производная	6
2	Основы ОТО. II. Свойства аффинной связности. Тензор кривизны. Действие для гравитации.	14
3	Уравнения Эйнштейна, сохранение энергии-импульса, гравитационные волны, антигравитация. Уравнение Фридмана и полная система уравнений космологии.	25
4	Решения уравнений изотропной однородной космологии. Зоопарк космологических моделей. Стандартные свечи.	38
5	Параметр замедления и темная энергия. Модель Λ CDM. Временная шкала трех основных эпох Вселенной и функция $z(t)$. Угловой размер, стандартные линейки и стандартные сирены. Термодинамика Вселенной.	50
6	Термодинамика Вселенной (продолжение). Сохранение энтропии. Барион-фотонное отношение. Частицы стандартной модели и эффективный стат. вес. Фазовые переходы в ранней Вселенной. Бариогенезис.	65
7	Закалка нейтрино. Закалка нейтронов. Нуклеосинтез. Синтез первичного гелия. Темная материя и закалка темной материи.	77
8	Сечение аннигиляции частиц темной материи. Рекомбинация электронов и последнее рассеяние фотонов. Эпоха реионизации. Температурная история Вселенной. Фоновая метрика в конформном времени.	92
9	Джинсовская неустойчивость. Космологические возмущения: скалярные, векторные, тензорные моды. Линеаризованные уравнения.	105
10	Скалярные моды. Моды за горизонтом и моды под горизонтом. Эволюция векторных и тензорных мод. Эволюция скалярных мод для однокомпонентных сред.	116

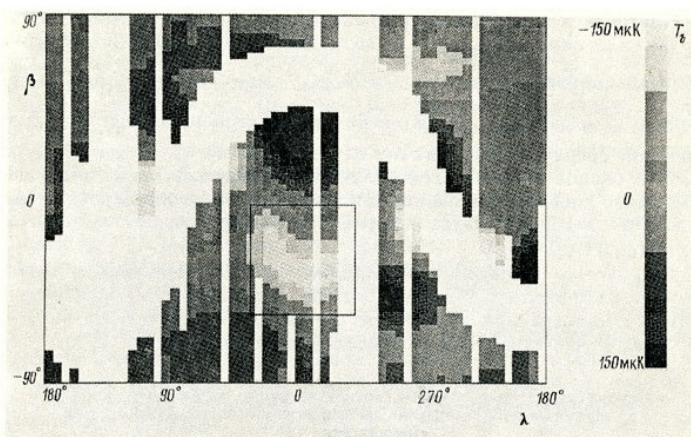
11	Скалярные моды нерелятивисткой материи в однокомпонентной модели (окончание). Начальные условия за горизонтом для адиабатической моды. Гауссовы случайные поля и начальные условия для адиабатических возмущений. Стандартная космологическая модель.	130
12	Динамика CDM и барион-фотонной среды до рекомбинации. Анизотропия реликтового излучения.	144
13	Механизмы генерации анизотропии CMB: Тензорные возмущения метрики. А плоская ли Вселенная? Поляризация реликтового излучения.	159
14	Инфляционная космология. Модели инфляции.	170
15	Модели инфляции. Вечная хаотическая инфляция. Мультиверс. Иерархия и типы мультиверсов.	180

Введение

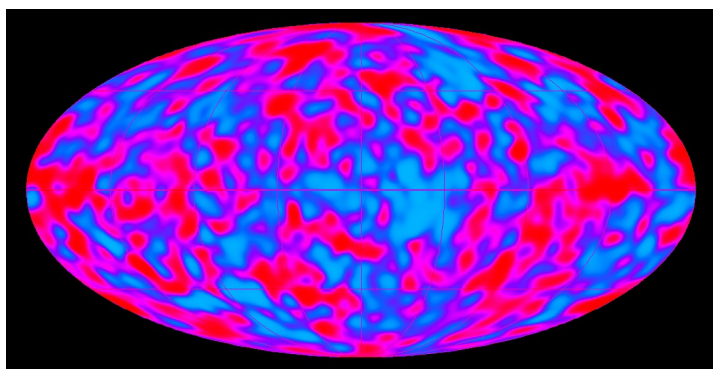
Современная космология

- Классическая космология (А.А. Фридман, В. Де Ситтер, Э. Хаббл, 1920-е)
- Теория космологических возмущений (Е.М. Лифшиц, 1940-е)
- Инфляционная космология (А.А. Старобинский, А. Гус (Guth), А.Д. Линде, конец 1970-х - начало 1980-х)

РЕЛИКТ - январь 1992



COBE - апрель 1992



COBE не подтвердил результаты РЕЛИКТ

A. J. Banday. RELIKT1 and COBE-DMR Results: a Comparison. In: Present and Future of the Cosmic Microwave Background, Proceedings of the Workshop Held in Santander, Spain, 28 June - 1 July 1993. Edited by J. L. Sanz, E. Martinez-Gonzalez, and L. Cayon. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. Also Lecture Notes in Physics, volume 429, 1994, p.111

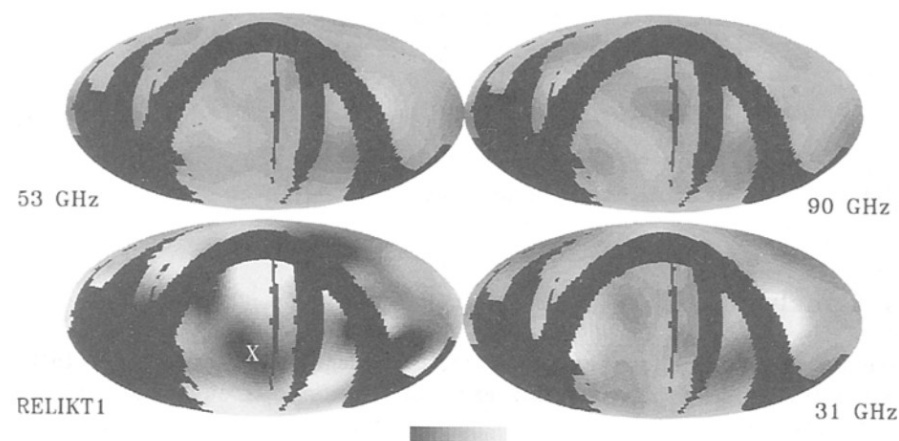


Figure 1: RELIKT1 and DMR sky maps in ecliptic coordinates smoothed to an effective FWHM of $\sim 29^\circ$. The temperature scale is thermodynamic. A band of width $\pm 15^\circ$ about the Galactic plane has been given zero weight, other blank regions correspond to the RELIKT1 sky coverage. The white cross on the RELIKT1 map shows the approximate centre of the 'blamb' region.

Литература

- Д.С. Горбунов, В.А. Рубаков. Введение в теорию ранней вселенной (два тома).
- А. Лайтман, В. Пресс, Р. Прайс, С. Тюкольски. Сборник задач по теории относительности и гравитации.

Как устроен курс

Презентации в сети: dec1.sinp.msu.ru/~panov

Coded in UTF-8

Панов Александр Дмитриевич

НИИЯФ МГУ, доктор физ.-мат. наук, ведущий
научный сотрудник.

E-mail: panov@dec1.sinp.msu.ru



Введение в современную космологию. Курс лекций.

**Книги, к которым я имею какое-то отношение:
сканировал, редактировал, переводил и т.д.**

Библиотека.

Все формулы пронумерованы!

Проверить вычисления: ★

Наука космология – не вполне обычна

- Научный метод: наблюдаемость и воспроизводимость
- Аппарат космологии описывает «ансамбль одинаковых вселенных», не единичную Вселенную
- Вселенная – уникальный объект
- Операционально неопределимое понятие вероятности – байесовская вероятность:
Вероятность определяется как степень уверенности в истинности суждения (Википедия).
- Cosmic variance – космическая неопределенность
⇒ некоторые предсказания в принципе не могут быть проверены с любой наперед заданной точностью.
- Мультиверс (4 уровня: Макс Тегмарк):
 - причинных областей (1-й уровень)
 - хаотической инфляции (2-й уровень)
 - квантовый (3-й уровень)
 - математический (4-й уровень)
- Методологический статус «других вселенных» неясен.

Лекция 1

Основы ОТО. I.

Дифференциальная геометрия: метрический тензор, афинная связность, ковариантная производная

- Движение тел в гравитационном поле не зависит от природы тел \Rightarrow
- Принцип эквивалентности \Rightarrow
- Гравитация есть явление геометрическое

Постулат: Движение в гравитационном поле есть свободное движение по геодезической линии искривленного пространства-времени

- ОТО – теория гравитации скалярной материи. (по-видимому (?), частицы с ненулевым спином должны нарушать принцип эквивалентности arXiv:1608.06572)

Два метода дифференциальной геометрии:

1. Координатный
2. Ковариантно-геометрический (Э. Картан, дифференциальные формы, внешнее дифференцирование)

Координаты x^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$ произвольным образом локально помечают точки (события) пространства-времени.

Квадрат интервала (суммирование по одинаковым верхним и нижним индексам, соглашение Эйнштейна):

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.1)$$

$g_{\mu\nu}$ – метрический тензор (сигнатура $+1, -1, -1, -1$).

Квадрат интервала есть фундаментальный инвариант – не зависит от того, в каких координатах мы работаем.

Интервал измеряется в единицах длины, но метрический тензор и координаты не имеют определенной размерности!

Размерности вообще

$$\hbar = c = k_B = 1 \quad (1.2)$$

$$E = mc^2; E = k_B T; \omega = E/\hbar; p = cE; p = \hbar k \Rightarrow [m] = [T] = [\omega] = [p] = [k] = [E] \quad (1.3)$$

Единица измерения энергии – ГэВ.

Переводные коэффициенты вычисляются подбором степеней c, \hbar, k_B .

Примеры:

$$[E] = [\hbar\omega] = \left[\frac{\hbar}{t} \right] \Rightarrow [t] = \frac{[\hbar]}{E} \Rightarrow \quad (1.4)$$

$$t(\text{GeV}^{-1}) = \frac{1.05 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}}{10^9 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}} \approx 6.6 \cdot 10^{-25} \text{ с} \quad (1.5)$$

$$l(\text{GeV}^{-1}) = \frac{1.05 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с} \times 3 \cdot 10^{10} \text{ см с}^{-1}}{10^9 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}} \approx 2.0 \cdot 10^{-14} \text{ см} \quad (1.6)$$

Таблица преобразования размерностей

Энергия	1 ГэВ = 1.602e-03 эрг
Масса	1 ГэВ = 1.783e-24 г
Температура	1 ГэВ = 1.161e+13 К
Длина	1 ГэВ ⁻¹ = 1.973e-14 см
Время	1 ГэВ ⁻¹ = 6.582e-25 с
Плотность числа частиц	1 ГэВ ³ = 1.301e+41 см ⁻³
Плотность энергии	1 ГэВ ⁴ = 2.085e+38 эрг·см ⁻³
Плотность массы	1 ГэВ ⁴ = 2.320e+17 г·см ⁻³

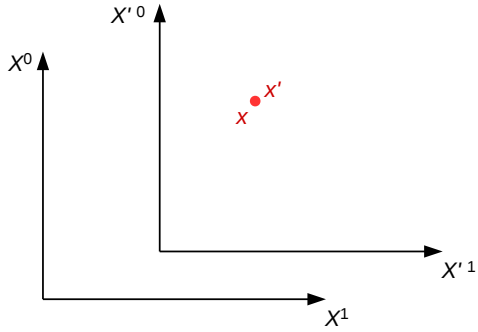
Энергия	1 эрг = 6.241e+02 ГэВ
Масса	1 г = 5.609e+23 ГэВ
Температура	1 К = 8.617e-14 ГэВ
Длина	1 см = 5.068e+13 ГэВ ⁻¹
Время	1 с = 1.519e+24 ГэВ ⁻¹
Плотность числа частиц	1 см ⁻³ = 7.684e-42 ГэВ ³
Плотность энергии	1 эрг·см ⁻³ = 4.796e-39 ГэВ ⁴
Плотность массы	1 г·см ⁻³ = 4.310e-18 ГэВ ⁴

Формализм ковариантен относительно произвольной (гладкой) замены координат (диффеоморфизм):

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv x'^{\mu}(x) \quad (1.7)$$

Ковариантность достигается за счет использования объектов, преобразующихся специальным образом.

Скаляры – не преобразуются:



$$\varphi'(x') = \varphi(x) \quad (1.8)$$

Контравариантные векторы (верхние индексы) преобразуются как дифференциалы координат (используется соглашение Эйнштейна о суммировании!)

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu}) \quad (1.9)$$

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} \quad (1.10)$$

$$A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu} \quad (1.11)$$

Ковариантные векторы (нижние индексы) преобразуются как производные скаляра

$$B_{\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu}} \Rightarrow B'_{\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} B_{\nu} \quad (1.12)$$

Построение скаляров из векторов:

$$A'^{\mu} B'_{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} A^{\sigma} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} B_{\rho} = \delta^{\rho}_{\sigma} A^{\sigma} B_{\rho} = A^{\rho} B_{\rho} \quad (1.13)$$

$\Rightarrow A^{\mu} B_{\mu}$ – инвариант.

В частности, производная по «направлению» скалярной функции – инвариант:

$$\partial_A \varphi = \left(A^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right) \varphi = A^{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu}} \equiv A^{\mu} \partial_{\mu} \varphi \quad (1.14)$$

Многомерные тензоры (по определению) преобразуются как произведения координат векторов:

$$B'^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\lambda}} B^{\rho}_{\sigma\tau} \quad (1.15)$$

Для символа Кронекера: $\delta'^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$ ★.

Свертка по верхнему и нижнему индексу уменьшает размерность тензора на 2:

$$A'^{\mu}_{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} A^{\rho}_{\sigma} = \delta^{\sigma}_{\rho} A^{\rho}_{\sigma} = A^{\sigma}_{\sigma} \quad (1.16)$$

(вообще не осталось индексов, скаляр)

Почему метрический тензор - тензор?

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} dx'^\sigma \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\rho} dx'^\rho = ds'^2 = g'_{\sigma\rho} dx'^\sigma dx'^\rho \quad (1.17)$$

$$\Rightarrow g'_{\sigma\rho} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\rho} g_{\mu\nu} \quad (1.18)$$

Обобщение: Если \forall тензора A_ν^μ

$$C_\lambda^\mu = A_\nu^\mu B_\lambda^\nu - \quad (1.19)$$

тензор, то и B_λ^ν - тензор (и т.д.)

Доказательство

$$C_\lambda'^{\mu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} C_\sigma^\rho = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} A_\nu^\rho B_\sigma^\nu \quad (1.20)$$

$$C_\lambda'^{\mu} = A_\nu'^{\mu} B_\lambda'^{\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} A_\sigma^\rho B_\lambda'^{\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} A_\nu^\rho B_\lambda'^{\sigma} \Rightarrow \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} B_\sigma^\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} B_\lambda'^{\sigma} \Rightarrow \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} B_\sigma^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} B_\lambda'^{\sigma} \quad \left| \quad \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} \Rightarrow \quad (1.23)$$

$$B_\lambda'^{\alpha} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} B_\sigma^\nu \quad (1.24)$$

Следствие: Величина, задаваемая обратной матрицей к метрическому тензору, сама тензор:

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu \Rightarrow g^{\mu\nu} - \text{тензор} \quad (1.25)$$

Поднятие и опускание индексов

Если A^μ – контравариантный вектор, то

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \quad (1.26)$$

– ковариантный вектор.

И наоборот:

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \quad (1.27)$$

Считают, что A^μ и A_μ – одна и та же величина, записанная по-разному (строго говоря, это неверно).

$T^\mu{}_\nu$ и $T_\nu{}^\mu$ – не одно и то же!

$$g^{\mu\nu} T^\mu{}_\nu = T^{\mu\nu} \quad (1.28)$$

$$g^{\mu\nu} T_\nu{}^\mu = T^{\nu\mu} \quad (1.29)$$

Инвариантный объем

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \quad (1.30)$$

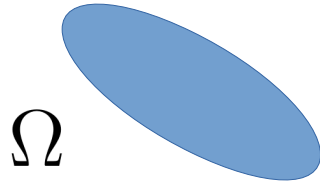
$$\hat{J} = (J^\rho_\mu) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \end{pmatrix}_{\substack{\leftarrow \text{столбец} \\ \leftarrow \text{строка}}} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

$$\hat{g}' = \hat{J} \hat{g} \hat{J}^T \quad (1.32)$$

$$g \equiv \det \hat{g}; \quad J \equiv \det \hat{J} \quad (1.33)$$

$$g' = J^2 g \Rightarrow J = \sqrt{\frac{g'}{g}} \quad (1.34)$$

маленький
4-объем,
почти
плоский



Элемент объема - это геометрическое понятие,
инвариант!

$$V = \int_{\Omega} d^4x; \quad V' = \int_{\Omega} d^4x' \quad (1.35)$$

$$V \neq V' \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} V &= \int_{\Omega} d^4x = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right) d^4x' = \int_{\Omega} \sqrt{\frac{g'}{g}} d^4x' = \\ &= \sqrt{\frac{g'}{g}} \int_{\Omega} d^4x' = \sqrt{\frac{g'}{g}} V' \Rightarrow \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$V = \sqrt{\frac{g'}{g}} V' \Rightarrow V \sqrt{-g} = V' \sqrt{-g'} \quad (1.38)$$

$$\sqrt{-g} \int_{\Omega} d^4x = \sqrt{-g'} \int_{\Omega} d^4x' \quad (1.39)$$

$$\int_{\Omega} \sqrt{-g} d^4x = \int_{\Omega} \sqrt{-g'} d^4x' \quad (1.40)$$

$\sqrt{-g} d^4x$ - инвариантный элемент объема

Инвариантный элемент объема - инвариантная мера интегрирования, но не объем в физическом смысле!

$$[g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu] = [L^2]$$

$$[\sqrt{-g} dx] = [L]$$

$$[d^3x] = [\text{любая размерность}] \Rightarrow$$

$$[\sqrt{-g} d^4x] = [\text{любая размерность}]$$

Ковариантные производные

$$(\partial_\mu \varphi)' = \frac{\partial \varphi'}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \varphi \quad (1.41)$$

– производная скаляра преобразуется как (ковариантный) вектор.

$$\begin{aligned} (\partial_\mu A^\nu)' &= \frac{\partial}{\partial x'^\mu} A'^\nu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} A^\alpha \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} \right) A^\alpha + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} = \\ &= \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \cdot \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} A^\alpha + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \partial_\beta A^\alpha \end{aligned} \quad (1.42)$$

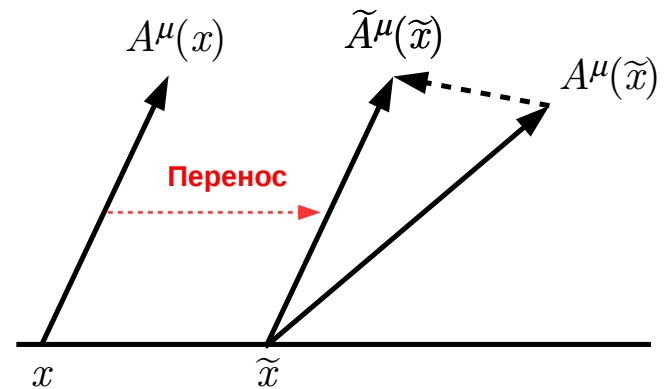
Производная вектора преобразуется как тензор плюс еще какая-то добавка.

Параллельный перенос

Хотим ковариантную производную:

$$\begin{cases} (\nabla_\mu A^\nu)' = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \nabla_\alpha A^\beta \\ \nabla_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi \end{cases} \quad (1.43)$$

Проблема: Помимо изменения поля «самого по себе» есть еще добавка, связанная с изменением компонент поля из-за криволинейности системы координат.



Сначала параллельно перенести $A^\mu(x)$ в точку \tilde{x} , а потом сравнить с $A^\mu(\tilde{x})$! Перенос:

$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x}) = A^\mu(x) - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu dx^\lambda \quad (1.44)$$

$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ – коэффициенты аффинной связности

• Вообще говоря, определены совершенно независимо от $g_{\mu\nu}$!

$$\begin{aligned} A^\mu(\tilde{x}) - \tilde{A}^\mu(\tilde{x}) &= A^\mu(\tilde{x}) - [A^\mu(x) - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu dx^\lambda] = \\ &= \partial_\lambda A^\mu dx^\lambda + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu dx^\lambda = \\ &= (\partial_\lambda A^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu) dx^\lambda \equiv \nabla_\lambda A^\mu dx^\lambda \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$\boxed{\nabla_\lambda A^\mu = \partial_\lambda A^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu} \quad (1.46)$$

Требуем, чтобы $\nabla_\lambda A^\mu$ был тензором!

Это будет определять закон преобразования $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$.

$$\nabla_\lambda B_\mu = ?$$

Скаляр *не должен меняться* при параллельном переносе:

$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x})\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) = A^\mu(x)B_\mu(x) \quad (1.47)$$

$$[A^\mu(x) - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu dx^\lambda]\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) = A^\mu(x)B_\mu(x) \Rightarrow \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned} A^\mu(x)[\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) - B_\mu(x)] &= \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu dx^\lambda \tilde{B}_\mu(\tilde{x}) \cong \\ &\cong \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu dx^\lambda B_\mu(x) = \Gamma_{\mu\lambda}^\nu A^\mu dx^\lambda B_\nu \Rightarrow \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) - B_\mu(x) = \Gamma_{\mu\lambda}^\nu dx^\lambda B_\nu \quad (1.50)$$

$$\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) = B_\mu(x) + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu dx^\lambda B_\nu \quad (1.51)$$

$$B_\mu(\tilde{x}) - \tilde{B}_\mu(\tilde{x}) = (\partial_\lambda B_\mu - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu B_\nu)dx^\lambda \Rightarrow \quad (1.52)$$

$$\boxed{\nabla_\lambda B_\mu = \partial_\lambda B_\mu - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu B_\nu} \quad (1.53)$$

Правило Лейбница (легко проверяется ★):

$$\nabla_\lambda(A^\mu B_\nu) = (\nabla_\lambda A^\mu)B_\nu + A^\mu(\nabla_\lambda B_\nu) \quad (1.54)$$

Правило дифференцирования тензоров высшего ранга следует из правила Лейбница:

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda(A^\mu B_\nu) &= (\partial_\lambda A^\mu + \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu A^\sigma)B_\nu + A^\mu(\partial_\lambda B_\nu - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma B_\sigma) = \\ &= \partial_\lambda(A^\mu B_\nu) + \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu (A^\sigma B_\nu) - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma (A^\mu B_\sigma) \Rightarrow \end{aligned} \quad (1.55)$$

$$\boxed{\nabla_\lambda C_\nu^\mu = \partial_\lambda C_\nu^\mu + \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu C_\nu^\sigma - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma C_\sigma^\mu} \quad (1.56)$$

Лекция 2

Основы ОТО. II. Свойства афинной связности. Тензор кривизны.
Действие для гравитации.

Закон преобразования аффинных связностей

$$\nabla_{\lambda} A^{\mu} = \partial_{\lambda} A^{\mu} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} A^{\nu} - \text{Должно быть тензором!} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} (\nabla_{\lambda} A^{\mu})' &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} (\nabla_{\alpha} A^{\beta}) = \\ &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} (\partial_{\alpha} A^{\beta} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta} A^{\gamma}) = \\ &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial A^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta} A^{\gamma} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} (\partial_{\lambda} A^{\mu} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} A^{\nu})' &= \frac{\partial A'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} + \Gamma'_{\lambda\gamma}{}^{\mu} A'^{\gamma} = \\ &= \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\alpha}} A^{\alpha} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma'_{\lambda\gamma}{}^{\mu} \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\delta}} A^{\delta} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\Gamma'_{\alpha\gamma}{}^{\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} A^{\gamma} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\alpha}} A^{\alpha} + \Gamma'_{\lambda\gamma}{}^{\mu} \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\delta}} A^{\delta} \quad (2.4)$$

$$A^{\gamma}, A^{\alpha}, A^{\delta} \rightarrow A^{\varepsilon}$$

$$\Gamma'_{\alpha\varepsilon}{}^{\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\varepsilon}} + \Gamma'_{\lambda\gamma}{}^{\mu} \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\varepsilon}} \left| \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\delta}} \right. \quad (2.5)$$

$$\Gamma'_{\lambda\delta}{}^{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\delta}} \Gamma_{\alpha\varepsilon}^{\beta} - \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\delta}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\varepsilon}} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\lambda}} + \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\varepsilon}} \equiv 0 \quad \star \quad (2.7)$$

$$\Gamma'_{\lambda\delta}{}^{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\delta}} \Gamma_{\alpha\varepsilon}^{\beta} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\delta} \partial x'^{\lambda}} \quad (2.8)$$

Аффинная связность – не тензор!

Кручение

$$C_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} \quad (2.9)$$

Преобразуется как тензор!

Локально Лоренцевы системы отсчета и отсутствие кручения

1. Метрический тензор имеет вид $g = \{1, -1, -1, -1\}$
2. Все $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = 0$

Если $C_{\beta\gamma}^{\alpha} = 0$ хотя бы в одной системе отсчета, то $C_{\beta\gamma}^{\alpha} = 0$ во всех системах отсчета \Rightarrow

Если $C_{\beta\gamma}^{\alpha} \neq 0$ хотя бы в одной системе отсчета, то $C_{\beta\gamma}^{\alpha} \neq 0$ в любой системе отсчета, следовательно в любой системе отсчета $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \neq 0$ и гравитацию исключить невозможно.

Чтобы гравитацию можно было локально исключить, в ОТО необходимо $C_{\beta\gamma}^\alpha \equiv 0$, $\Rightarrow \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$

$C_{\beta\gamma}^\alpha = 0$ является достаточным условием, чтобы было возможно занулить аффинную связность.

$$x'^\mu = x^\mu + T_{\sigma\rho}^\mu x^\sigma x^\rho \quad (2.10)$$

$$\left. \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right|_0 = \delta_\nu^\mu; \quad \left. \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right|_0 = \delta_\mu^\nu \quad (2.11)$$

$$\left. \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\varepsilon} \right|_0 = T_{\varepsilon\beta}^\mu + T_{\beta\varepsilon}^\mu \Rightarrow \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda\delta}'^\mu &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\delta} \Gamma_{\alpha\varepsilon}^\beta - \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\delta} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\varepsilon} = \\ &= \delta_\lambda^\alpha \delta_\beta^\mu \delta_\delta^\varepsilon \Gamma_{\alpha\varepsilon}^\beta - \delta_\lambda^\beta \delta_\delta^\varepsilon (T_{\varepsilon\beta}^\mu + T_{\beta\varepsilon}^\mu) = \\ &= \Gamma_{\lambda\delta}^\mu - (T_{\delta\lambda}^\mu + T_{\lambda\delta}^\mu) \quad (2.13) \end{aligned}$$

$$T_{\delta\lambda}^\mu + T_{\lambda\delta}^\mu = \Gamma_{\lambda\delta}^\mu(0) \Rightarrow \Gamma_{\lambda\delta}'^\mu(0) = 0. \quad (2.14)$$

Чтобы подобрать $T_{\delta\lambda}^\mu$ достаточно, чтобы $\Gamma_{\delta\lambda}^\mu = \Gamma_{\lambda\delta}^\mu$.
Например:

$$T_{\delta\lambda}^\mu = \frac{1}{2} \Gamma_{\delta\lambda}^\mu \quad (2.15)$$

С помощью преобразования

$$\hat{g}' = \hat{J} \hat{g} \hat{J}^T, \quad \hat{J} = \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right), \quad x^\mu = J_\nu^\mu x'^\nu \quad (2.16)$$

симметричная матрица \hat{g} может быть приведена к диа-

гональному виду

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} k^0 & & & 0 \\ & -k^1 & & \\ & & -k^2 & \\ 0 & & & -k^3 \end{pmatrix}, \quad k^\mu > 0 \quad (2.17)$$

С помощью масштабного преобразования:

$$x'^\mu = x^\mu \frac{1}{\sqrt{k^\mu}} \Rightarrow g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Преобразование (2.10) в силу (2.11) не меняет тензоры в начале координат, поэтому связность можно занулить после того, как как \hat{g} приведен к лоренцову виду.

Метрический тензор можно привести к Лоренцеву виду и связность можно занулить одновременно – это локально Лоренцева система отсчета

Однако производные $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, вообще говоря, не исчезают!

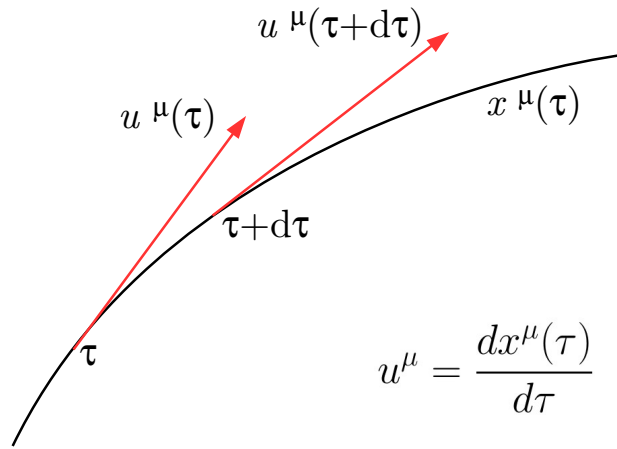
В частности, неустранимы приливные силы.

Вывод:

Для того, чтобы можно было ввести локально-лоренцевы системы отсчета необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты связности были симметричны \Rightarrow

Первое дополнительное условие ОТО на коэффициенты связности: симметричность

Геодезические



Геодезическая линия – такая кривая, вдоль которой касательный вектор к ней переносится параллельно самому себе.

$$u^\mu(\tau + d\tau) = u^\mu + \frac{du^\mu(\tau)}{d\tau}d\tau \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} u^\mu(\tau + d\tau) &= \tilde{u}^\mu(\tau + d\tau) = u^\mu(\tau) - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu u^\nu(\tau)dx^\lambda = \\ &= u^\mu(\tau) - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu u^\nu(\tau)u^\lambda(\tau)d\tau \Rightarrow \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\frac{du^\mu}{d\tau}d\tau = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu u^\nu(\tau)u^\lambda(\tau)d\tau \Rightarrow \quad (2.21)$$

$$\boxed{\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu u^\nu u^\lambda = 0} \quad (2.22)$$

Меняем местами ν и λ и складываем:

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \frac{1}{2}(\Gamma_{\nu\lambda}^\mu + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu)u^\nu u^\lambda = 0 \quad (2.23)$$

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\{\nu\lambda\}}^\mu u^\nu u^\lambda = 0 \quad (2.24)$$

$$\Gamma_{\{\nu\lambda\}}^\mu = \frac{1}{2}(\Gamma_{\nu\lambda}^\mu + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu) \quad (2.25)$$

Геодезические определяются симметризованными коэффициентами связности.

Другая форма уравнения геодезической:

$$\boxed{\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0} \quad (2.26)$$

Движение частиц в гравитационном поле по геодезическим – постулат, который не имеет доказательства.

Первая проблема ОТО со спином: частицы со спином не движутся по геодезическим (?).

Вторая проблема ОТО со спином: нет рецепта расчета гравитационного поля спина.

Система спинов может создавать макроскопический момент и должна приводить к макроскопическому гравитационному полю, которое ОТО не может считать \Rightarrow .

Попытка учета поля спинов приводит к теориям Эйнштейна-Картана, в которых кручение не равно нулю.

Второе дополнительное условие на коэффициенты связности: метричность

Хотим, чтобы операции поднятия/опускания индексов была универсальной:

$$g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) = \nabla_\lambda A_\mu; \quad A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu \text{ т.е.} \quad (2.27)$$

$$g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) = \nabla_\lambda(g_{\mu\nu}A^\nu) \quad (2.28)$$

По правилу Лейбница:

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda(g_{\mu\nu}A^\nu) &= (\nabla_\lambda g_{\mu\nu})A^\nu + g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) = \\ &= g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) \Rightarrow \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\boxed{\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0} \quad (2.30)$$

Метрический тензор ковариантно постоянен, если *связность метрична* (*связность совместима с метрикой*).

Метричность связности априори ниоткуда не следует \rightarrow рассматриваются обобщения ОТО, в которых связность не метрична.

Явное выражение коэффициентов связности через метрический тензор

Используется *одновременно* метричность $g_{\mu\nu}$ и симметричность связности:

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma g_{\mu\sigma} = 0. \quad (2.31)$$

40 линейных уравнений с 40 неизвестными $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma g_{\mu\sigma} &= \partial_\lambda g_{\mu\nu} \quad [\lambda\mu\nu] \quad | \times (+1) \\ \Gamma_{\mu\nu}^\sigma g_{\sigma\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma g_{\nu\sigma} &= \partial_\mu g_{\nu\lambda} \quad [\mu\nu\lambda] \quad | \times (+1) \\ \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma g_{\sigma\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^\sigma g_{\lambda\sigma} &= \partial_\nu g_{\lambda\mu} \quad [\nu\lambda\mu] \quad | \times (-1) \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$2\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\lambda\mu} \quad |g^{\nu\delta} \star \quad (2.33)$$

$$\boxed{\Gamma_{\lambda\mu}^\delta = \frac{1}{2}g^{\delta\nu}(\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu})} \quad (2.34)$$

Для того, чтобы $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ выражались через $g_{\mu\nu}$, метричность и симметричность связности необходимы!

Можно посчитать, что метричность+симметричность вместе дают 64 уравнения, однозначно определяющие все 64 компоненты связности \star .

Если в некоторой точке все $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = 0$, то все $\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = 0$ \star .

Выражение (2.34) иногда называется символами Кристоффеля и обозначается

$$\left\{ \begin{array}{c} \delta \\ \lambda\mu \end{array} \right\} = \frac{1}{2}g^{\delta\nu}(\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}) \quad (2.35)$$

Уравнение геодезической из принципа максимума длины или из принципа наименьшего действия

$\delta S = 0$ – принцип действия для свободной частицы

$$\begin{aligned} S &= -m \int_a^b ds = -m \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \backslash x = x(\tau) \backslash = \\ &= -m \int_{\tau_a}^{\tau_b} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\tau \quad (2.36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta S &= -m \int \frac{1}{2\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \delta(g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu) = \\ &= -\frac{m}{2} \int \frac{1}{\sqrt{\dot{x}_\alpha \dot{x}^\alpha}} \left(\partial_\sigma g_{\mu\nu} \delta x^\sigma \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + 2g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \frac{d\delta x^\nu}{d\tau} \right) d\tau = \\ &= \backslash \sigma \leftrightarrow \nu \text{ в первом слагаемом,} \\ &\quad \text{по частям второе слагаемое} \backslash = \\ &= -\frac{m}{2} \int \frac{1}{\sqrt{\dot{x}_\alpha \dot{x}^\alpha}} \left[\partial_\nu g_{\mu\sigma} \dot{x}^\mu \dot{x}^\sigma - 2 \frac{d(g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu)}{d\tau} \right] \delta x^\nu d\tau = \\ &= 0 \quad (2.37) \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu) - \frac{1}{2} \partial_\nu g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\sigma = 0 \quad (2.38)$$

$$\dot{x}^\mu \frac{dg_{\mu\nu}}{d\tau} + g_{\mu\nu} \ddot{x}^\mu - \frac{1}{2} \partial_\nu g_{\mu\sigma} \dot{x}^\mu \dot{x}^\sigma = 0 \quad | g^{\nu\rho} \quad (2.39)$$

$$\frac{dg_{\mu\nu}}{d\tau} = \partial_\sigma g_{\mu\nu} \dot{x}^\sigma \quad (2.40)$$

$$\ddot{x}^\rho + g^{\rho\nu} \left(\partial_\sigma g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu g_{\mu\sigma} \right) \dot{x}^\sigma \dot{x}^\mu = 0 \quad (2.41)$$

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\mu = \frac{1}{2} (\partial_\sigma g_{\mu\nu} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\mu + \partial_\mu g_{\sigma\nu} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\mu) \quad (2.42)$$

$$\ddot{x}^\rho + \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\sigma g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\nu g_{\mu\sigma}) \dot{x}^\sigma \dot{x}^\mu = 0 \quad (2.43)$$

$$\frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\sigma g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\nu g_{\mu\sigma}) = \Gamma_{\sigma\mu}^\rho \quad (2.44)$$

$$\boxed{\ddot{x}^\rho + \Gamma_{\sigma\mu}^\rho \dot{x}^\sigma \dot{x}^\mu = 0} \quad (2.45)$$

$$\boxed{\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma_{\sigma\mu}^\rho \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0} \quad (2.46)$$

Тензор Леви-Чевита

Хотим, чтобы $E^{\mu\nu\rho\sigma}$ был тензором, и в локально лоренцевой (галилеевой) системе (x)

$$E^{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad \varepsilon^{0123} = 1 \quad (2.47)$$

Как будет в произвольной системе (x')?

$$E'^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.48)$$

$$\left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| = \sqrt{\frac{g'}{g}} = \sqrt{-g'} \Rightarrow \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \frac{1}{\sqrt{-g'}} \Rightarrow \quad (2.49)$$

$$E'^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g'}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.50)$$

$$\boxed{E^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}} \quad (2.51)$$

Аналогично можно найти ★:

$$\boxed{E_{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{-g} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}} \quad (2.52)$$

Тензор кривизны

Два способа ввести тензор кривизны.

1. Через коммутатор ковариантной производной $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \varphi = \partial_\mu \partial_\nu \varphi - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \varphi \quad (2.53)$$

$$\nabla_\nu \nabla_\mu \varphi = \partial_\nu \partial_\mu \varphi - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \partial_\lambda \varphi \Rightarrow \quad (2.54)$$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \varphi = -(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda) \partial_\lambda \varphi = -C_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \varphi = 0 \quad (2.55)$$

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A^\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu A^\lambda = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\lambda = ? \quad (2.56)$$

$$\nabla_\mu (\nabla_\nu A^\lambda) = \partial_\mu (\nabla_\nu A^\lambda) - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma (\nabla_\sigma A^\lambda) + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda (\nabla_\nu A^\sigma) = \dots \quad (2.57)$$

$$\nabla_\nu (\nabla_\mu A^\lambda) = \dots \quad (2.58)$$

(посчитать! ★)

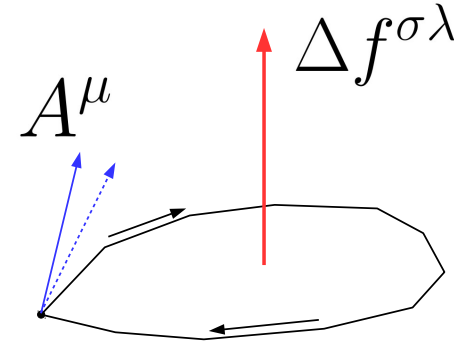
$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\lambda = A^\sigma R_{\sigma\mu\nu}^\lambda \quad (2.59)$$

$$R_{\sigma\mu\nu}^\lambda = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \quad (2.60)$$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A_\lambda = A_\sigma R_{\mu\nu\lambda}^\sigma \quad (\text{посчитать } \star) \quad (2.61)$$

Отсюда видно, почему тензор кривизны – действительно тензор.

2. Параллельный перенос вдоль замкнутого контура



$$\tilde{A}^\mu(x + dx) = A^\mu(x) - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu dx^\lambda \quad (2.62)$$

$$\delta A^\mu(x) = \tilde{A}^\mu(x + dx) - A^\mu(x) = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu dx^\lambda \quad (2.63)$$

$$\Delta A^\mu = \oint \delta A^\mu(x) = -\oint \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu dx^\lambda \quad (2.64)$$

Формула Стокса:

$$\oint B_{\dots\lambda} dx^\lambda = \frac{1}{2} \int df^{\sigma\lambda} (\partial_\sigma B_{\dots\lambda} - \partial_\lambda B_{\dots\sigma}) \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} \Delta A^\mu &= -\frac{1}{2} \int df^{\sigma\lambda} [\partial_\sigma (\Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu) - \partial_\lambda (\Gamma_{\nu\sigma}^\mu A^\nu)] \simeq \\ &\simeq -\frac{1}{2} \Delta f^{\sigma\lambda} (\partial_\sigma \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \partial_\sigma A^\nu - \partial_\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\mu A^\nu - \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \partial_\lambda A^\nu) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Внутри контура A^μ изменяется только за счет параллельного переноса, поэтому

$$\delta A^\mu(x) = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu dx^\lambda \Rightarrow \partial_\lambda A^\mu = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned}
\Delta A^\mu &= \\
-\frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}(\partial_\sigma\Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu\Gamma_{\rho\sigma}^\nu A^\rho - \partial_\lambda\Gamma_{\nu\sigma}^\mu A^\nu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu\Gamma_{\rho\lambda}^\nu A^\rho) &= \\
= \frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}(\partial_\lambda\Gamma_{\sigma\nu}^\mu - \partial_\sigma\Gamma_{\lambda\nu}^\mu + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \Gamma_{\sigma\rho}^\mu\Gamma_{\nu\lambda}^\rho)A^\nu &= \\
= \frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}R^\mu_{\sigma\lambda\nu}A^\nu & \quad (2.68)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta A^\mu = \frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}R^\mu_{\sigma\lambda\nu}A^\nu} \quad (2.69)$$

Из вывода видно, что формула верна универсально, независимо от метричности и симметричности связности.

Свойства тензора кривизны

$$R^\lambda_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \partial_\nu\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda\Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda\Gamma_{\mu\sigma}^\rho \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned}
R_{\tau\sigma\mu\nu} &= g_{\tau\lambda}R^\lambda_{\sigma\mu\nu} = \\
&= g_{\tau\lambda}(\partial_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \partial_\nu\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda\Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda\Gamma_{\mu\sigma}^\rho) \quad (2.71)
\end{aligned}$$

1.

$$R_{\tau\sigma\mu\nu} = -R_{\tau\sigma\nu\mu} \quad \text{— очевидно} \quad (2.72)$$

2.

$$R_{\tau\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\tau\mu\nu} \quad (2.73)$$

— не очевидно, использует метричность, не универсально

$$\Gamma_{\xi,\nu\sigma} = g_{\xi\lambda}\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda = \frac{1}{2}(\partial_\nu g_{\sigma\xi} + \partial_\sigma g_{\xi\nu} - \partial_\xi g_{\nu\sigma}) \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned}
R_{\tau\sigma\mu\nu} &= +g_{\tau\lambda}(\partial_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda\Gamma_{\nu\sigma}^\rho) \quad (2.75) \\
&\quad -g_{\tau\lambda}(\partial_\nu\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\nu\rho}^\lambda\Gamma_{\mu\sigma}^\rho)
\end{aligned}$$

$\nu\sigma \equiv ..$

$$\begin{aligned}
g_{\tau\lambda}(\partial_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda\Gamma_{\nu\sigma}^\rho) &= g_{\tau\lambda}\nabla_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda = \nabla_\mu(g_{\tau\lambda}\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda) = \\
&= \nabla_\mu(\Gamma_{\tau,\nu\sigma}) = \partial_\mu\Gamma_{\tau,\nu\sigma} - \Gamma_{\tau\mu}^\lambda\Gamma_{\lambda,\nu\sigma} = \\
&= \partial_\mu\Gamma_{\tau,\nu\sigma} - g^{\lambda\xi}\Gamma_{\xi,\tau\mu}\Gamma_{\lambda,\nu\sigma} \quad (2.76)
\end{aligned}$$

$$g_{\tau\lambda}(\partial_\nu\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\nu\rho}^\lambda\Gamma_{\mu\sigma}^\rho) = \partial_\nu\Gamma_{\tau,\mu\sigma} - g^{\lambda\xi}\Gamma_{\xi,\tau\nu}\Gamma_{\lambda,\mu\sigma} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned}
R_{\tau\sigma\mu\nu} &= \partial_\mu \Gamma_{\tau,\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma_{\tau,\mu\sigma} + g^{\lambda\xi} (\Gamma_{\xi,\mu\sigma} \Gamma_{\lambda,\nu\tau} - \Gamma_{\xi,\nu\sigma} \Gamma_{\lambda,\mu\tau}) = \\
&= \partial_\mu \partial_\sigma g_{\tau\nu} - \partial_\mu \partial_\tau g_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\tau\mu} + \partial_\nu \partial_\tau g_{\mu\sigma} + \\
&\quad + g^{\lambda\xi} (\Gamma_{\xi,\mu\sigma} \Gamma_{\lambda,\nu\tau} - \Gamma_{\xi,\nu\sigma} \Gamma_{\lambda,\mu\tau}) \quad (2.78)
\end{aligned}$$

Отсюда свойство (2.73) уже очевидно.

3.

$$R_{\tau\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\tau\sigma} \quad \star \quad (2.79)$$

4.

$$R^\sigma_{\rho\mu\nu} + R^\sigma_{\mu\nu\rho} + R^\sigma_{\nu\rho\mu} = 0 \quad (2.80)$$

Из тождества Якоби:

$$[\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]\varphi + [\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\rho]]\varphi + [\nabla_\nu, [\nabla_\rho, \nabla_\mu]]\varphi = 0; \quad (2.81)$$

$$[\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]\varphi = -\partial_\sigma \varphi R^\sigma_{\mu\nu\rho} \Rightarrow (2.80) \quad (2.82)$$

5. Тождество Бьянки \star :

$$\nabla_\rho R^\lambda_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\mu R^\lambda_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\nu R^\lambda_{\sigma\rho\mu} = 0 \quad (2.83)$$

Из тождества Якоби

$$[\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]A^\lambda + [\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\rho]]A^\lambda + [\nabla_\nu, [\nabla_\rho, \nabla_\mu]]A^\lambda = 0; \quad (2.84)$$

Число независимых компонент \star :

$$N = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12} \quad (2.85)$$

$$n = 4 \rightarrow N = 20 \quad (2.86)$$

$$n = 3 \rightarrow N = 6 \quad (2.87)$$

$$n = 2 \rightarrow N = 1 \quad (2.88)$$

Тензор Риччи:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} \quad (2.89)$$

Скаляр кривизны (не гауссова кривизна!):

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu_{\mu} = R^{\lambda\nu}_{\lambda\nu} \quad (2.90)$$

Получение уравнений Эйнштейна из вариационного принципа

Сначала одна гравитация – без материи.

Действие должно быть общековариантной величиной.

1. Хотим иметь уравнения второго порядка для $g_{\mu\nu}$.
2. Уравнения должны быть линейными относительно вторых производных.

1. Простейшее действие

$$S_\Lambda = -\Lambda \int_\Omega d^4x \sqrt{-g} \quad (2.91)$$

$$\delta S_\Lambda = -\Lambda \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) = \Lambda \int d^4x \frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} \quad (2.92)$$

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}; \quad \delta g = ? \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned}
\det(\hat{g} + \delta\hat{g}) &= \det[\hat{g}(1 + \hat{g}^{-1}\delta\hat{g})] = \\
&= \det \hat{g} \cdot \det(1 + \hat{g}^{-1}\delta\hat{g}) = g(1 + \text{Tr}(\hat{g}^{-1}\delta\hat{g})) = \\
&= g(1 + g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) = g + g \cdot g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \Rightarrow (2.94)
\end{aligned}$$

$$\delta g = g \cdot g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \quad (2.95)$$

$$\delta S_\Lambda = -\frac{\Lambda}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (2.96)$$

2. Вклад $\sim \int d^4x \sqrt{-g} f(R)$

Проблема: R зависит от вторых производных g по x .
Получим ли уравнения выше второго порядка?

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \varphi', \varphi'') \quad (2.97)$$

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} + \partial^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi''} \right) \delta \varphi = 0 \quad (2.98)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} + \partial^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi''} = 0 \quad (2.99)$$

– начиная с второго члена входят производные высших порядков.

Но если φ'' входят в \mathcal{L} в комбинации $\varphi\varphi''$, то:

$$\frac{\partial(\varphi\varphi'')}{\partial \varphi} = \varphi''; \quad \partial \left(\frac{\partial(\varphi\varphi'')}{\partial \varphi'} \right) = 0; \quad \partial^2 \left(\frac{\partial(\varphi\varphi'')}{\partial \varphi''} \right) = \varphi'' \quad (2.100)$$

производных выше 2-го порядка не получается.

R зависит от $g''_{\mu\nu}$ именно так.

Можно показать, что $f(R)$ -гравитация сводится к R -гравитации плюс некоторое скалярное поле. Поэтому достаточно взять $f(R) = R$.

$$S_R = -K \int d^4x \sqrt{-g} R = -K \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.101)$$

$$\delta S_R = \begin{array}{l} -K \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) R \\ -K \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\ -K \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \end{array} \left| \begin{array}{l} = \delta S_1 \\ = \delta S_2 \\ = \delta S_3 \end{array} \right. \quad (2.102)$$

Лекция 3

Уравнения Эйнштейна, сохранение энергии-импульса, гравитационные волны, антигравитация. Уравнение Фридмана и полная система уравнений космологии.

Получение уравнений Эйнштейна из вариационного принципа (продолжение)

$$S_R = -K \int d^4x \sqrt{-g} R = -K \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \delta S_R &= -K \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) R &= \delta S_1 \\ &-K \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} &= \delta S_2 \\ &-K \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \delta S_3 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\delta S_1 = -\frac{K}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (3.3)$$

$$\delta S_2 = -K \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (3.4)$$

$\delta g^{\mu\nu} = ?$

$$\delta(g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda}) = 0 \Rightarrow g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\lambda} = -g_{\nu\lambda} \delta g^{\mu\nu} | g^{\rho\lambda} \quad (3.5)$$

$$\delta_{\nu}^{\rho} \delta g^{\mu\nu} = -g^{\rho\lambda} g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\lambda} \Rightarrow \quad (3.6)$$

$$\delta g^{\mu\rho} = -g^{\rho\lambda} \delta g_{\nu\lambda} g^{\mu\nu} | \rho \leftrightarrow \nu \quad (3.7)$$

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} \delta g_{\rho\lambda} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \delta S_2 &= +K \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} \delta g_{\rho\lambda} = \\ &= +K \int d^4x \sqrt{-g} R^{\rho\lambda} \delta g_{\rho\lambda} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\delta S_2 = +K \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (3.10)$$

$$\delta S_3 = -K \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \quad (3.11)$$

$$R^{\mu}_{\nu\lambda\rho} = \partial_{\lambda} \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} - \partial_{\rho} \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \delta R^{\mu}_{\nu\lambda\rho} &= \partial_{\lambda} \delta \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} - \partial_{\rho} \delta \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} + \\ &+ \delta \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} \delta \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} - \delta \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} \delta \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$\delta \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ – тензор, в отличие от $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$! (Почему? ★)

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda}(\delta \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}) - \nabla_{\rho}(\delta \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}) &= \\ &= \partial_{\lambda}(\delta \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}) + \Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma} \delta \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} \delta \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho} \delta \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} - \\ &- \partial_{\rho}(\delta \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}) - \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} \delta \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\rho\nu} \delta \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\rho\lambda} \delta \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} = \\ &= \delta R^{\mu}_{\nu\lambda\rho} \Rightarrow \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\lambda}(\delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}) - \nabla_{\nu}(\delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}) \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
\delta S_3 &= -K \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\nabla_\lambda(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)] = \\
&= -K \int d^4x \sqrt{-g} [\nabla_\lambda(g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu(g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)] = \\
&= -K \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\lambda(g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta\Gamma_{\mu\sigma}^\sigma) = \\
&= \left\langle \nabla_\lambda A^\lambda = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\lambda(\sqrt{-g} A^\lambda) \star \right\rangle = \\
&= -K \int_\Omega d^4x \partial_\lambda[\sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta\Gamma_{\mu\sigma}^\sigma)] = 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

– так как под интегралом полная дивергенция, а все вариации на границе исчезают.

$$\boxed{\delta S_3 = 0} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
\delta S &= \delta S_\Lambda + \delta S_R = \\
&= -\frac{\Lambda}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\
&\quad - \frac{K}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R \delta g_{\mu\nu} \\
&\quad + K \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} \left[K \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) - \frac{\Lambda}{2} g^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} = 0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\boxed{R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{1}{2K} \Lambda g^{\mu\nu}} \tag{3.19}$$

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{2K} \Lambda g_{\mu\nu}} \tag{3.20}$$

K пока неизвестна!

Тензор Эйнштейна:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{3.21}$$

Поля материи, тензор энергии-импульса

$$S = S_\Lambda(g) + S_R(g) + S_m(u, g) \quad (3.22)$$

$$\delta S = \delta S_\Lambda(g)|_{\delta g} + \delta S_R(g)|_{\delta g} + \delta S_m(u, g)|_{\delta g} + \delta S_m(u, g)|_{\delta u} = 0 \quad (3.23)$$

Символически:

$$\delta S = \frac{\delta S_\Lambda(g)}{\delta g} \delta g + \frac{\delta S_R(g)}{\delta g} \delta g + \frac{\delta S_m(u, g)}{\delta g} \delta g + \frac{\delta S_m(u, g)}{\delta u} \delta u = 0 \quad (3.24)$$

Вариации $\delta g_{\mu\nu}$ и δu независимы! \Rightarrow

Уравнения гравитационного поля:

$$\delta S_\Lambda(g)|_{\delta g} + \delta S_R(g)|_{\delta g} + \delta S_m(u, g)|_{\delta g} = 0 \quad (3.25)$$

Уравнения полей материи:

$$\delta S_m(u, g)|_{\delta u} = 0 \quad (3.26)$$

Из вариации полного действия получаются и уравнения гравитационного поля, и уравнения полей материи!

$$S_m(u, g) = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m(u, g) \quad (3.27)$$

$$\delta S_m(u, g)|_{\delta g} = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (3.28)$$

$T_{\mu\nu}$ – метрический тензор энергии-импульса полей материи (*симметричен!*).

Откуда берется такое определение?

Пример. Скалярное поле

$$\mathcal{L}_{sc} = \frac{1}{2} \partial^\nu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \quad (3.29)$$

$$S_{sc}(g, \varphi) = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right) \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \delta S_{sc}|_{\delta g} &= \int d^4x \left[\delta \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{-g} \frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \right] = \\ &= \int d^4x \left[\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \varphi \partial_\sigma \varphi - V(\varphi) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\rho} \delta g_{\rho\sigma} g^{\sigma\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \times \\ &\quad \left[g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \partial_\sigma \varphi \partial_\rho \varphi - V(\varphi) \right) - g^{\rho\mu} g^{\nu\sigma} \partial_\rho \varphi \partial_\sigma \varphi \right] \delta g_{\mu\nu} \quad (3.31) \end{aligned}$$

(3.28) \Rightarrow

$$T^{\mu\nu} = g^{\rho\mu} g^{\nu\sigma} \partial_\rho \varphi \partial_\sigma \varphi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{sc}(\varphi) \mid g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \quad (3.32)$$

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi - g_{\alpha\beta} \mathcal{L}(\varphi) \quad (3.33)$$

– обычное выражение тензора энергии-импульса скалярного поля, следующее из теоремы Нетер ★.

Уравнения гравитационного поля с учетом материи

$$\begin{aligned} \delta S \mid_{\delta g} &= \delta S_\Lambda \mid_{\delta g} + \delta S_R \mid_{\delta g} + \delta S_m \mid_{\delta g} = \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[K \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) - \frac{\Lambda}{2} g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} = 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{2K} (\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})} \quad (3.35)$$

Найдем константу $\frac{1}{2K}$ из нерелятивистского предела

Общее уравнение геодезической:

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta = 0 \quad (3.36)$$

$$\tau = s, \quad u^\mu(s) = \frac{dx^\mu(s)}{ds} \quad (3.37)$$

Статический нерелятивистский предел движения частицы:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \quad (3.38)$$

$$\frac{dx^0}{ds} \approx 1, \quad \frac{dx^i}{ds} \ll \frac{dx^0}{ds} \Rightarrow \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{00}^i = 0 \quad (3.39)$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} \quad (3.40)$$

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \eta^{i\sigma} (\partial_0 \gamma_{0\sigma} + \partial_0 \gamma_{\sigma 0} - \partial_\sigma \gamma_{00}) = +\frac{1}{2} \partial_i \gamma_{00} \quad (3.41)$$

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = -\frac{1}{2} \partial_i \gamma_{00} \cong \frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\partial_i \varphi \quad (3.42)$$

φ - грав. потенциал \Rightarrow

$$\gamma_{00} = 2\varphi \quad (3.43)$$

$$g_{00} = 1 + \gamma_{00} = 1 + 2\varphi \quad (3.44)$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{2} \Delta g_{00} \quad (3.45)$$

Уравнение Пуассона для грав. потенциала:

$$\Delta \varphi = 4\pi G \rho \quad (3.46)$$

Из (3.45):

$$\Delta g_{00} = 8\pi G \rho \quad (3.47)$$

Уравнение Эйнштейна без Λ

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{2K} T_{\mu\nu} \mid g^{\mu\nu} \quad (3.48)$$

$$R - \frac{1}{2} 4R = \frac{1}{2K} T, \quad T \equiv g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \Rightarrow \quad (3.49)$$

$$R = -\frac{1}{2K} T \Rightarrow \quad (3.50)$$

$$\boxed{R_{\mu\nu} = \frac{1}{2K} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)} \quad (3.51)$$

Статический нерелятивистский предел:

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, 0, 0, 0) \quad (3.52)$$

$$R_{00} = \frac{1}{2K} \left(\rho - \frac{1}{2}\rho \right) = \frac{1}{4K}\rho \quad (3.53)$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\lambda + \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\rho - \text{второй порядок малости} \quad (3.54)$$

$$R_{00} = \partial_\lambda \Gamma_{00}^\lambda - \partial_0 \Gamma_{\lambda 0}^\lambda = \text{\textbackslash статика \textbackslash} = \partial_i \Gamma_{00}^i \quad (3.55)$$

$$R_{00} = \partial_i \left(\frac{1}{2} \partial_i \gamma_{00} \right) = \frac{1}{2} \partial_i \partial_i g_{00} = \frac{1}{2} \Delta g_{00} \quad (3.56)$$

Подставляем в (3.53):

$$\Delta g_{00} = \frac{1}{2K}\rho \quad (3.57)$$

Сравнивая с (3.47):

$$\boxed{\frac{1}{2K} = 8\pi G} \quad (3.58)$$

Уравнение Эйнштейна с Λ -членом:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})} \quad (3.59)$$

Из уравнения Эйнштейна следует ковариантный закон сохранения энергии-импульса:

$$\nabla^\mu \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\nu \quad (3.60)$$

$$\nabla^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) = 8\pi G(0 + \nabla^\mu T_{\mu\nu}) \quad (3.61)$$

$$\nabla^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \equiv 0 \Rightarrow \nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (3.62)$$

Доказательство.

Тождество Бьянки:

$$\nabla_\rho R^\lambda_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\mu R^\lambda_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\nu R^\lambda_{\sigma\rho\mu} = 0 \quad (3.63)$$

Сворачиваем по λ, μ :

$$\nabla_\rho R^\lambda_{\sigma\lambda\nu} + \nabla_\lambda R^\lambda_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\nu R^\lambda_{\sigma\rho\lambda} = 0 \quad (3.64)$$

$$\nabla_\rho R_{\sigma\nu} + \nabla_\lambda R^\lambda_{\sigma\nu\rho} - \nabla_\nu R_{\sigma\rho} = 0 \mid g^{\sigma\rho} \quad (3.65)$$

$$\nabla^\rho R_{\rho\nu} + \nabla^\lambda R_{\lambda\nu} - \nabla_\nu R = 0 \star \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \nabla^\rho R_{\rho\nu} + \nabla^\lambda R_{\lambda\nu} - \nabla^\mu (g_{\mu\nu}R) &= \\ &= 2\nabla^\mu R_{\mu\nu} - \nabla^\mu (g_{\mu\nu}R) = \\ &= 2\nabla^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.67)$$

Линеаризованные уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) \quad (3.68)$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (3.69)$$

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}(g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}) = 0 \Rightarrow \quad (3.70)$$

$$R^{\sigma}_{\mu\nu\lambda}(g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}) = 0 \quad (3.71)$$

Всё Γ и всё R – это возмущения над нулевыми значениями за счет возмущения $h_{\mu\nu}$
 \Rightarrow можно использовать формулы первого порядка для возмущений:

$$R^{\mu}_{\nu\lambda\rho} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\mu}_{\rho\nu} - \partial_{\rho}\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda}\Gamma^{\mu}_{\rho\nu} &= \partial_{\lambda}\frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(\partial_{\rho}h_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}h_{\sigma\rho} - \partial_{\sigma}h_{\rho\nu}) = \\ &= \frac{1}{2}(\partial_{\lambda}\partial_{\rho}h_{\nu}^{\mu} + \partial_{\lambda}\partial_{\nu}h_{\rho}^{\mu} - \partial_{\lambda}\partial^{\mu}h_{\rho\nu}) \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial^{\lambda}\partial_{\mu}h_{\nu\lambda} + \partial^{\lambda}\partial_{\nu}h_{\lambda\mu} - \partial^{\lambda}\partial_{\lambda}h_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\partial_{\mu}h_{\lambda}^{\lambda}) \star \quad (3.74)$$

При малом преобразовании $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)$ \star :

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + \partial^{\mu}\xi^{\nu} + \partial^{\nu}\xi^{\mu} \Rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_{\mu}\xi_{\nu} + \partial_{\nu}\xi_{\mu} \quad (3.75)$$

$R_{\mu\nu}$ калибровочно инвариантно относительно преобразования:

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_{\mu}\xi_{\nu} + \partial_{\nu}\xi_{\mu} \text{ (проверить } \star) \quad (3.76)$$

Гармоническая калибровка:

$$\partial_{\mu}h_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}\partial_{\nu}h_{\lambda}^{\lambda} = 0 \quad (3.77)$$

обеспечена, если

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}\xi_{\nu} = -\left(\partial_{\mu}h_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}h_{\lambda}^{\lambda}\right) \quad (3.78)$$

Тогда, из (3.74) \star :

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial^{\lambda}\partial_{\lambda}h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\partial_0^2 - \Delta)h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} \Rightarrow \quad (3.79)$$

$$\square h_{\mu\nu} = -16\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T \right) \quad (3.80)$$

Гравитационные волны

Если $T_{\mu\nu} = 0$, то

$$\square h_{\mu\nu} = 0 \quad (3.81)$$

– волновое уравнение, грав. волны в вакууме.

Замечание: если $G = 0$, то грав. волны все равно есть.

Макроскопический феноменологический тензор энергии-импульса изотропной «жидкости»

1. Покоящееся вещество («идеальная жидкость») в пространстве Минковского (\approx тензор напряжений):

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & & & 0 \\ & p & & \\ & & p & \\ 0 & & & p \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (3.83)$$

2. Вещество движется в пространстве Минковского:

$$(p + \rho)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} - \underline{\text{это тензор}} \quad (3.84)$$

В системе покоя материи:

$$(p + \rho) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} - p \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix} \quad (3.85)$$

Следовательно, в произвольной движущейся системе:

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} \quad (3.86)$$

3. Вещество в произвольной системе.

В локально-Лоренцевой системе должно быть:

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} \quad (3.87)$$

Тогда общеквариантный тензор ЭИ:

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} \quad (3.88)$$

Статическое изотропное вещество как источник гравитации (и антигравитации)

$$\square h_{\mu\nu} = -16\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T \right) \quad (3.89)$$

Для компоненты 00: $\backslash T = \rho - 3p \backslash$

$$\partial_0^2 h_{00} - \Delta h_{00} = -8\pi G(\rho + 3p) \Rightarrow \quad (3.90)$$

$$\Delta h_{00} = 8\pi G(\rho + 3p) \quad (3.91)$$

В нерелятивистской статике (см. (3.45)):

$$\Delta h_{00} = 2\Delta\varphi \Rightarrow \quad (3.92)$$

$$\Delta\varphi = 4\pi G(\rho + 3p) \quad (3.93)$$

Источником гравитации является не ρ , а $\rho + 3p$.

Если $\rho < 0$, $p = 0 \Rightarrow$ антигравитация.

Если $\rho + 3p < 0 \Rightarrow$ тоже антигравитация!

Λ -член

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) \quad (3.94)$$

$$T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = \begin{pmatrix} \Lambda & & & \\ & -\Lambda & & \\ & & -\Lambda & \\ & & & -\Lambda \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

$\rho = \Lambda$, $p = -\Lambda$, уравнение состояния: $p = -\rho$.

Если $\Lambda > 0$, то $\rho + 3p = -2\Lambda < 0$.

Космологическая константа $\Lambda > 0$ приводит к антигравитации.

Классическая космология: космологический принцип и смысл однородности и изотропии

- Предполагаем, что Вселенная заполнена идеальной (без вязкости, многокомпонентной)

космологической жидкостью

В сопутствующей системе

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix} = \sum_i \hat{T}_i \quad (3.96)$$

- *Космологический принцип:* Вселенная изотропна и однородна: космологическая жидкость однородна и геометрия однородна (кривизна одинакова).

Смысл однородности.

- Multifinger time – многонаправленное время – набор пространственно-подобных поверхностей, пронумерованных параметром t .

- Через каждое событие проходит гиперповерхность изотропии – точный смысл однородности.

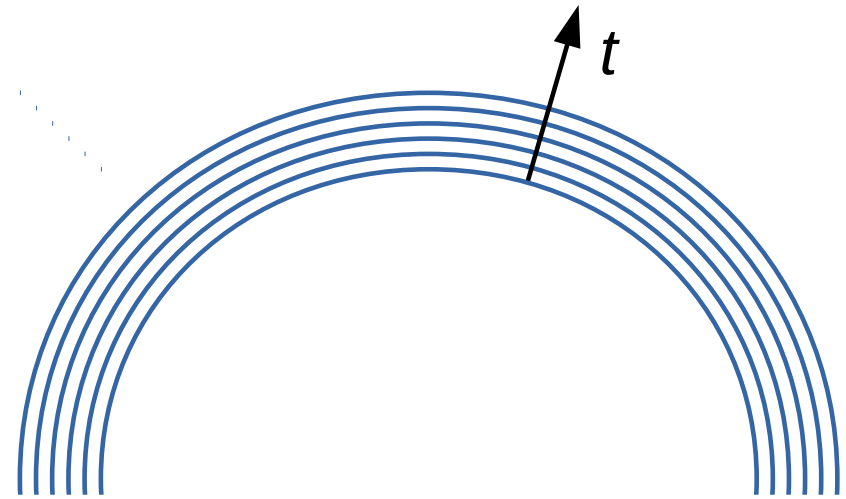
- Изотропия на пространственной гиперповерхности влечет однородность на той же поверхности.

Доказательство: Если бы не было однородности, на поверхности возникли бы градиенты, нарушающие изотропию.

- На гиперповерхностях однородности космологическая жидкость должна покоиться (иначе – анизотропия). \Rightarrow

Если все пространство-время разложено на систему поверхностей однородности, то имеет естественную

сопутствующую космологическую систему отсчета, связанную с покоящейся космологической жидкостью.



Дополнительное чтение: Ч.Мизнер, К.Торн, Дж.Уилер. Гравитация, Т.2., §27.2 – §27.5.

Космологический принцип и наблюдение:

Однородность является обобщением результатов наблюдений, но Вселенная не стационарна, поэтому прямо однородность наблюдать невозможно!

На больших расстояниях наблюдается плотность материи, температура и т.д. отличные от локальных современных.

Однородные и изотропные трехмерные пространства

Однородных и изотропных трехмерных пространств всего три: евклидово пространство, трехмерная сфера, трехмерная псевдосфера.

Евклидово трехмерное пространство (3-плоскость)
Есть такая система координат, что во всем пространстве

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (3.97)$$

3-сфера

Фиктивное 4-мерное евклидово пространство:

$$ds^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 + (dy^4)^2 \quad (3.98)$$

Уравнение 3-сферы:

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 + (y^4)^2 = a^2 \quad (3.99)$$

Описывается тремя параметрами:

$$\begin{aligned} y^1 &= a \cos \chi \\ y^2 &= a \sin \chi \cos \theta \\ y^3 &= a \sin \chi \sin \theta \cos \varphi \\ y^4 &= a \sin \chi \sin \theta \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \quad \star \quad (3.101)$$

★ Упражнение: попробуйте отгадать параметризацию 4-х мерной сферы в 5-мерном пространстве и выражение для элемента длины на 4-х мерной сфере.

В квадратных скобках – метрика единичной 3-сферы, никаких упоминаний фиктивного 4-мерного пространства (y^1, y^2, y^3, y^4) нет.

3-псевдосфера (гиперболоид) Фиктивное 4-мерное псевдоевклидово пространство:

$$ds^2 = (dy^1)^2 - (dy^2)^2 - (dy^3)^2 - (dy^4)^2 \quad (3.102)$$

3-псевдосфера – это сфера в 4-пространстве Минковского (псевдосфера):

$$(y^1)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2 - (y^4)^2 = a^2, \quad y^1 > 0 \quad (3.103)$$

$$\begin{aligned} y^1 &= a \operatorname{ch} \chi \\ y^2 &= a \operatorname{sh} \chi \cos \theta \\ y^3 &= a \operatorname{sh} \chi \sin \theta \cos \varphi \\ y^4 &= a \operatorname{sh} \chi \sin \theta \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.104)$$

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = a^2 [d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \quad \star \quad (3.105)$$

Как понять, что эти пространства однородны? Для 3-сферы, 3-плоскости и 3-псевдосферы

$$R_{ijkl} = \frac{\varkappa}{a^2} (\gamma_{ik} \gamma_{jl} - \gamma_{il} \gamma_{jk}) \quad (3.106)$$

$$\varkappa = \begin{cases} +1 & - & 3\text{-сфера} \\ 0 & - & 3\text{-плоскость} \\ -1 & - & 3\text{-псевдосфера} \end{cases} \quad (3.107)$$

Проверяется прямым вычислением, или в ковариантном формализме: см. Robert M. Wald, General Relativity Sec. 5.1, p. 91.

$$R_{ij} = 2 \frac{\varkappa}{a^2} \gamma_{ij} \quad \star \quad (3.108)$$

$$R = 6 \frac{\varkappa}{a^2} \quad \star \quad (3.109)$$

Скаляр кривизны всюду одинаков – пространства постоянной кривизны.

Метрика Фридмана-Робертсона-Уокера (FRW)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j \quad (3.110)$$

γ_{ij} – метрика одного из однородных 3-пространств.

Для сферы и псевдосферы можно взять метрику единичных сфер.

Для 3-плоскости физ. смысл имеет только $a(t_1)/a(t_2)$

$$\hat{g} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & a^2(t)\hat{\gamma} \end{array} \right) \quad (3.111)$$

Только в рамках модели FRW космологическое время приобретает смысл!

Координаты FRW – сопутствующая система отсчета неподвижной космологической жидкости

Докажем, что FRW система отсчета связана с свободной неподвижной космологической жидкостью, то есть неподвижные частицы движутся свободно, т.е. по геодезическим.

Что такое неподвижные частицы:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = 0; \quad u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{dt}{dt} = 1 \quad (3.112)$$

$$\forall \mu : \frac{du^\mu}{ds} = 0 \quad (3.113)$$

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu u^\nu u^\lambda = 0 \quad (3.114)$$

Подставляем (3.112), (3.113):

$$\text{Должно быть: } 0 + \Gamma_{00}^\mu u^0 u^0 = \Gamma_{00}^\mu = 0 \quad (3.115)$$

Нужно проверить, что действительно $\Gamma_{00}^\mu = 0$.

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\lambda}) \quad (3.116)$$

$$\Gamma_{00}^0 = 0; \quad \Gamma_{00}^i = 0; \quad \Gamma_{0i}^0 = 0 \quad \star \quad (3.117)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \delta_j^i \frac{\dot{a}}{a} \quad \star \quad (3.118)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = a\dot{a}\gamma_{ij} \quad \star \quad (3.119)$$

$$\Gamma_{jk}^i = {}^{(3)}\Gamma_{jk}^i \quad \star \quad (3.120)$$

Уравнение Фридмана

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) \quad (3.121)$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma \quad (3.122)$$

$$R_{00} = -\partial_0 \Gamma_{0\lambda}^\lambda - \Gamma_{0\sigma}^\lambda \Gamma_{0\lambda}^\sigma = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \star \quad (3.123)$$

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad (3.124)$$

$$R_{0i} = \partial_j \Gamma_{0i}^j - \partial_0 \Gamma_{i\lambda}^\lambda + \Gamma_{0i}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{0\sigma}^\lambda \Gamma_{\lambda i}^\sigma = 0 \star \quad (3.125)$$

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \partial_\lambda \Gamma_{ij}^\lambda - \partial_i \Gamma_{j\lambda}^\lambda + \Gamma_{ij}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{i\sigma}^\lambda \Gamma_{\lambda j}^\sigma = \\ &\quad \partial_0 \Gamma_{ij}^0 + \partial_k \Gamma_{ij}^k \\ &\quad - \partial_i \Gamma_{j0}^0 - \partial_i \Gamma_{jl}^l \\ &\quad + (\Gamma_{ij}^0 \Gamma_{0\sigma}^\sigma + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{k\sigma}^\sigma) \\ &\quad - (\Gamma_{ik}^0 \Gamma_{0j}^k + \Gamma_{i0}^k \Gamma_{jk}^0 + \Gamma_{il}^k \Gamma_{jk}^l) = \\ &= \partial_0 \Gamma_{ij}^0 + \Gamma_{ij}^0 \Gamma_{0\sigma}^\sigma - \Gamma_{ik}^0 \Gamma_{0j}^k - \Gamma_{i0}^k \Gamma_{jk}^0 + {}^{(3)}R_{ij} = \\ &= (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) \gamma_{ij} + {}^{(3)}R_{ij} = \\ &= \left\{ {}^{(3)}R_{ij} = 2 \frac{\varkappa}{r^2} \gamma_{ij}; \quad r \equiv 1; \quad \varkappa = +1, 0, -1 \right\} = \\ &= (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\varkappa) \gamma_{ij} \quad (3.126) \end{aligned}$$

$$R_{ij} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\varkappa) \gamma_{ij} \quad (3.127)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{ij} R_{ij} = -6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a} + \frac{\varkappa}{a^2} \right) \Rightarrow \quad (3.128)$$

ЛЧ, 00-компонента уравнений Эйнштейна:

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = 3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\varkappa}{a^2} \right) \quad (3.129)$$

Покоящаяся материя:

$$T_{00} = \rho; \quad g_{00} \Lambda = \Lambda \Rightarrow \quad (3.130)$$

Уравнение Фридмана (с Λ -членом)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} G(\rho + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2} \quad (3.131)$$

Как меняется ρ в зависимости от t и a ?

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (3.132)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu 0} &= \partial_\mu T^{\mu 0} + \Gamma_{\mu\sigma}^\mu T^{\sigma 0} + \Gamma_{\mu\sigma}^0 T^{\mu\sigma} = \\ &= \partial_0 T^{00} + \Gamma_{i0}^i T^{00} + \Gamma_{ij}^0 T^{ij} = \\ &= \left\{ T^{ij} = (p + \rho) u^i u^j - p g^{ij} = -p g^{ij} = \frac{1}{a^2} p \gamma^{ij} \right\} = \\ &= \dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) = 0 \quad (3.133) \end{aligned}$$

(Λ -член удовлетворяет ковариантное сохранение энергии-импульса тождественно).

Полная система уравнений изотропной космологии:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G(\rho + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2} \quad (\text{уравнение Фридмана})$$

(3.134)

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (\text{ковариантное сохранение})$$

(3.135)

$$p = p(\rho) \quad (\text{уравнение состояния})$$

(3.136)

Лекция 4

Решения уравнений изотропной однородной космологии. Зоопарк космологических моделей. Стандартные свечи.

Полная система уравнений изотропной космологии:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G(\rho + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2} \quad (\text{уравнение Фридмана}) \quad (4.1)$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (\text{ковариантное сохранение}) \quad (4.2)$$

$$p = p(\rho) \quad (\text{уравнение состояния}) \quad (4.3)$$

Решения уравнений изотропной однородной космологии

Решения для $\varkappa = 0, \Lambda = 0$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \quad (4.4)$$

Нерелятивистская пыль

Уравнение состояния:

$$p = 0 \quad (4.5)$$

Из (4.2):

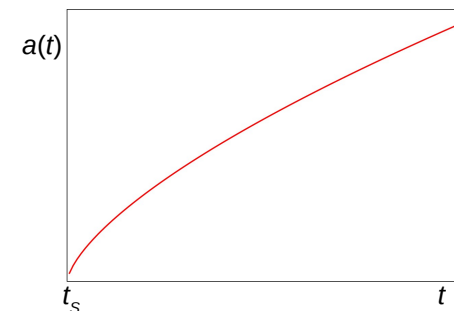
$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow d(\ln \rho) = d(\ln a^{-3}) \Rightarrow \quad (4.6)$$

$$\rho = \frac{\text{const}}{a^3} \quad (\text{сохранение числа частиц}) \quad (4.7)$$

Из (4.4):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\text{const}}{a^3} \Rightarrow a(t) = \text{const}'(t - t_s)^{2/3} \quad (4.8)$$

При $t = t_s$ $a(t) = 0$ – сингулярность.



Будем полагать $t_s = 0$:

$$a(t) = \text{const } t^{2/3} \quad (4.9)$$

$$\rho = \frac{\text{const}}{t^2} \quad (4.10)$$

В момент сингулярности пространство было плоским и *бесконечным*, плотность была бесконечной. Постоянную в (4.10) можно найти:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\text{const}(2/3)t^{-1/2}}{\text{const } t^{2/3}} = \frac{2}{3} \frac{1}{t} \Rightarrow \rho = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{6\pi G} \frac{1}{t^2} \quad (4.11)$$

Постоянная Хаббла:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (4.12)$$

$1/H$ во всех моделях порядка возраста Вселенной (от сингулярности!)

В частности, в модели пыли

$$H(t) = \frac{2}{3} \frac{1}{t}, \quad t = \frac{2}{3} \frac{1}{H(t)} \quad (4.13)$$

Современное (t_0) значение постоянной Хаббла:

$$H_0 \equiv H(t_0) = h \times 100 \frac{\text{км/с}}{\text{Мпк}}, \quad h = 0.6774 \pm 0.0046 \quad (4.14)$$

$$t_0 \approx 3.0 \cdot 10^{17} \text{ sec} \approx 9.6 \cdot 10^9 \text{ years} \star \quad (4.15)$$

Космологический горизонт

Конформное время.

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j = a^2(t)(d\eta^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j) \quad (4.16)$$

– конформно-плоская метрика.

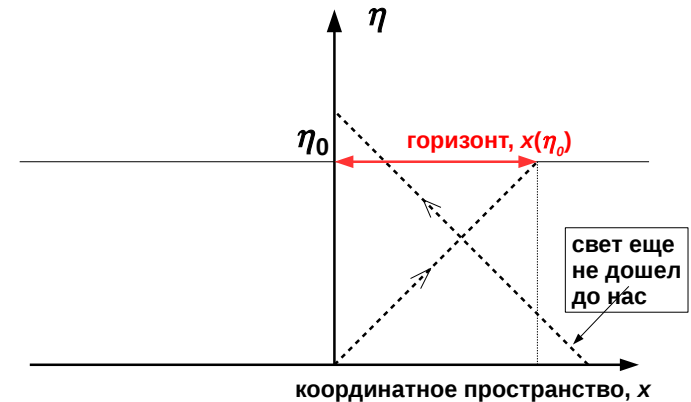
$$d\eta = dt/a(t) \quad (4.17)$$

Для плоской модели с пылью:

$$\eta(t) = \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^t \frac{dt}{\text{const} \cdot t^{2/3}} = \frac{3}{\text{const}} \cdot t^{1/3} \quad (4.18)$$

Светоподобные геодезические: $ds^2 = 0 \Rightarrow$

$$d\eta^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j = dx^2 \Rightarrow d\eta = |dx| \quad (4.19)$$



$$x(\eta_0) = \eta_0 = \eta(t_0) \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
l_H(t_0) &= a(t_0)x(\eta_0) = a(t_0)\eta(t_0) = \\
&= a(t_0) \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \text{const} \cdot t_0^{2/3} \int_0^{t_0} \frac{dt}{\text{const} \cdot t^{2/3}} = 3t_0 = \\
&= 28.8 \cdot 10^9 \text{ св. лет} \quad (4.21)
\end{aligned}$$

($ct_0 \sim 9.6 \cdot 10^9$ св. лет – много меньше горизонта!)

★ Пусть мы наблюдаем объект с возрастом Δt . Каково до него расстояние (в модели пыли)? Почему для малых расстояний $L \approx c\Delta t$?

Красное смещение

Эволюция свободного электромагнитного поля

$$S_{Mink} = -\frac{1}{4} \int d^4x F^{\nu\rho} F_{\nu\rho}; \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.22)$$

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} F^{\nu\rho} F_{\nu\rho} \quad (4.23)$$

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.24)$$

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} F_{\mu\lambda} F_{\nu\rho} \quad (4.25)$$

В конформно-плоской метрике

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j] \quad (4.26)$$

Имеем

$$g_{\mu\nu}(\eta) = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu} \quad (4.27)$$

$$g^{\mu\nu}(\eta) = \frac{1}{a^2(\eta)}\eta^{\mu\nu} \quad (4.28)$$

$$\sqrt{-g} = a^4 \quad (4.29)$$

Из (4.25):

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{1}{4} \int d^4x a^4 \frac{1}{a^4} \eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\rho} F_{\mu\lambda} F_{\nu\rho} = \\
&= -\frac{1}{4} \int d^4x \eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\rho} F_{\mu\lambda} F_{\nu\rho} \quad (4.30)
\end{aligned}$$

– электромагнитное поле конформно-инвариантно. Плоская волна в (η, x^i) -пространстве распространяется как в пространстве Минковского:

$$A_\mu^{(\alpha)} = e_\mu^{(\alpha)} \exp[i(|k|\eta - \mathbf{k}\mathbf{x})] \quad (4.31)$$

$|k|$ – не частота, и \mathbf{k} – не волновой вектор в физическом пространстве!

Но можно перейти к физическим величинам:

$$\Delta\eta = \frac{2\pi}{k} \text{ – конформный период,}$$

не зависит от времени (4.32)

$$\Delta T(t) = a(t)\Delta\eta \text{ – физический период,}$$

растет пропорционально $a(t)$ (4.33)

$$\omega(t) = \frac{2\pi}{\Delta T(t)} = \frac{2\pi}{a(t)\Delta\eta} = \frac{k}{a(t)} \text{ – физическая частота,}$$

падает обратно пропорционально $a(t)$ (4.34)

Уменьшение частоты – красное смещение.

Эволюция скорости свободных частиц

Координатная скорость частицы отлична от нуля:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \neq 0; \quad ds^2 = dt^2 - \delta_{ij}x^i x^j \quad (4.35)$$

Физическая скорость частицы:

$$dX^i = a(t)dx^i \Rightarrow U^i = \frac{dX^i}{ds} = a(t)u^i \quad (4.36)$$

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu u^\nu u^\lambda = 0 \Rightarrow \backslash \Gamma_{jk}^i = 0 \backslash \Rightarrow \quad (4.37)$$

$$\frac{du^i}{ds} + 2\Gamma_{0j}^i u^0 u^j = 0 \quad (4.38)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \delta_j^i \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \frac{du^i}{ds} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{dt}{ds} u^i = 0 \quad (4.39)$$

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{du^i}{dt} = \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \left(\frac{U^i}{a} \right) = \frac{dt}{ds} \left(\frac{dU^i}{dt} \frac{1}{a} - \frac{\dot{a}}{a^2} U^i \right) \quad (4.40)$$

$$\frac{dt}{ds} \left(\frac{dU^i}{dt} \frac{1}{a} - \frac{\dot{a}}{a^2} U^i \right) + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{dt}{ds} \frac{1}{a} U^i = 0 \quad (4.41)$$

$$\frac{dU^i}{dt} = -\frac{\dot{a}}{a} U^i \quad (4.42)$$

$$\frac{dU^i}{U^i} = -\frac{da}{a} \Rightarrow U^i = \frac{\text{const}}{a(t)} = U^i(t_i) \frac{a(t_i)}{a(t)} \quad (4.43)$$

Скорость (и импульс $p_i = mU_i$, но не энергия!) массивных частиц падает как $1/a(t)$.

- Все импульсы падают как $1/a(t)$!

Красное смещение z определяется через изменение частоты света:

$$\frac{\omega_i}{\omega_0} = 1 + z(t_i) = \frac{a(t_0)}{a(t_i)} \Rightarrow \quad (4.44)$$

$$z(t_i) = \frac{a(t_0)}{a(t_i)} - 1 \quad (4.45)$$

Закон Хаббла

t_i близко в прошлом к t_0

$$\begin{aligned} a(t_i) &= a(t_0) + (t_i - t_0)\dot{a}(t_0) = \\ &= a(t_0) \left[1 - (t_0 - t_i) \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} \right] = \\ &= a(t_0) [1 - (t_0 - t_i)H_0] \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$z(t_i) = \frac{a(t_0)}{a(t_0)[1 - (t_0 - t_i)H_0]} - 1 \cong (t_0 - t_i)H_0 \quad (4.47)$$

Но $t_0 - t_i = r \Rightarrow$

$$z(t_i) = rH_0 \quad (4.48)$$

Космологическое красное смещение – не Доплеровское!

Это следует также из контекста, в котором относительные скорости могут превышать скорость света.

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dl^2 \quad (4.49)$$

Поместим себя в точку 0, момент времени t_0 .
Физическое расстояние до точки на координатном расстоянии l

$$r(t_0) = a(t_0)l \quad (\text{это точное равенство}) \quad (4.50)$$

$$\dot{r}(t_0) = v(t_0) = \dot{a}l \quad (4.51)$$

– скорость может быть сколь угодно велика при достаточно большом l !

Эффект Доплера не описывает такую ситуацию.

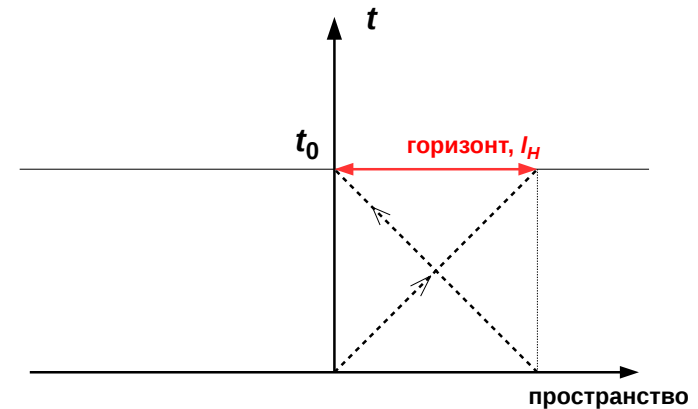
Откуда берется иллюзия эффекта Доплера?

Эффект Доплера для малых v есть:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{v}{c} \equiv v = \dot{a}l = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) al = Hr \quad (4.52)$$

Для малых расстояний космологическое красное смещение выглядит как эффект Доплера (и ошибочно трактуется как эффект Доплера).

Как мы видим горизонт?



Для горизонта $t_i = 0 \Rightarrow$

$$z(0) = \frac{a(t_0)}{a(0)} - 1 = \frac{a(t_0)}{0} - 1 = \infty \quad (4.53)$$

Горизонт виден при бесконечном красном смещении – как бы удаляющийся со скоростью света

Ультррелятивистское вещество, плоская вселенная

$$p = \frac{1}{3}n\langle vP \rangle - \text{для любого газа} \quad (4.54)$$

Ультррелятивистский (УР) газ:

$$E^2 = m^2 + P^2 \approx P^2 \Rightarrow P \cong E, \quad v \cong 1 \Rightarrow \quad (4.55)$$

$$p = \frac{1}{3}nE = \frac{1}{3}\rho \quad (4.56)$$

$$\boxed{p = \frac{1}{3}\rho} \quad (4.57)$$

Как ρ зависит от a ?

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (\text{сохр. ТЭИ}) \quad (4.58)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -4\frac{da}{a} \quad (4.59)$$

$$\boxed{\rho = \frac{\text{const}}{a^4}} \quad (4.60)$$

(не $1/a^3$!)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho = \frac{\text{const}}{a^4} \quad (4.61)$$

$$\boxed{a(t) = \text{const}'t^{1/2}} \quad (4.62)$$

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t} \quad (4.63)$$

(для пыли было $\frac{2}{3t}$)

$$\rho = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{3}{32\pi G t^2} \quad (4.64)$$

Горизонт:

$$l_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = 2t = \frac{1}{H(t)} \quad (4.65)$$

(для пыли $2/H(t)$)

Вакуум и де-Ситтеровское плоское решение

Никакой материи кроме Λ -члена.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\Lambda, \quad \Lambda = \text{const} \geq 0 \quad (4.66)$$

В плоском случае для $\Lambda < 0$ решения нет!

$$\frac{\dot{a}}{a} = (\pm) \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\Lambda} = (\pm)H_{dS} \Rightarrow \quad (4.67)$$

$$a(t) = \text{const} \times e^{(+)\!H_{dS}t} \quad (4.68)$$

Сжимающиеся решения не физичны (?).
Сингулярности нет. Космологический горизонт
 $= +\infty$ (тоже нет).

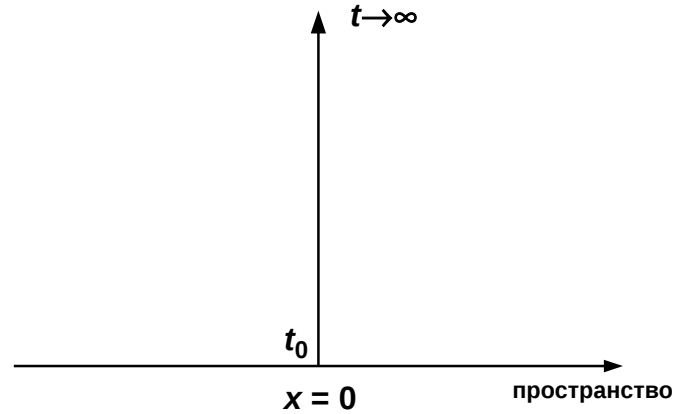
Λ ведет себя как плотность вакуума:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \Rightarrow \backslash p = -\rho \backslash \Rightarrow \dot{\rho} = 0 \quad (4.69)$$

Плотность постоянна (что и ожидается от вакуума).

ДеСиттеровский горизонт

Каков в момент времени t_0 размер области, из которой дойдут сигналы в точку $x = 0$ к моменту $t > t_0$?



$$\begin{aligned}
 l_{dS}(t) &= a(t) \int_{t_0}^t \frac{dt'}{a(t')} = \\
 &= \text{const} \times e^{H_{dS} t_0} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{\text{const} \times e^{H_{dS} t'}} = \\
 &= \frac{1}{H_{dS}} \left[1 - e^{-H_{dS}(t-t_0)} \right] \quad (4.70)
 \end{aligned}$$

$$l_{dS}(\infty) = \frac{1}{H_{dS}} \quad (4.71)$$

Сигналы из областей, которые сейчас дальше $l_{dS}(\infty)$ не дойдут до точки $x = 0$ никогда!

Случаи $\varkappa = +1, -1$

Пылевидная материя, $\Lambda = 0$. Из (4.2):

$$\rho = \frac{\text{const}}{a^3} \quad (4.72)$$

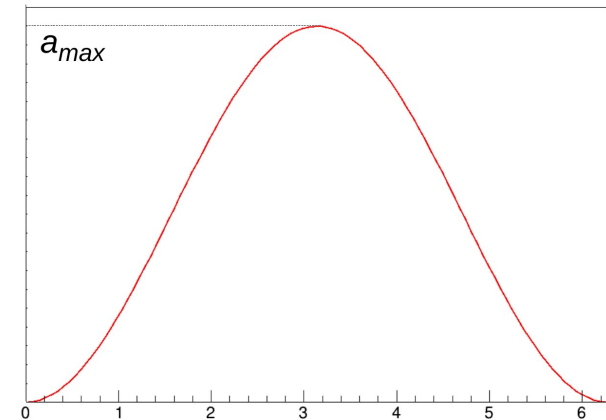
$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\text{const}}{a^3} - \frac{\varkappa}{a^2} = \frac{a_{max}}{a^3} - \frac{\varkappa}{a^2} \quad (4.73)$$

$$dt = a(t)d\eta \Rightarrow \left(\frac{da}{d\eta}\right)^2 = a_{max}a - \varkappa a^2 \quad (4.74)$$

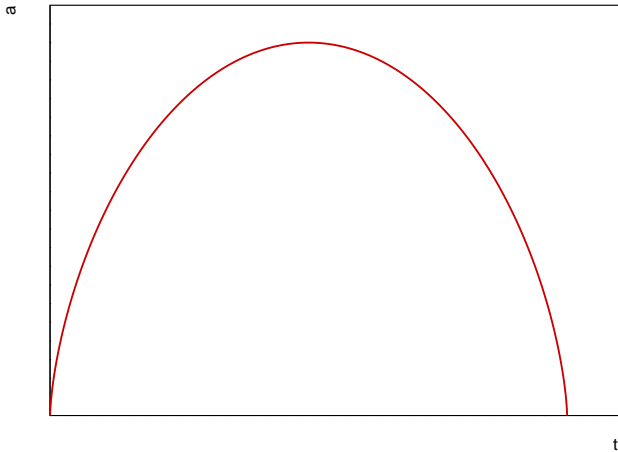
$\varkappa = +1$

$$a(\eta) = a_{max} \sin^2 \frac{\eta}{2} \quad (4.75)$$

Вселенная рождается в точке и коллапсирует в точку.



$$t = \int_0^\eta a(\eta) d\eta = \frac{a_{max}}{2} (\eta - \sin \eta) \quad (4.76)$$



Для $\kappa = +1$ можно явно выразить a_{max} через массу вселенной:

$$\frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{a_{max}}{a^3} \quad (\text{по определению, см. (4.73)}) \quad (4.77)$$

$$\rho \times 2\pi^2 a^3 = m \Rightarrow \rho = \frac{m}{2\pi^2 a^3} \quad (4.78)$$

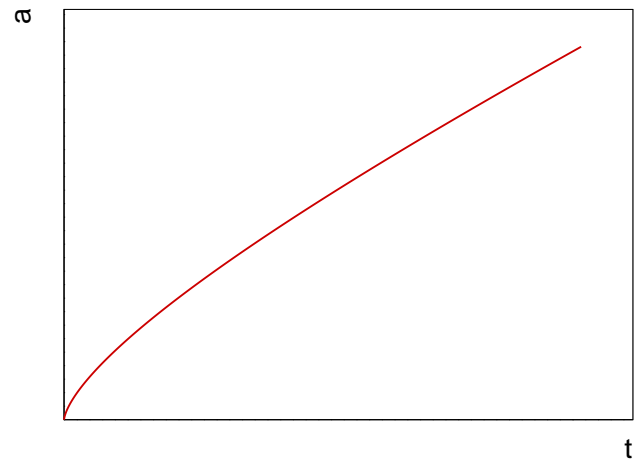
$$\frac{8\pi G}{3} \frac{m}{2\pi^2 a^3} = \frac{a_{max}}{a^3} \Rightarrow a_{max} = \frac{4}{3\pi} m G \quad (4.79)$$

$$\kappa = -1$$

$$a(\eta) = a_{max} \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2} \quad (4.80)$$

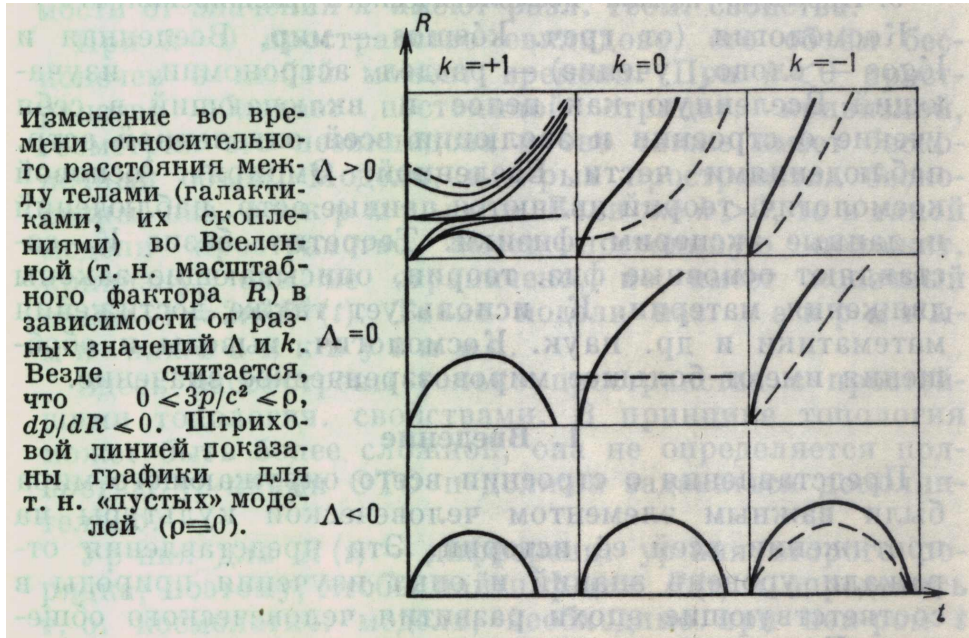
$$t = \int_0^\eta a(\eta) d\eta = \frac{a_{max}}{2} (\operatorname{sh} \eta - \eta) \quad (4.81)$$

Коллапса нет, вселенная открыта и бесконечна.



★ Найдите асимптотику решения при $t \rightarrow \infty$.

Зоопарк космологических моделей



И.Д. Новиков. Космологические модели. Физическая энциклопедия, Т.2, стр. 475

Параметр замедления (или как была открыта темная энергия)

$$q_0 = - \left. \frac{1}{H_0^2} \frac{\ddot{a}}{a} \right|_{t_0} = - \frac{\ddot{a} a}{\dot{a}^2} \quad (4.82)$$

Пыль:

$$a(t) = \text{const } t^{2/3}$$

$$\dot{a}(t) = \frac{2}{3} \text{const } t^{-1/3} \quad (4.83)$$

$$\ddot{a}(t) = -\frac{2}{9} \text{const } t^{-4/3}$$

$$q_0 = +\frac{1}{2} \quad (4.84)$$

Каков параметр замедления в более общем случае? (И в чем заключается этот более общий случай)?

Критическая плотность

Уравнение Фридмана:

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} G(\rho + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2} \quad (4.85)$$

⇒ Постоянная Хаббла сейчас:

$$H_0^2 = \frac{8\pi}{3} G(\rho_0 + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a_0^2} \quad (4.86)$$

Если пространство плоское, $\varkappa = 0$, то

$$\frac{8\pi}{3} G(\rho_0 + \Lambda) = H_0^2 \Rightarrow \rho_0 + \Lambda = \frac{3}{8\pi G} H_0^2 \quad (4.87)$$

$$\rho_c \equiv \frac{3}{8\pi G} H_0^2 \quad \text{— критическая плотность} \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned} h &= 0.68 \Rightarrow \\ \rho_c &= 4.9 \cdot 10^{-6} \frac{\Gamma_{\text{ЭВ}}}{\text{см}^3} \end{aligned} \quad (4.89)$$

$\rho_0 + \Lambda$ измеряются.

Результат: в пределах ошибок

$$\rho_0 + \Lambda = \rho_c \Rightarrow \quad (4.90)$$

Наше пространство очень близко к плоскому.

Из (4.85):

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi}{3} G(\rho + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2} = \\ &= \frac{8\pi}{3} G \left(\rho_M + \rho_{rad} + \rho_\Lambda - \frac{3}{8\pi G} \frac{\varkappa}{a^2} \right) = \\ &= \frac{8\pi}{3} G (\rho_M + \rho_{rad} + \rho_\Lambda + \rho_{curv}) \end{aligned} \quad (4.91)$$

Уравнение справедливо всегда, когда можно пренебречь плавным превращением ультрарелятивистской материи в нерелятивистскую \Rightarrow

Всегда, кроме очень ранних эпох после сингулярности.

Из (4.91):

$$\rho_M + \rho_{rad} + \rho_\Lambda + \rho_{curv} = \frac{3}{8\pi G} H^2 \quad (4.92)$$

В современную эпоху (по определению (4.88))

$$\rho_M^0 + \rho_{rad}^0 + \rho_\Lambda^0 + \rho_{curv}^0 = \rho_c \quad (4.93)$$

Введем относительные плотности *сейчас*:

$$\Omega_M = \rho_M^0 / \rho_c \quad (4.94)$$

$$\Omega_{rad} = \rho_{rad}^0 / \rho_c \quad (4.95)$$

$$\Omega_\Lambda = \rho_\Lambda^0 / \rho_c \quad (4.96)$$

$$\Omega_{curv} = \rho_{curv}^0 / \rho_c \quad (4.97)$$

$$\Omega_M + \Omega_{rad} + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} = 1 \quad (4.98)$$

$$\rho_M = \rho_M^0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 \quad (4.99)$$

$$\rho_{rad} = \rho_{rad}^0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 \quad (4.100)$$

$$\rho_\Lambda = \rho_\Lambda^0 \equiv \Lambda \quad (4.101)$$

$$\rho_{curv} = \rho_{curv}^0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \quad (4.102)$$

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G} H_0^2 \Rightarrow \frac{8\pi}{3} G = \frac{H_0^2}{\rho_c} \quad (4.103)$$

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{H_0^2}{\rho_c} \left[\rho_M^0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \rho_{rad}^0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 + \rho_\Lambda + \rho_{curv}^0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \right] = \\ &= H_0^2 \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_{rad} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.104)$$

Уравнение Фридмана в относительных плотностях:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{rad} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \right] \quad (4.105)$$

Считая $\Omega_{rad} \ll \Omega_M$ найдем q_0 в современную эпоху

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \right] \quad (4.106)$$

$$\dot{a} = H_0 \sqrt{\Omega_M a_0^3/a + \Omega_\Lambda a^2 + \Omega_{curv} a_0^2} \quad (4.107)$$

$$\begin{aligned} \ddot{a} &= \frac{H_0}{2} \frac{-\Omega_M a_0^3/a^2 + 2a \Omega_\Lambda}{\sqrt{\Omega_M a_0^3/a + \Omega_\Lambda a^2 + \Omega_{curv} a_0^2}} \dot{a} = \\ &= \frac{1}{2} H_0^2 (2a \Omega_\Lambda - \frac{1}{a^2} \Omega_M a_0^3) \quad (4.108) \end{aligned}$$

$$q_0 = -\frac{1}{H_0^2} \frac{\ddot{a}}{a} \Big|_{t_0 \Rightarrow a=a_0} = \frac{1}{2} (\Omega_M - 2\Omega_\Lambda) \quad (4.109)$$

(Ω_{curv} ушло!)

$$q_0 = \frac{1}{2} (\Omega_M - 2\Omega_\Lambda) \quad [\Omega_M = 1, \Lambda = 0 \Rightarrow q_0 = 1/2] \quad (4.110)$$

В каком соотношении находятся Ω_M и Ω_Λ ?

Стандартные свечи и параметр замедления

Наблюдаемая яркость $J(z)$ стандартного источника со светимостью L :

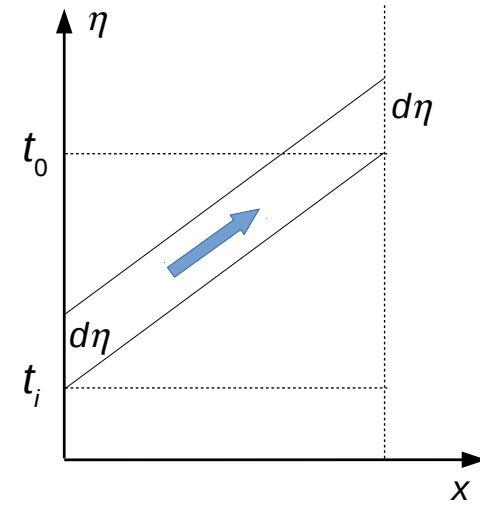
$$J(z) = \frac{L}{S(z)} \times \frac{1}{1+z} \times \frac{1}{1+z} = \frac{L}{S(z)} \frac{1}{(1+z)^2} \quad (4.111)$$

покра- растяже-
нение ние
 времени

$S(z)$ – площадь 2-сферы, окружающей источник.

Растяжение времени:

$$d\eta_i = \frac{dt_i}{a_i} = \frac{dt_0}{a_0} \Rightarrow dt_i = \frac{a_i}{a_0} dt_0 = \frac{dt_0}{1+z} \quad (4.112)$$



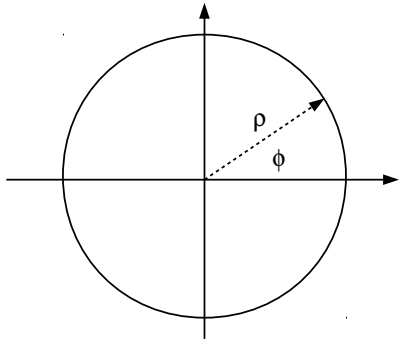
$S(z) = ?$

Лекция 5

Параметр замедления и темная энергия. Модель Λ CDM.
Временная шкала трех основных эпох Вселенной и функция $z(t)$.
Угловой размер, стандартные линейки и стандартные сирены.
Термодинамика Вселенной.

Площадь 2-сферы в 3-плоском пространстве, 3-сфере и 3-псевдосфере

1. Длина окружности радиуса ρ на 2-плоскости

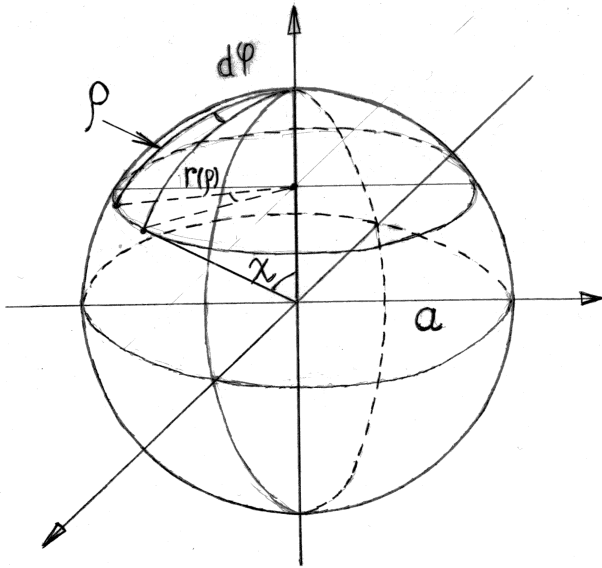


$$C_\rho = 2\pi\rho = 2\pi r(\rho) \quad (5.1)$$

$$r(\rho) = a \left(\frac{\rho}{a} \right) = a\chi(\rho) \quad (5.2)$$

a – произвольный масштабный фактор

2. Длина окружности радиуса ρ на 2-сфере

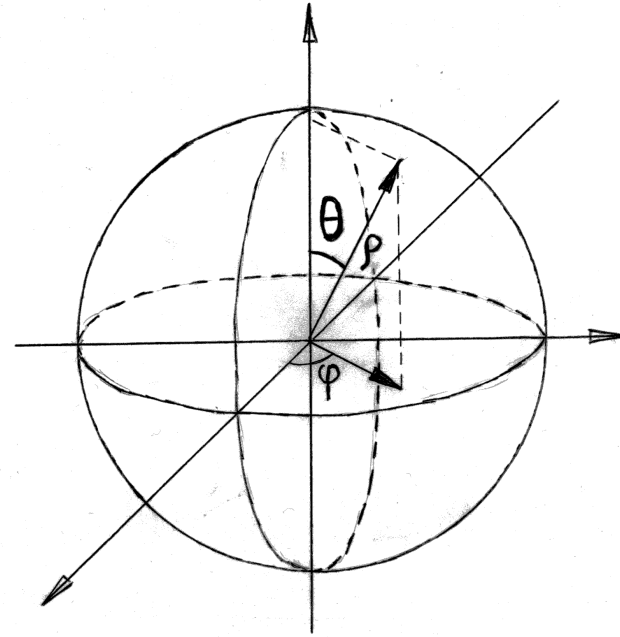


$$C_\rho = 2\pi r(\rho) \quad (5.3)$$

$$r(\rho) = a \sin \left(\frac{\rho}{a} \right) = a \sin \chi(\rho) \quad (5.4)$$

a – радиус

3. Площадь 2-сферы в 3-плоскости



$$S_\rho = 4\pi\rho^2 = 4\pi r^2(\rho) \quad (5.5)$$

$$r(\rho) = a \left(\frac{\rho}{a} \right) = a\chi(\rho) = a\chi(\rho(z)) \quad (5.6)$$

4. Площадь 2-сферы в 3-сфере

$$S_\rho = 4\pi r^2(\rho) \quad (5.7)$$

$$r(\rho) = a \sin \left(\frac{\rho}{a} \right) = a \sin \chi(\rho) = a \sin \chi(\rho(z)) \quad (5.8)$$

5. Площадь 2-сферы в 3-псевдосфере

$$S_\rho = 4\pi r^2(\rho) \quad (5.9)$$

$$r(\rho) = a \operatorname{sh} \left(\frac{\rho}{a} \right) = a \operatorname{sh} \chi(\rho) = a \operatorname{sh} \chi(\rho(z)) \quad (5.10)$$

$$S(z) = 4\pi r^2(z) \quad (5.11)$$

$$r(z) = \begin{cases} a \chi(z) & - 3\text{-плоскость} \\ a \sin \chi(z) & - 3\text{-сфера} \\ a \operatorname{sh} \chi(z) & - 3\text{-псевдосфера} \end{cases} \quad (5.12)$$

$$\chi(z) = \frac{\rho(z)}{a} \quad (5.13)$$

$\chi(z)$ – координатное расстояние от источника, излучившего при красном смещении z (момент времени t_i) до приемника на Земле.

Вычисление $r(z)$

Координатное расстояние до источника, излучившего в момент t_i , и принятого на Земле в момент t_0 :

$$x = \chi = \int_{t_i}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}; \quad \chi(z) = ? \quad (5.14)$$

$$z(t) = \frac{a_0}{a(t)} - 1 \Rightarrow dz = -\frac{a_0}{a^2} \dot{a} dt \Rightarrow dt = -\frac{a^2}{a_0 \dot{a}} dz \Rightarrow \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \chi(z) &= \int_z^0 \left(-\frac{a^2}{a_0 \dot{a}} \right) dz \frac{1}{a} = \int_0^z \frac{dz}{a_0 (\dot{a}/a)} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \right]}; \\ &\quad (\text{пренебрегли излучением}); \quad \frac{a_0}{a} = z + 1 \sqrt{\quad} = \\ &= \int_0^z \frac{dz}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} (1+z)^2}} \quad (5.16) \end{aligned}$$

Результат:

$$\varkappa = 0 : \quad r(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}; \quad \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1 \quad (5.17)$$

$$\varkappa = +1 : \quad r(z) = a_0 \sin \left[\int_0^z \frac{dz}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} (1+z)^2}} \right] \quad (5.18)$$

$$\varkappa = -1 : \quad r(z) = a_0 \operatorname{sh} \left[\int_0^z \frac{dz}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} (1+z)^2}} \right] \quad (5.19)$$

Можно из П.Ч. исключить H_0 :

$$\begin{aligned}\Omega_{curv} &= \frac{\rho_{curv}^0}{\rho_c} = \frac{1}{\rho_c} \left(-\frac{\varkappa}{a_0^2} \right) \frac{3}{8\pi G} = \\ &= \frac{8\pi G}{3H_0^2} \left(-\frac{\varkappa}{a_0^2} \right) \frac{3}{8\pi G} = -\frac{1}{H_0^2} \frac{\varkappa}{a_0^2} \Rightarrow\end{aligned}\quad (5.20)$$

$$H_0 a_0 = 1/\sqrt{-\varkappa\Omega_{curv}} \quad (5.21)$$

$H_0 r(z)$ – выражение $r(z)$ в естественных космологических единицах:

$\varkappa = 0$:

$$H_0 r(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}; \quad \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1 \quad (5.22)$$

$\varkappa = +1$:

$$\frac{1}{\sqrt{-\Omega_{curv}}} \sin \left[\int_0^z \frac{\sqrt{-\Omega_{curv}} dz}{\sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv}(1+z)^2}} \right] \quad (5.23)$$

$\varkappa = -1$:

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega_{curv}}} \text{sh} \left[\int_0^z \frac{\sqrt{\Omega_{curv}} dz}{\sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv}(1+z)^2}} \right] \quad (5.24)$$

Наблюдаемая яркость

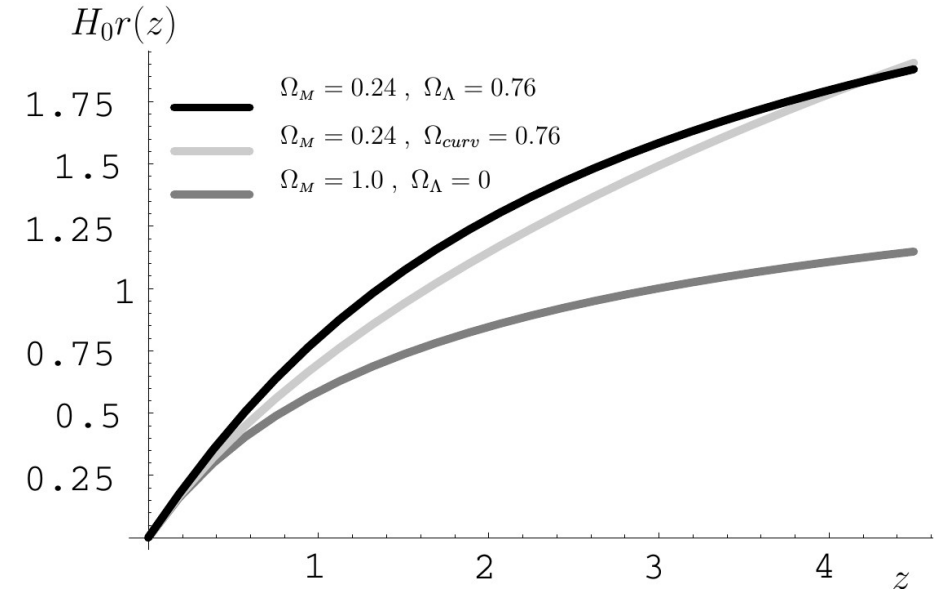
$$J(z) = \frac{L}{4\pi[(z+1)r(z)]^2} \Rightarrow \quad (5.25)$$

$$r(z) = \frac{1}{z+1} \sqrt{\frac{L}{4\pi J(z)}} \Rightarrow \quad (5.26)$$

$$H_0 r(z; \Omega_M, \Omega_\Lambda, \Omega_{curv}) = \frac{H_0}{z+1} \sqrt{\frac{L}{4\pi J(z)}} \quad (5.27)$$

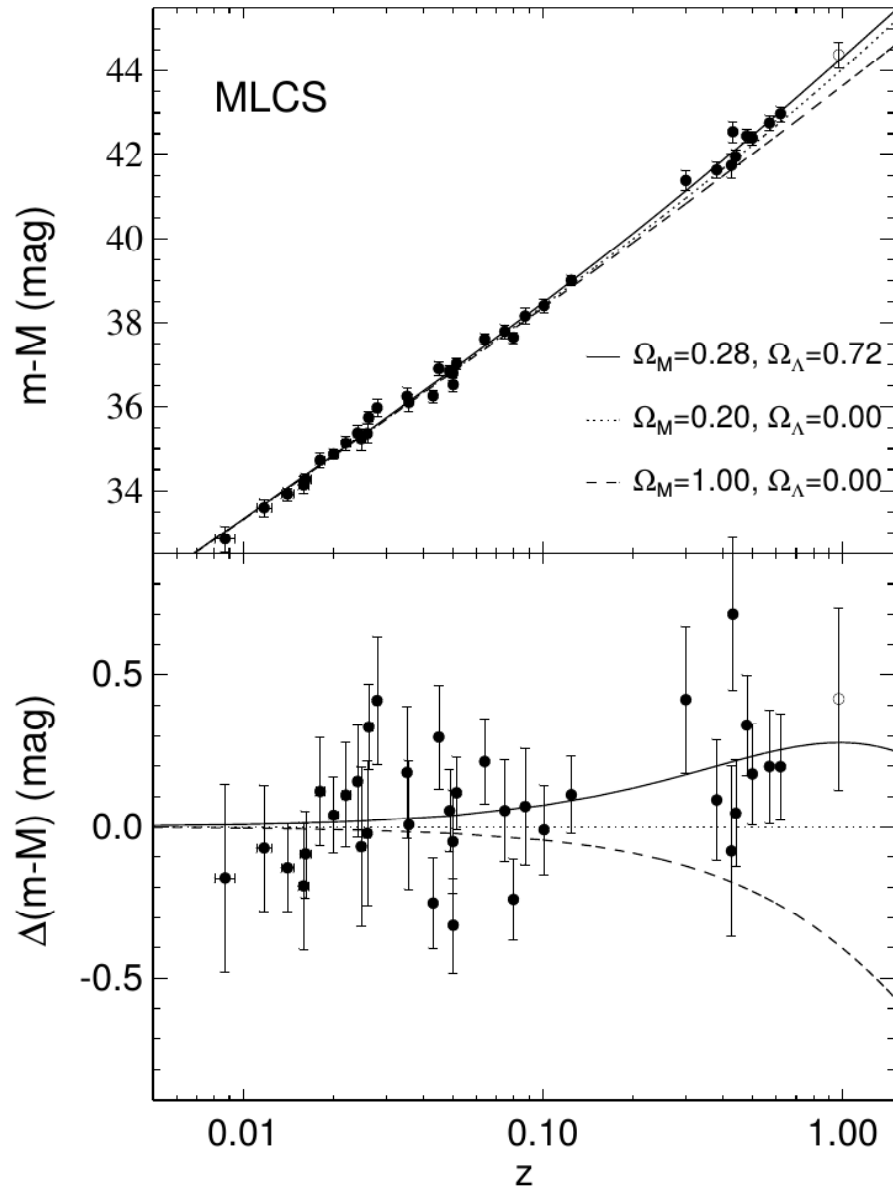
Яркостное расстояние: $D_L = (z+1)r(z)$.

Если есть «стандартная свеча» L , то $H_0 r(z)$ можно измерить.



В плоской вселенной при больших Λ при одном и том же z расстояние $r(z)$ больше – сверхновые тусклее.

Стандартные свечи – сверхновые типа Ia.



A.G. Riess et. al. The Astronomical Journal, 116 : 1009-1038, 1998.

$M - m$ – светимость (чем больше, тем тусклее)
Эксперимент не согласуется с предположением, что Вселенная заполнена только материей.

Назад к параметру замедления

Во втором порядке по z ★

$$r(z) \cong \frac{1}{H_0} \left[z - \frac{z^2}{2} \left(1 + \frac{\Omega_M - 2\Omega_\Lambda}{2} \right) \right] \quad (5.28)$$

Из (4.109):

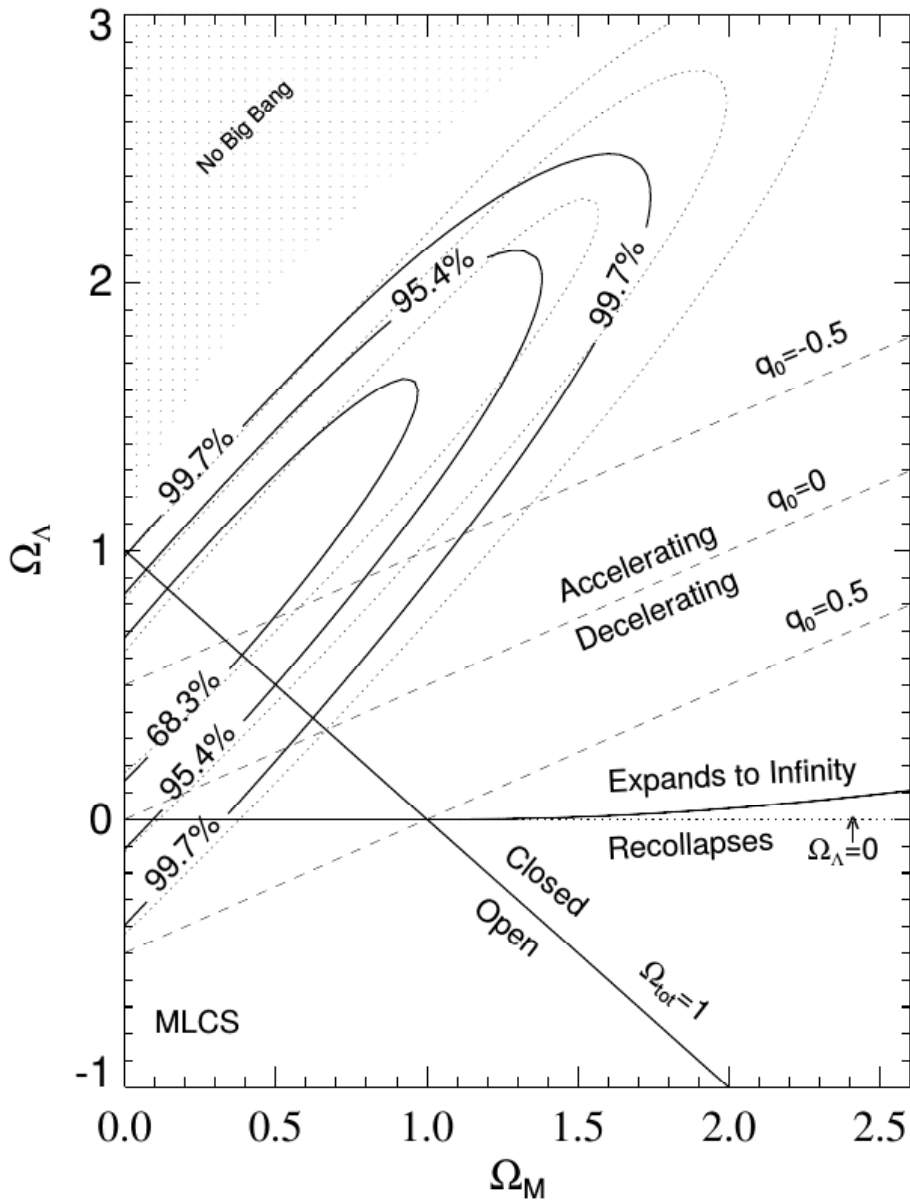
$$q_0 = \frac{\Omega_M - 2\Omega_\Lambda}{2} \Rightarrow \quad (5.29)$$

$$r(z) \cong \frac{1}{H_0} \left[z - \frac{z^2}{2} (1 + q_0) \right] \quad (5.30)$$

q_0 определяется прямо по кривой $r(z)$, $q_0 < 0 \Rightarrow$ не замедление, а ускорение!

Имеется приблизительное вырождение по Ω_M и Ω_Λ при малых $z \Rightarrow$

Чем больше z , тем точнее определение q_0 .



A.G. Riess et. al. The Astronomical Journal, 116 : 1009-1038, 1998.

Ограничения на Ω_M и Ω_Λ по одним только сверхновым Ia.

Нельзя ли найти стандартные свечи поярче?

Можно ли использовать гамма-барстеры как стандартные свечи при больших z ?

Mon. Not. R. Astron. Soc. 000, 000 (2015) Printed August 21, 2015 (MN \LaTeX style file v2.2)

Arc long gamma-ray bursts standard candles?

Hai-Nan Lin^{1*}, Xin Li^{1,2†}, Sai Wang^{2‡} and Zhe Chang^{3§}

¹Department of Physics, Chongqing University, Chongqing 401331, China

²State Key Laboratory Theoretical Physics, Institute of Theoretical Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

³Institute of High Energy Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

Accepted xxxxx; Received xxxxx; in original form xxxxx

ABSTRACT

Gamma-ray bursts (GRBs) are widely proposed as an effective probe to trace the Hubble diagram of the Universe in high redshift range. However, the calibration of GRBs is not as easy as that of type-Ia supernovae (SNe Ia). Most calibrating methods at present make use one or some of the empirical luminosity correlations, e.g., Amati relation. One of the underlying assumptions of these calibrating methods is that the empirical correlation is universal over all redshifts. In this paper, we check to what extent this assumption holds. Assuming that SNe Ia exactly trace the Hubble diagram of the Universe, we re-investigate the Amati relation for low redshift ($z < 1.4$) and high redshift ($z > 1.4$) GRBs, respectively. It is found that the Amati relation of low- z GRBs differs from that of high- z GRBs at more than 3σ confidence level. This result is insensitive to cosmological models. We should be cautious when using Amati relation to reconstruct the Hubble diagram of the Universe.

Key words: cosmological parameters – gamma-ray burst: general – supernovae: general

1 INTRODUCTION

Gamma-ray bursts (GRBs) are the most luminous explosions in the Universe since the big bang. The isotropic equivalent energy they released in a few seconds can be as large as $10^{48} \sim 10^{55}$ ergs. For recent reviews, see, e.g., Pirani (1999); Mészáros (2002, 2006); Kumar & Zhang (2015). Thanks to their extreme brightness, GRBs are detectable up to redshift $z \gtrsim 9$ (Salvaterra 2015). For example, the most distant GRB known today is GRB 090429B, whose redshift is as high as $z \approx 9.4$ (Cucchiara et al. 2011). Due to their high redshift properties, GRBs are often proposed as potential candles to trace the Hubble diagram of the Universe in the high redshift range. In fact, GRBs have already been widely used, together with other candles, such as type-Ia supernovae (SNe Ia), to constrain the cosmological parameters (Schaefer 2003; Bloom, Frail & Kulkarni 2003; Xu, Dai & Liang 2005; Firmani et al. 2005; Liang & Zhang 2005; Firmani et al. 2006a; Schaefer 2007; Liang et al. 2008; Liang & Zhang 2008; Wei & Zhang 2009; Wei 2010; Wang, Qi & Dai 2011; Capozziello et al. 2012; Wei, Wu & Melia 2013; Velten, Montiel & Carneiro 2013; Cai et al. 2013; Bretón & Montiel 2013; Chang et al. 2014; Cano & Jakobsson 2014; Cuzinatto, Medeiros & de Moraes 2014; Wang & Wang 2014; Wang, Dai & Liang 2015; Li, Ding & Zhu 2015). The consistent luminosities of SNe Ia make them the ideal distance indicators in tracing the Hubble diagram of the local (low-redshift) universe. However, since we have little knowledge about the explosion mechanism of GRBs, the GRB candle is much less standard than the SN Ia candle.

Nevertheless, one can still calibrate GRBs using the empirical luminosity correlations found in long GRBs. These correlations includes Amati relation ($E_{\text{peak}} - E_{\text{iso}}$) (Amati et al. 2002; Amati 2003, 2006), Ghirlanda relation ($E_{\text{peak}} - E_\gamma$) (Ghirlanda, Ghisellini & Lazzati 2004), Yonetoku relation ($E_{\text{peak}} - L_{\text{iso}}$) (Yonetoku et al. 2004), Liang-Zhang relation ($t_b - E_{\text{peak}} - E_{\text{iso}}$) (Liang & Zhang 2005), Firmani relation ($T_{0.45} - E_{\text{peak}} - L_{\text{iso}}$) (Firmani et al. 2006b), lag-luminosity relation

* e-mail: linhn@ihep.ac.cn.

† e-mail: lixin1981@cqu.edu.cn.

‡ e-mail: wangesai@itp.ac.cn.

§ e-mail: changz@ihep.ac.cn.

© 2015 RAS

Пока есть проблемы.

arXiv:1504.07026v2 [astro-ph.HE] 20 Aug 2015

Λ CDM-модель – стандартная модель космологии

Λ CDM – Λ Cold Dark Matter

(Некоторые) параметры стандартной модели

$$\Omega_M = 0.309 \pm 0.006 \quad (\Omega_B \approx 0.05, \Omega_{CDM} \approx 0.26) \quad (5.31)$$

$$\Omega_\Lambda = 0.691 \pm 0.006 \quad (5.32)$$

$$\Omega_{rad} \lesssim 10^{-4} \quad (5.33)$$

$$|\Omega_{curv}| < 0.005 \quad (5.34)$$

$$h = 0.6780 \pm 0.0077 \quad (5.35)$$

$$w = -1.006 \pm 0.045 \quad (5.36)$$

1. Уравнение состояния темной энергии:

$$p = w\rho \quad (5.37)$$

$w = -1 \Rightarrow$ темная энергия есть в точности вакуумный космологический член. Иначе «квинтэссенция» ($w > -1$, скалярное поле) или «фантомная энергия» ($w < -1$, непонятно что \Rightarrow Большой разрыв, Big Rip).

2. Оценка Ω_{rad}

$$\Omega_\gamma = \frac{\rho_\gamma}{\rho_c} \quad (5.38)$$

«Закон Стефана-Больцмана»

$$\rho_\gamma = 2 \frac{\pi^2}{30} T_0^4, \quad T_0 = 2.725 \text{ K}^\circ \quad (5.39)$$

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G} H_0^2; \quad h = 0.68 \Rightarrow \quad (5.40)$$

$$\Omega_\gamma = 0.53 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \Omega_{rad} \simeq 10^{-4} \quad (5.41)$$

(Проверьте ★)

Основные фазы эволюции Вселенной

Уравнение Фридмана:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{rad} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \right] \quad (5.42)$$

1. При $a \rightarrow 0$ доминирует радиационный член $\Omega_{rad} \Rightarrow$
радиационно-доминированная стадия, эра доминирования ультрарелятивистской материи, «Горячий Большой взрыв»
2. Потом доминирует член $\Omega_M \Rightarrow$
эра доминирования (холодной нерелятивистской) материи, эра пылевидной материи
3. Потом доминирует член $\Omega_\Lambda \Rightarrow$
эра ДеСиттера

В первом приближении есть всего три основные фазы эволюции, связанные соответственно с $\Omega_{rad}, \Omega_M, \Omega_\Lambda$.

От радиационно-доминированной стадии к стадии холодной материи

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_c \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{rad} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \right] \quad (5.43)$$

$$\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \sim \Omega_{rad} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \Rightarrow a_{eq} \quad (5.44)$$

$$\frac{a_0}{a_{eq}} \sim \frac{\Omega_M}{\Omega_{rad}} \sim \frac{0.3}{10^{-4}} = 1 + z_{eq} \Rightarrow \quad (5.45)$$

$$\boxed{z_{eq} \approx 3 \cdot 10^3} \quad (5.46)$$

$$\frac{T_{eq}}{T_0} = 1 + z_{eq} \Rightarrow T_{eq} = T_0(1 + z_{eq}) \approx 10^4 \text{ K}^\circ \sim 1 \text{ эВ} \quad (5.47)$$

Как найти время t_{eq} ?

– Не совсем просто, через температуру.

$$\boxed{M_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = \frac{1}{\sqrt{G}} \Rightarrow G = \frac{1}{M_{Pl}^2}} \quad (5.48)$$

$$[G] = [\text{ГэВ}]^{-2} = [M]^{-2} \quad (5.49)$$

$$M_{Pl} = 1.6 \cdot 10^{19} \text{ ГэВ} = 2.2 \cdot 10^{-5} \text{ Г} \star \quad (5.50)$$

«Закон Стефана-Больцмана» для фотонов и нейтрино (других УР частиц нет):

$$\rho_{rad} = \frac{\pi^2}{30}g_*T^4 \quad (5.51)$$

g_* – эффективное число степеней свободы (стат. вес) фотонов и нейтрино:

$$g_* = 2 + \frac{21}{4} \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} \approx 3.36 \text{ (получим потом)} \quad (5.52)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \quad (5.53)$$

$$T = (1 + z)T_0 \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} H_{eq} &= \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\rho} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G2\rho_{rad}} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G2\frac{\pi^2}{30}g_*T^4} = \\ &= T^2\sqrt{2}\sqrt{\frac{8\pi^3}{90}g_*\frac{1}{M_{Pl}^2}} = \frac{T^2}{M_{Pl}^*}\sqrt{2} = \frac{[(1 + z_{eq})T_0]^2}{M_{Pl}^*}\sqrt{2} \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$\boxed{M_{Pl}^* = \frac{M_{Pl}}{\sqrt{\frac{8\pi^3}{90}g_*}}} \quad (5.56)$$

На радиационно-доминированной стадии

$$t_{eq} = \frac{1}{2H_{eq}} = \frac{1}{2} \frac{M_{Pl}^*}{[(1 + z_{eq})T_0]^2} \sqrt{2} \approx 120000 \text{ лет} \quad (5.57)$$

От доминирования материи к фазе ДеСиттера – от замедления к ускорению

Ищем точку перегиба $a(t)$:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_c \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_\Lambda \right] \quad (5.58)$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_c \left(\Omega_M \frac{a_0^3}{a} + \Omega_\Lambda a^2 \right) \quad (5.59)$$

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi}{3}G\rho_c \left(-\Omega_M \frac{a_0^3}{a^2} \dot{a} + 2a\dot{a}\Omega_\Lambda \right) \quad (5.60)$$

$$\ddot{a} = 0 \Rightarrow \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 = \frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_M} \quad (5.61)$$

$$z = \frac{a_0}{a} - 1 = \sqrt[3]{\frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_M}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 0.69}{0.31}} - 1 = 0.65 \quad (5.62)$$

$t = ?$

Решение для $\Omega_M, \Omega_\Lambda \neq 0, \Omega_{curv} = \Omega_{rad} = 0$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_\Lambda \right], \quad \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1 \quad (5.63)$$

Проверяется подстановкой:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} \left[\text{sh} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 t \right) \right]^{2/3} \quad (5.64)$$

$$\frac{a_0}{a(t)} = z + 1 = \frac{(\Omega_\Lambda/\Omega_M)^{1/3}}{\left[\text{sh} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 t \right) \right]^{2/3}} \Rightarrow \quad (5.65)$$

$$t = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \text{arsh} \left[\left(\frac{1}{z+1} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}} \right] \quad (5.66)$$

Возраст Вселенной

$$z = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \text{arsh} \left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}} \right) \quad (5.67)$$

$$\Omega_\Lambda = 0.691, \quad \Omega_M = 0.309, \quad h = 0.678 \Rightarrow$$

$$t_0 = 13.80 \cdot 10^9 \text{ лет} \quad (5.68)$$

Возраст перехода от замедления к ускорению

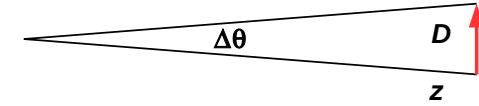
$$z + 1 = 1.65 \Rightarrow t = 7.61 \cdot 10^9 \text{ лет} \quad (5.69)$$

$$t_0 - t = 6.2 \cdot 10^9 \text{ лет} \quad (5.70)$$

Красное смещение - возраст

z	t	t0-t
0.01	13.66	0.1433
0.01259	13.62	0.18
0.01585	13.57	0.2261
0.01995	13.51	0.2838
0.02512	13.44	0.3559
0.03162	13.35	0.446
0.03981	13.24	0.5582
0.05012	13.1	0.6975
0.0631	12.93	0.8701
0.07943	12.72	1.083
0.1	12.46	1.344
0.1259	12.14	1.661
0.1585	11.75	2.045
0.1995	11.29	2.504
0.2512	10.75	3.047
0.3162	10.12	3.677
0.3981	9.401	4.397
0.5012	8.597	5.201
0.631	7.724	6.075
0.7943	6.803	6.996
1	5.865	7.934
1.259	4.946	8.853
1.585	4.08	9.719
1.995	3.294	10.5
2.512	2.608	11.19
3.162	2.028	11.77
3.981	1.552	12.25
5.012	1.172	12.63
6.31	0.875	12.92
7.943	0.6468	13.15
10	0.4743	13.32

Тест углового размера и стандартные линейки



Стандартные линейки $\Rightarrow \Delta\theta(z) \rightarrow \Omega_M, \Omega_\Lambda, \Omega_{curv}$.
 Стандартные линейки существуют – акустические пики.

1. Плоское пространство

$$ds^2 = a^2(t)(d\eta^2 - dx^2) \quad (5.71)$$

В конформных координатах все как в плоской статике:

$$\Delta\theta = \frac{D_{conf}}{x(z)} \quad (5.72)$$

$$D = D_{conf}a(t) \Rightarrow D_{conf} = \frac{D}{a(t)} \quad (5.73)$$

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{D}{a(t)x(z)} = \frac{a_0}{a(t)} \frac{D}{a_0x(z)} = \frac{z+1}{x(z)} \frac{D}{a_0} = \\ &= \frac{D}{a_0} \frac{z+1}{x(z)} = DH_0 \frac{z+1}{\int_0^z [\Omega_M(z+1)^3 + \Omega_\Lambda]^{-1/2} dz} \end{aligned} \quad (5.74)$$

$$\Delta\theta(z) = DH_0 \frac{z+1}{\int_0^z [\Omega_M(z+1)^3 + \Omega_\Lambda]^{-1/2} dz} \quad (5.75)$$

Как себя ведет $\Delta\theta(z)$?

- $z \ll 1$

$$\Delta\theta(z) \cong DH_0 \sqrt{\Omega_M + \Omega_\Lambda} \frac{1}{z} = DH_0 \frac{1}{rH_0} = \frac{D}{r} \quad (5.76)$$

– убывает, как и ожидается.

- $z \gg 1$

$$\begin{aligned} \int_0^z [\Omega_M(z+1)^3 + \Omega_\Lambda]^{-1/2} dz &\cong \int_0^z [\Omega_M(z+1)^3]^{-1/2} dz = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\Omega_M}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{z+1}}\right) \Rightarrow \end{aligned} \quad (5.77)$$

$$\Delta\theta(z) \cong 2DH_0 \sqrt{\Omega_M} \frac{z+1}{1 - \frac{1}{\sqrt{z+1}}} \approx 2DH_0 \sqrt{\Omega_M} (z+1) \quad (5.78)$$

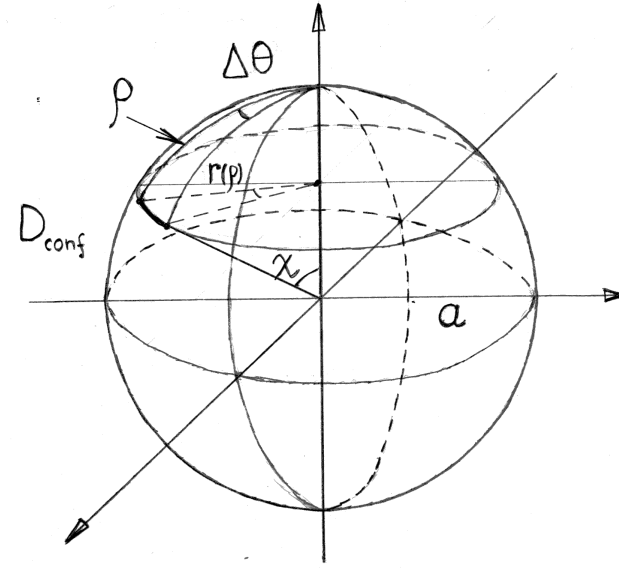
1) Угловой размер растет с ростом расстояния!

- При $z \sim 1.5$ угловой размер достигает минимума (ищется численно).

2) Если известны D и z , то определяется Ω_M !

$$\Omega_M = \left(\frac{\Delta\theta(z)}{2DH_0(z+1)} \right)^2 \quad (5.79)$$

2. 3-сфера



$$D_{conf} = \frac{D}{a} = \frac{a \sin \chi \Delta\theta}{a} = \sin \chi \Delta\theta \Rightarrow \quad (5.80)$$

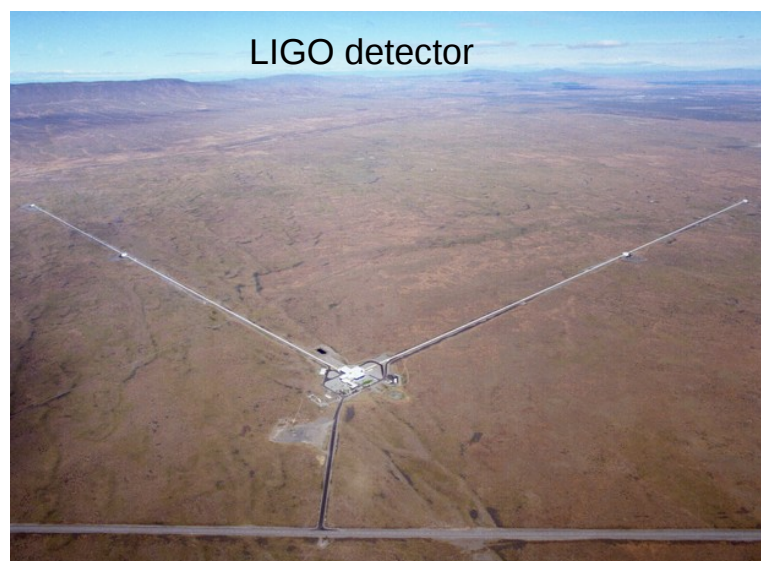
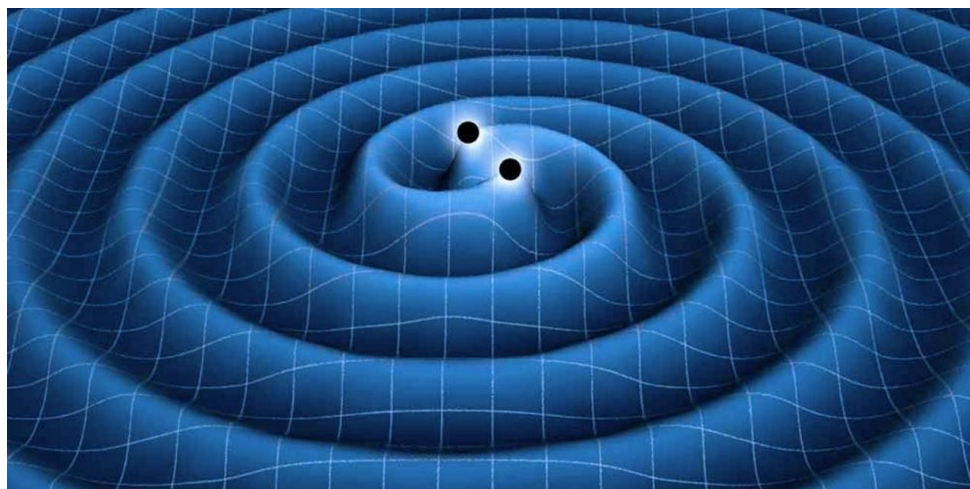
$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{D_{conf}}{\sin \chi} = \frac{D}{a(t) \sin \chi} = \frac{a_0}{a(t)} \frac{D}{a_0 \sin \chi} = \frac{D(z+1)}{a_0 \sin \chi} = \\ &= \frac{D}{a_0 \sin \left[\int_0^z \frac{dz}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv}(1+z)^2}} \right]} \end{aligned} \quad (5.81)$$

3. 3-псевдосфера

$$\Delta\theta = \frac{D}{a_0 \operatorname{sh} \left[\int_0^z \frac{dz}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv}(1+z)^2}} \right]} \quad (5.82)$$

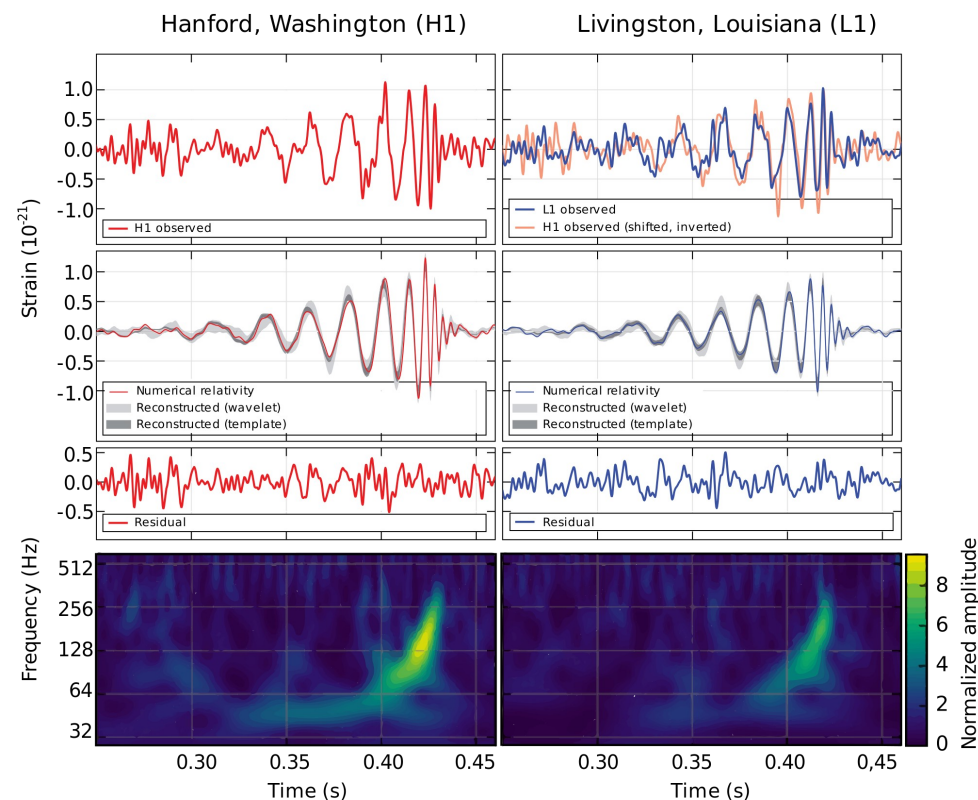
$$\Delta\theta = \Delta\theta(z, D, \Omega_M, \Omega_\Lambda, \Omega_{curv}) \quad (5.83)$$

«Стандартные сирены» - гравитационные сигналы от слияния черных дыр и нейтронных звезд (gravitational wave standard sirens)



Регистрируются наземными детекторами гравитационных волн с расстояний $z \sim 0.1$.

Увеличение чувствительности антенн в будущем увеличит расстояние.



По профилю гравитационного всплеска с хорошей точностью восстанавливаются массы черных дыр и их моменты \Rightarrow абсолютная энергетика всплеска.

По замедлению колебаний восстанавливается z .

Абсолютная энергетика всплеска + z + наблюдаемая амплитуда = «стандартная сирена».

Термодинамика (горячей) Вселенной

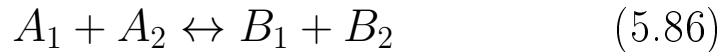
Химический потенциал в равновесии

$$dE = -PdV + TdS + \sum_i \mu_i dN_i = 0 \quad (5.84)$$

Термодинамическое **И** химическое равновесие:
Превращение частиц много быстрее расширения Вселенной:

$$dV = dS = 0 \Rightarrow \sum_i \mu_i dN_i = 0 \quad (5.85)$$

Пример реакции в равновесии:



Предположим малый выход из химического равновесия, $dN \neq 0$:

$$\begin{aligned} \mu_{A_1} dN + \mu_{A_2} dN - \mu_{B_1} dN - \mu_{B_2} dN &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu_{A_1} + \mu_{A_2} &= \mu_{B_1} + \mu_{B_2} \end{aligned} \quad (5.87)$$

В общем случае:

$$\begin{aligned} A_1 + \dots + A_n \leftrightarrow B_1 + \dots + B_m \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu_{A_1} + \dots + \mu_{A_n} &= \mu_{B_1} + \dots + \mu_{B_m} \end{aligned} \quad (5.88)$$

Полезные следствия:

$$e + e \leftrightarrow e + e + \gamma + \dots + \gamma \Rightarrow \mu_\gamma = 0 \quad (5.89)$$

$$b + \bar{b} = 2\gamma \Rightarrow \mu_b = -\mu_{\bar{b}} \quad (5.90)$$

Распределения Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна в импульсном представлении (идеальные газы)

Обычная запись распределений ФД и БЭ идеального газа:

$$N_i = \frac{g_i}{e^{(E_i - \mu)/T} \pm 1}; \quad \begin{array}{l} +\text{ФД} \\ -\text{БЭ} \end{array} \quad (5.91)$$

- N_i – число частиц в энергетическом ящике номер i с энергией E_i
- g_i – число минимальных ячеек фазового пространства одной частицы в этом ящике (стат. вес ящика).

Рассматриваем объем V с однородным газом частиц. Энергетический ящик $d\Gamma = d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{p}$ вблизи энергии E .

Тогда

$$g_i = \frac{d\Gamma}{a} g \quad (5.92)$$

- a – объем минимальной ячейки фазового пространства частицы
- g – статистический вес (количество) внутренних состояний частицы (спин, спиральность)

$$dN = \frac{g}{a} \frac{d\Gamma}{e^{(E - \mu)/T} \pm 1} \quad (5.93)$$

Из кв.мех.:

$$a = h^3 = (2\pi)^3 \hbar^3 \equiv (2\pi)^3 \quad (5.94)$$

Распределение однородно внутри $V \Rightarrow$ нет зависимости от координат и в $d\Gamma$ можно включить весь V :

$$d\Gamma = V d^3\mathbf{p} \Rightarrow \quad (5.95)$$

$$dN = \frac{1}{(2\pi)^3} g \frac{V d^3 \mathbf{p}}{e^{[E(\mathbf{p})-\mu]/T} \pm 1} \quad (5.96)$$

Можно переписать как плотность распределения импульса:

$$\frac{1}{V} \frac{dN}{d^3 \mathbf{p}} \equiv f(\mathbf{p}) = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{[E(\mathbf{p})-\mu]/T} \pm 1} = f(E(\mathbf{p})) \quad (5.97)$$

Нормировка:

$$\int f(\mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} = n - \text{число частиц в 1 объеме} \quad (5.98)$$

Как выражаются n, ρ, p через $f(E)$?

Для частиц типа $i \rightarrow f_i(\mathbf{p})$

$$E_i(\mathbf{p}) = \sqrt{p_i^2 + m_i^2} \Rightarrow E_i dE_i = p_i dp_i \quad (5.99)$$

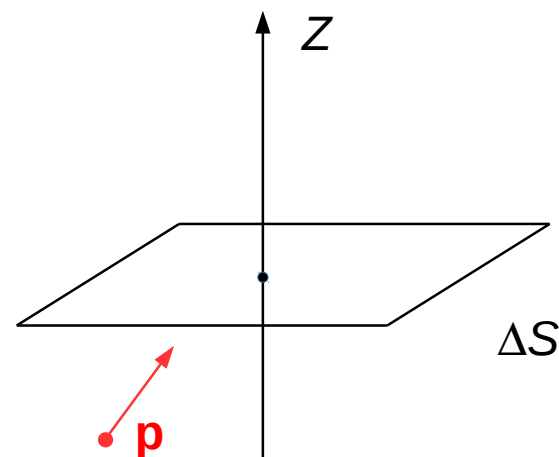
Интегрируя по углам – плотность числа частиц через распределение по энергии:

$$\begin{aligned} n_i &= \int f_i(\mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} = \int f_i(p) 4\pi p^2 dp = \\ &= 4\pi \int f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E dE \quad (5.100) \end{aligned}$$

Плотность энергии

$$\rho_i = \int f_i(\mathbf{p}) E(\mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} = 4\pi \int f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E^2 dE \quad (5.101)$$

Давление



Количество частиц с импульсом в $d^3 \mathbf{p}$ около \mathbf{p} , налетающих с одной стороны за Δt :

$$\Delta n_i = v_z f_i(\mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} \Delta S \Delta t \quad (5.102)$$

$$p_z = \frac{mv_z}{\sqrt{1-v^2}}; \quad E = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}; \Rightarrow v_z = \frac{p_z}{E} \quad (5.103)$$

От одной частицы площадка получает импульс $\Delta p_z = 2p_z \Rightarrow$

Давление есть переданный импульс через единицу площади в единицу времени (p_i слева - давление!):

$$\begin{aligned} p_i &= \int_{p_z > 0} 2p_z \frac{p_z}{E} f_i(\mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} = \left\langle p_z^2 = \frac{1}{3} p^2, 2 \rightarrow 1 \right\rangle = \\ &= \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{E(p)} f_i(p) = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty f_i(E) (E^2 - m_i^2)^{3/2} dE \quad (5.104) \end{aligned}$$

Основные формулы:

$$f(E) = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1} \quad (5.105)$$

$$n_i = 4\pi \int_0^\infty f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E dE \quad (5.106)$$

$$\rho_i = 4\pi \int_0^\infty f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E^2 dE \quad (5.107)$$

$$p_i = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty f_i(E) (E^2 - m_i^2)^{3/2} dE \quad (5.108)$$

Ультррелятивистские частицы: $T \gg m_i, \mu_i = 0$

Из (5.107):

$$\begin{aligned} \rho_i &= 4\pi \int_0^\infty \frac{g_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{E/T} \pm 1} E^3 dE = \\ &= \frac{g_i}{2\pi^2} T^4 \int_0^\infty \frac{z^3}{e^z \pm 1} dz \quad (5.109) \end{aligned}$$

Табличные интегралы:

$$\int_0^\infty \frac{z^{2n-1}}{e^z + 1} dz = \frac{2^{2n-1} - 1}{2n} \pi^{2n} B_n \quad (5.110)$$

$$\int_0^\infty \frac{z^{2n-1}}{e^z - 1} dz = \frac{(2\pi)^{2n}}{4n} B_n \quad (5.111)$$

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42} \quad (5.112)$$

$n = 2 \Rightarrow$

$$\int_0^\infty \frac{z^3}{e^z + 1} dz = \frac{7}{4} \pi^4 \frac{1}{30} \quad (5.113)$$

$$\int_0^\infty \frac{z^3}{e^z - 1} dz = 2\pi^4 \frac{1}{30} \quad (5.114)$$

Объемная формула Стефана-Больцмана для УР-частиц типа i :

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{7}{8} g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 & \text{— Ферми-Дирак} \\ g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 & \text{— Бозе-Эйнштейн} \end{cases} \quad (5.115)$$

Лекция 6

Термодинамика Вселенной (продолжение). Сохранение энтропии. Барион-фотонное отношение. Частицы стандартной модели и эффективный стат. вес. Фазовые переходы в ранней Вселенной. Бариогенезис.

Ультррелятивистские частицы: давление и плотность числа частиц

Если все УР частицы имеют одинаковую температуру T , то

$$\rho = g_* \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad (6.1)$$

$$g_* = \sum_{\text{бозоны}} g_i + \frac{7}{8} \sum_{\text{фермионы}} g_i \quad (6.2)$$

g_* – эффективное число степеней свободы (стат.вес).

Давление

Из (5.108):

$$p_i = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{g_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{E/T} \pm 1} E^3 dE = \frac{\rho_i}{3} \quad (\text{см. (5.109)}) \quad (6.3)$$

Для УР вещества всегда $p = \rho/3$.

Плотность числа частиц

$$\begin{aligned} n_i &= 4\pi \int \frac{g_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{E/T} \pm 1} E^2 dE = \\ &= \frac{g_i}{2\pi^2} T^3 \int_0^\infty \frac{z^2}{e^z \pm 1} dz \quad (6.4) \end{aligned}$$

Табличные интегралы:

$$\int_0^\infty \frac{z^{x-1}}{e^z + 1} = (1 - 2^{1-x}) \Gamma(x) \zeta(x) \quad (6.5)$$

$$\int_0^\infty \frac{z^{x-1}}{e^z - 1} = \Gamma(x) \zeta(x) \quad (6.6)$$

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \quad (6.7)$$

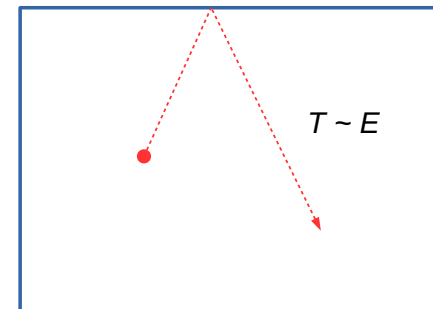
x	$\zeta(x)$
3	1.202
5	1.037
3/2	2.612
5/2	1.341

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)! \\ \Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi} \\ \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \end{aligned} \quad (6.8)$$

$x = 3 \Rightarrow$

$$n_i = \begin{cases} g_i \frac{3\zeta(3)}{4\pi^2} T^3 & \text{– Ферми-Дирак} \\ g_i \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 & \text{– Бозе-Эйнштейн} \end{cases} \quad (6.9)$$

Частица в ящике: частица одна, а температура сколь угодно высокая? Где ошибка?



А есть ли тепловое (химическое) равновесие?

Характерное время расширения:

$$1/t_H \sim H(t) \quad (6.10)$$

Электромагнитное взаимодействие:

$$\sigma \propto \alpha^2 \Rightarrow 1/t_{em} \sim \alpha^2 T \quad (6.11)$$

Из (5.55):

$$H(T) = \frac{T^2}{M_{Pl}^*}; \quad M_{Pl}^* = M_{Pl} \sqrt{\frac{90}{8\pi^3 g_*}} = \frac{1}{1.66\sqrt{g_*}} M_{Pl} \quad (6.12)$$

Нужно:

$$t_{em} \ll t_H \Rightarrow 1/t_{em} \gg H(t) \quad (6.13)$$

$$\alpha^2 T \gg \frac{T^2}{M_{Pl}^*} \Rightarrow T \ll \alpha^2 M_{Pl}^* \sim 10^{14} \text{ ГэВ} \quad (6.14)$$

Тепловое равновесие для ЭМ взаимодействия хорошо работает для $T \lesssim 10^{12} \text{ ГэВ}$

$$f(E) = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1}$$

$$n_i = 4\pi \int_0^\infty f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E dE$$

$$\rho_i = 4\pi \int_0^\infty f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E^2 dE$$

$$p_i = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty f_i(E) (E^2 - m_i^2)^{3/2} dE$$

Нерелятивистский газ
(распределение Больцмана)

$$m_i \gg T, \quad m_i - \mu_i \gg T \Rightarrow e^{(E-\mu_i)/T} \gg 1 \quad (6.15)$$

$$f_B(p) = g_i \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-[E(p)-\mu_i]/T} \quad (6.16)$$

$$f_B(p) = g_i \frac{1}{(2\pi)^3} e^{(\mu_i - m_i)/T} e^{-p^2/(2m_i T)} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} n_i &= \int f_B(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} = \int_0^\infty f_B(p) 4\pi p^2 dp = \\ &= 4\pi \frac{g_i}{(2\pi)^3} e^{(\mu_i - m_i)/T} \int_0^\infty p^2 e^{-p^2/(2m_i T)} dp = \\ &= \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/4 \int_0^\infty = \\ &= g_i e^{(\mu_i - m_i)/T} \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Больцмановский газ:

$$n_i = g_i e^{(\mu_i - m_i)/T} \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \quad (6.19)$$

$$\rho_i = m_i n_i + \frac{3}{2} n_i T \quad \star \quad (6.20)$$

$$p = \frac{1}{3} n \langle \mathbf{v}\mathbf{p} \rangle \Rightarrow \left\langle E_k = \frac{3}{2} T \right\rangle \Rightarrow p_i = n_i T \ll \rho_i \quad (6.21)$$

Энтропия во Вселенной

$$dE = TdS - pdV + \sum_i \mu_i dN_i \quad (6.22)$$

Будем считать dE в расчете на 1 тип частиц.
Для плотностей:

$$\rho = \frac{E}{V}, \quad n = \frac{N}{V}, \quad s = \frac{S}{V} \quad (6.23)$$

$$dE = \rho dV + V d\rho \quad (6.24)$$

$$dN = n dV + V dn \quad (6.25)$$

$$dS = s dV + V ds \quad (6.26)$$

Из (6.22), (6.24)–(6.26):

$$(Ts - p - \rho + \mu n)dV + (Tds - d\rho + \mu dn)V = 0 \quad (6.27)$$

Запишем I начало только с локальными величинами.

Применяем (6.27) к области постоянного (единичного) объема внутри системы. $dV = 0 \Rightarrow$

$$d\rho = Tds + \mu dn \quad (6.28)$$

Это соотношение между локальными величинами выполняется всегда (в равновесии).

Подставляем (6.28) в (6.27) и применяем к произвольной системе переменного объема:

$$s = \frac{p + \rho - \mu n}{T} \quad (6.29)$$

УР газ, μ мало

$$s_i = \frac{p_i + \rho_i}{T} \quad (6.30)$$

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{7}{8} g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 & - \text{ФД} \\ g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 & - \text{БЭ} \end{cases}; \quad p_i = \frac{1}{3} \rho_i \quad (6.31)$$

$$s_i = \frac{4\rho_i}{3T} = \begin{cases} \frac{7}{8} g_i \frac{4\pi^2}{90} T^3 & - \text{ФД} \\ g_i \frac{4\pi^2}{90} T^3 & - \text{БЭ} \end{cases} \quad (6.32)$$

$$n_i = \begin{cases} g_i \frac{3\zeta(3)}{4\pi^2} T^3 & - \text{Ферми-Дирак} \\ g_i \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 & - \text{Бозе-Эйнштейн} \end{cases} \quad (6.33)$$

$$s_i \sim n_i \quad (6.34)$$

Полная плотность энтропии УР газа

$$s = g_* \frac{4\pi^2}{90} T^3 \quad (6.35)$$

Нерелятивистский газ

$$\rho_i = m_i n_i + \frac{3}{2} n_i T \quad (6.36)$$

$$p_i = n_i T \quad (6.37)$$

$$s_i = \frac{p_i + \rho_i - \mu_i n_i}{T} \Rightarrow \quad (6.38)$$

$$s_i = \left(\frac{5}{2} + \frac{m_i - \mu_i}{T} \right) n_i \quad (6.39)$$

Из

$$n_i = g_i e^{(\mu_i - m_i)/T} \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \quad (6.40)$$

получаем

$$\frac{m_i - \mu_i}{T} = \ln \left[\frac{g_i}{n_i} \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \right] \Rightarrow \quad (6.41)$$

$$s_i = n_i \left(\frac{5}{2} + \ln \left[\frac{g_i}{n_i} \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \right] \right) \quad (6.42)$$

При $T \lesssim 0.5$ МэВ электроны и адроны – нерелятивистские.

Сейчас $n_e \sim n_B \sim 10^{-9} n_\gamma$.

\ln в (6.42) $\approx 60(\star) \Rightarrow s_B \ll s_\gamma$ и

$$s \sim s_\gamma \sim n_\gamma \quad (6.43)$$

Из (6.39) и (6.42) $\Rightarrow \mu_i \sim m_i$.

Сохранение энтропии при сохранении разности числа частиц и античастиц: $d(N - \bar{N}) = 0$

В сопутствующем объеме, с учетом всех типов частиц:

$$\begin{aligned} dE &= TdS - pdV + \sum \mu(dN - d\bar{N}) = \\ &= TdS - pdV + \sum \mu d(N - \bar{N}) = \\ &= TdS - pdV \quad (6.44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TdS &= dE + pdV = d(\rho V) + pdV = \\ &= Vd\rho + \rho dV + pdV = (p + \rho)dV + Vd\rho \quad (6.45) \end{aligned}$$

$$T \frac{dS}{dt} = (p + \rho) \frac{dV}{dt} + V \frac{d\rho}{dt} \quad (6.46)$$

$$\text{Сопутствующий объем: } V = ka^3 \Rightarrow \quad (6.47)$$

$$\frac{dV}{dt} = k3a^2 \dot{a} \Rightarrow \quad (6.48)$$

$$T \frac{dS}{dt} = ka^3 \left[(p + \rho) 3 \frac{\dot{a}}{a} + \dot{\rho} \right] \quad (6.49)$$

Закон сохранения ЭИ:

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (p + \rho) = 0 \Rightarrow \frac{dS}{dt} = 0 \quad (6.50)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} (ka^3 s) \Rightarrow \frac{d}{dt} (a^3 s) = 0 \quad (6.51)$$

Закон сохранения энтропии в локальной форме

$$3\dot{a}s + a\dot{s} = 0 \quad (6.52)$$

Барион-фотонное отношение

При температуре ниже по крайней мере ~ 100 ГэВ барионное число сохраняется:

$$(n_B - n_{\bar{B}})a^3 = \text{const} \quad (6.53)$$

$$sa^3 = \text{const} \Rightarrow \quad (6.54)$$

$$\Delta_B = \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{s} = \text{const} \quad (6.55)$$

– хорошая характеристика барионной асимметрии (сейчас $\Delta_B = n_B/s$)

Барион-фотонное отношение:

$$\eta_B = \frac{n_B}{n_\gamma} \quad (6.56)$$

При температуре $T \lesssim 0.5$ МэВ (электроны и позитроны становятся нерелятивистскими и аннигилируют)

$$\left\langle T_\nu = \sqrt[3]{\frac{4}{11}} T_\gamma \right\rangle$$

$$s = g_* \frac{4\pi^2}{90} T^3 = \left(2 + \frac{7}{8} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{11} \right) \frac{4\pi^2}{90} T^3 \quad (6.57)$$

$$\Delta_B = \left\langle n_{\bar{B}} \approx 0 \right\rangle = \frac{n_B}{s} = \frac{n_B n_\gamma}{n_\gamma s} = \eta_B \frac{n_\gamma}{s} =$$

$$= \frac{2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3}{\left(2 + \frac{7}{8} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{11} \right) \frac{4\pi^2}{90} T^3} \eta_B = 0.14 \eta_B \quad (6.58)$$

$$\boxed{\Delta_B = 0.14 \eta_B} \quad (6.59)$$

$$\eta_B = (6.10 \pm 0.20) \cdot 10^{-10} \quad (6.60)$$

$$\Delta_B = 0.87 \cdot 10^{-10} \quad (6.61)$$

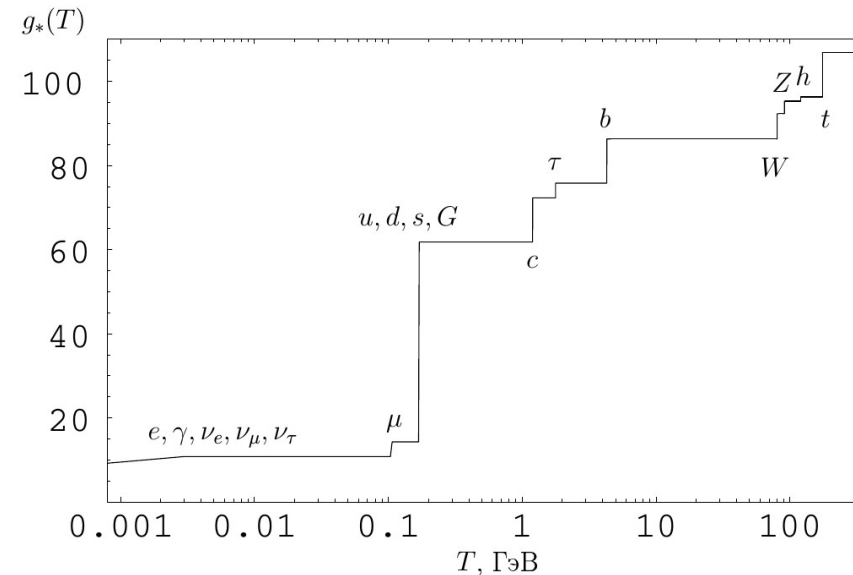
Частицы стандартной модели и $g_*(T)$

$$\rho = g_* \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad (6.62)$$

$$g_* = \sum_{\text{бозоны}} g_i + \frac{7}{8} \sum_{\text{фермионы}} g_i \quad (6.63)$$

Лептоны		Кварки	
$\nu_e(?)$	$e(0.511 \text{ МэВ})$	$u(1.5\text{--}3.0 \text{ МэВ})$	$d(3.0\text{--}7.0 \text{ МэВ})$
$\nu_\mu(?)$	$\mu(105.7 \text{ МэВ})$	$c(1.15\text{--}1.35 \text{ ГэВ})$	$s(0.07\text{--}0.12 \text{ ГэВ})$
$\nu_\tau(?)$	$\tau(1.78 \text{ ГэВ})$	$t(169.3\text{--}173.5 \text{ ГэВ})$	$b(4.1\text{--}4.3 \text{ ГэВ})$
Калибровочные бозоны			
$\gamma(0)$	$G(0)$	$Z(91.2 \text{ ГэВ})$	$W(80.4 \text{ ГэВ})$
Бозон Хиггса $h(125.26 \pm 0.21 \text{ ГэВ})$			

$$X \text{ — бозон: } m_X \sim 10^{15} \div 10^{16} \text{ ГэВ (?) } \quad (6.64)$$



Фазовые переходы в ранней Вселенной

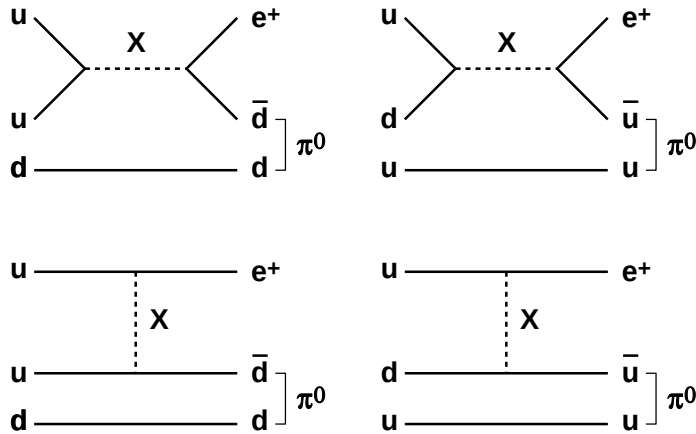
Очень высокие температуры, РД-стадия (см. (5.55))

$$H(T) = \frac{T^2}{M_{Pl}^*}; \quad M_{Pl}^* = \frac{M_{Pl}}{1.66\sqrt{g_*}}; \quad t = \frac{1}{2H} \quad (6.65)$$

1. Фазовый переход GUT

ТВО приводят к нестабильности протона

$$p \rightarrow e^+ + \pi^0 \quad (6.66)$$



Какова масса X ?

Ширина распада протона:

$$\tau_p > 10^{32} \text{ лет}; \quad \Gamma_p = \frac{1}{\tau_p} \sim \frac{\alpha_X^2}{M_X^4} m_p^5, \quad \alpha_X = \frac{g_X^2}{4\pi} \quad (6.67)$$

g_X – константа связи, в амплитуде в каждой вершине

$\alpha_X \sim 1$

$1/M_X^2$ – в амплитуде пропагатора X

m_p^5 – по размерности

$$M_X \sim (\alpha_X^2 m_p^5 \tau_p)^{1/4} \Rightarrow M_X \gtrsim 10^{16} \text{ ГэВ} \star \quad (6.68)$$

Масса M_X возникает от спонтанного нарушения симметрии при $T_{GUT} \sim 10^{16}$ ГэВ.

$g_* \sim 200$ при $T > T_{GUT} \Rightarrow t_{GUT} \sim 10^{-39}$ сек \star

$$S(GUT) \rightarrow SU(3)_c \times SU(2)_W \times U(1) \quad (6.69)$$

GUT-перехода могло и не быть, т.к. инфляция могла закончиться при более низкой температуре.

2. Электрослабый фазовый переход

$$M_W \approx 80 \text{ ГэВ}, \quad M_Z \approx 91 \text{ ГэВ} \Rightarrow T_W \approx 100 \text{ ГэВ} \quad (6.70)$$

$$T > T_W \Rightarrow g_* \sim 100 \Rightarrow t_W = 10^{-11} \div 10^{-10} \text{ сек} \quad (6.71)$$

$$SU(3)_c \times SU(2)_W \times U(1) \rightarrow SU(3)_c \times U(1)_{em} \quad (6.72)$$

3. Конфайнмент кварков и образование кваркового конденсата. Адронизация

$$T_{QCD} \approx 170 \text{ МэВ} \quad (6.73)$$

$$g_* \approx 60 \Rightarrow t_{QCD} \sim 10^{-5} \text{ сек} \quad (6.74)$$

Два события:

1. Конфайнмент кварков, «адронизация»

2. Нарушение киральной симметрии кварков – кварки u, d, s обретают массы (кварковый конденсат)

Порядок следования неизвестен.

Типы и механизмы фазовых переходов

Механизм Хиггса

- Фазовый переход является результатом возникновения ненулевого среднего чего-то, например – поля $\langle \varphi \rangle_T$ при снижении температуры до некоторого критического значения.
- Равновесное значение поля минимизирует большой ТД потенциал

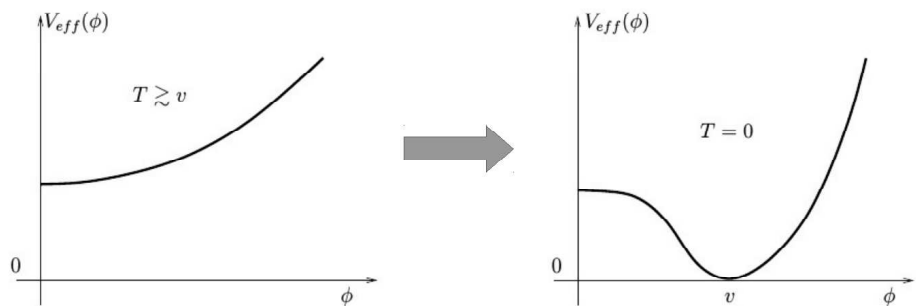
$$\Phi_G = U - TS - \mu N \quad (6.75)$$

На РД-стадии $\mu \sim 0$. Остается свободная энергия:

$$F = U - TS = \Omega V_{eff}(T, \varphi) \quad (6.76)$$

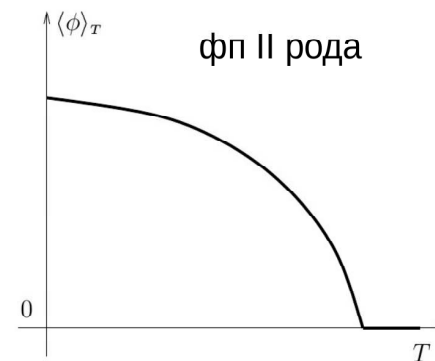
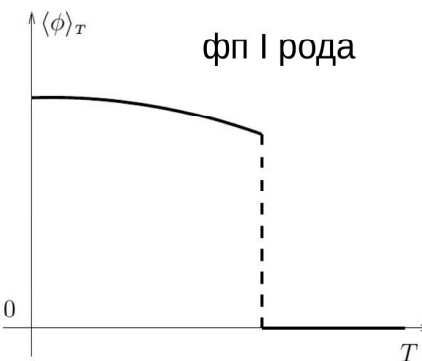
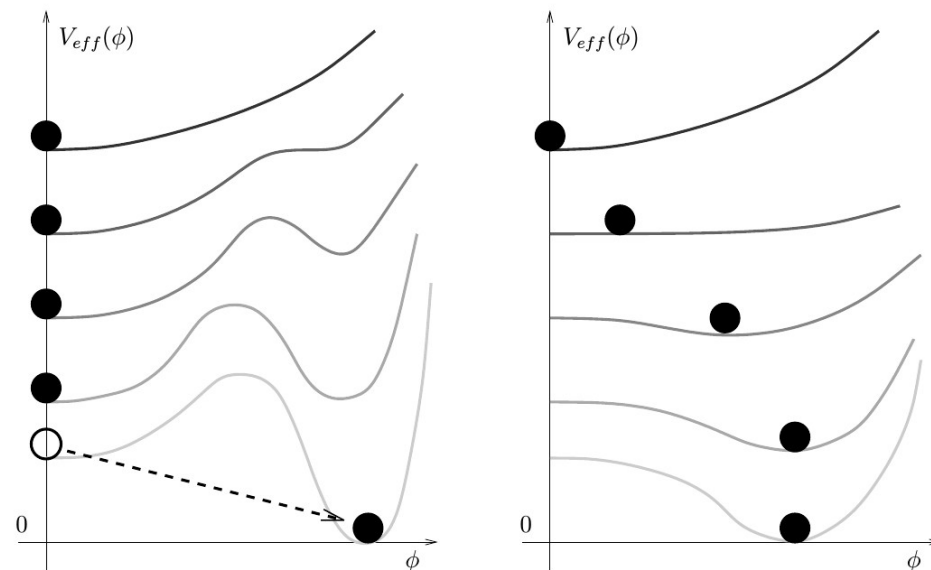
Ω – объем, $V_{eff}(T, \varphi)$ – эффективный потенциал поля при температуре T .

Симметрия, существующая при больших температурах ($T > v$), может быть нарушена при $T = 0$:



Вопрос: как именно происходит трансформация $\langle \varphi \rangle_T = 0 \rightarrow \langle \varphi \rangle_T \neq 0$?

Фазовые переходы I и II рода



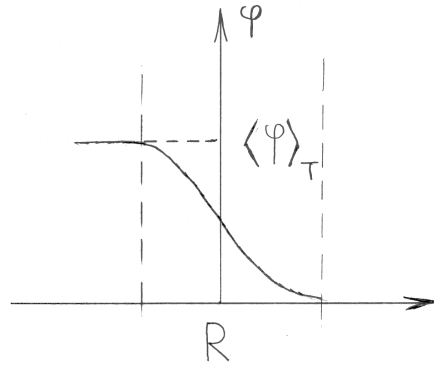
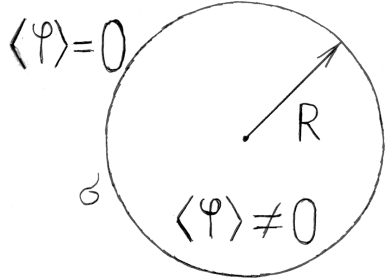
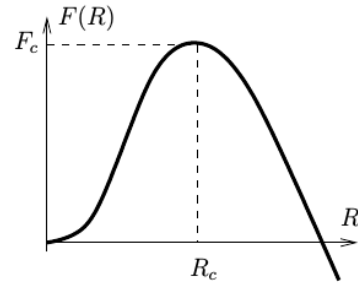
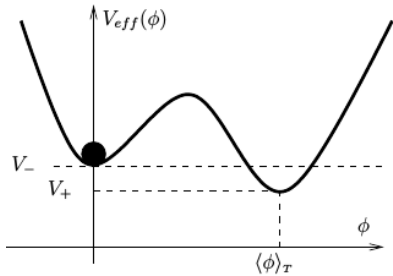
Кроссовер – похоже на I рода, но нет резкого скачка

- Пример первого рода – жидкость \rightarrow пар
- Примеры II рода – точка Кюри, киральный переход QCD
- Пример кроссовера – вода \rightarrow пар при высоких давлениях

Ф.п. II рода происходит плавно во всем пространстве.

Ф.п. I рода во всем пространстве произойти не может, т.к. должен быть преодолен потенциальный барьер свободной энергии.

Ф.п. I рода: Вероятность образования растущего пузыря новой фазы



Баланс объемной и поверхностной энергии:

$$\Delta V = V_- - V_+ > 0 \quad (6.77)$$

$$F(R) = 4\pi R^2 \sigma - \frac{4\pi}{3} R^3 \Delta V \quad (6.78)$$

Если $R < R_c$ пузырек схлопывается
 Если $R > R_c$ пузырек растет $\Rightarrow R_c$ – критический пузырек

$$\frac{\partial F}{\partial R} = 0 \rightarrow R_c; \quad R_c = \frac{2\sigma(T)}{\Delta V(T)} \quad (6.79)$$

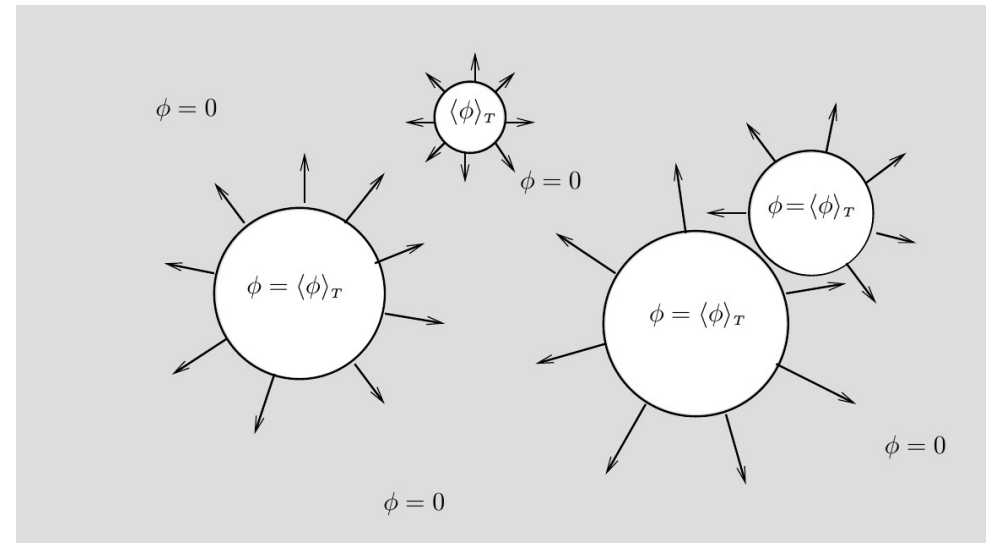
$$F_c(T) = 4\pi \left(\frac{2\sigma}{\Delta V} \right)^2 \sigma - \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2\sigma}{\Delta V} \right)^3 \Delta V = \frac{16\pi}{3} \frac{\sigma^3}{\Delta V^2} \quad (6.80)$$

Вероятность флуктуации в единицу времени в единице объема до F_c : больцмановский множитель + размерность:

$$\Gamma \sim AT^4 e^{-F_c/T} \quad (6.81)$$

A слабо зависит от T , справедливо при $F_c \gg T$ (Формула Аррениуса)

Из (6.80), (6.81) видно, что для перехода необходимо существенное переохлаждение ($\phi = 0, \Delta V > 0$).



- Условие перехода: вероятность образования 1 пузыря в хаббловском объеме за хаббловское время ~ 1 :

$$AT^4 e^{-F_c/T} \sim H^4(T) = \left(\frac{T^2}{M_{Pl}^*}\right)^4 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{F_c(T)} \ln \left[A \left(\frac{M_{Pl}^*}{T}\right)^4 \right] \quad (6.82)$$

Как считать температуру перехода

- Используя какую-то технику (аналитику, расчеты на решетке) считать $V_{eff}(T, \varphi)$
- Через $V_{eff}(T, \varphi)$ считать $\Delta V(T)$
- Считать $\sigma(T)$ (вариационная задача: профиль $\varphi(r)$ вблизи $r = R$ должен минимизировать свободную энергию)
- Через $\Delta V(T)$ и $\sigma(T)$ найти $F_c(T)$ (формула (6.80))
- Решать относительно T уравнение (6.82) $\rightarrow T_c$

Пример: электрослабый переход (на что это может быть похоже)

$$T \sim 100 \text{ ГэВ} \quad (6.83)$$

$$H^{-1} = \frac{M_{Pl}^*}{T^2} \sim 1 \text{ см} \quad (6.84)$$

$$R_c \sim \frac{1}{T} \sim 10^{-15} \div 10^{-16} \text{ см} \quad (6.85)$$

1 пузырек размером 10^{-15} см в 1 см^3 .

Пузырьки сливаются и заполняют все пространство.

Для $m_H = 125 \text{ ГэВ}$ может иметь место не ф.п. I рода, а гладкий кроссовер.

Бариогенезис – генерация барионной асимметрии

Два основных варианта:

1. На фазе постинфляционного разогрева.
2. На этапе горячего Большого взрыва.

Рассматриваем только вариант 2.

Предполагается динамическая генерация избытка барионов

$$\Delta_B = \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{s} \approx 0.86 \cdot 10^{-10} \quad (6.86)$$

из первоначально симметричного состояния.

Условия Сахарова:

1. Несохранение барионного числа
2. Нарушение ТД-равновесия
3. Нарушение CP -инвариантности

1. – очевидно.

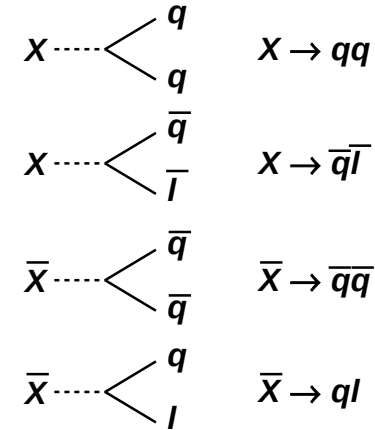
2. – следует из 1. Если барионное число не сохраняется, то в состоянии равновесия число барионов было бы равно числу антибарионов, так как в состоянии равновесия концентрации вообще всех ультрарелятивистских частиц одинаковы, если ничто не мешает им превращаться друг в друга.

3. – нетривиально.

Существуют 2-3 десятка моделей бариогенезиса. Рассматриваем только одну:

GUT бариогенезис

Те же частицы X , $M_X \sim 10^{16}$ ГэВ, которые могут приводить к распаду протона, сами могут распадаться на кварки и лептоны:



Из-за CP -нарушения парциальные вероятности каналов могут не совпадать:

$$P(X \rightarrow qq) = r \quad (6.87)$$

$$P(X \rightarrow \bar{q}l) = 1 - r \quad (6.88)$$

$$P(\bar{X} \rightarrow \bar{q}\bar{q}) = \bar{r} \quad (6.89)$$

$$P(\bar{X} \rightarrow ql) = 1 - \bar{r} \quad (6.90)$$

Если было $n_X = n_{\bar{X}}$, то после распада X -частиц образуется избыток барионного заряда:

$$\begin{aligned} n_B &= n_X r \cdot \frac{2}{3} + n_X (1 - r) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \\ &+ n_X \bar{r} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + n_X (1 - \bar{r}) \cdot \frac{1}{3} = \\ &= n_X (r - \bar{r}) \quad (6.91) \end{aligned}$$

X и \bar{X} распадаться должны чаще, чем рождаться!
(химическое неравновесие)

Температура GUT-бариогенезиса $10^{15} \div 10^{16}$ ГэВ (как и фазовый переход GUT)

Интересная возможность: если CP-нарушение зависит от пространства (например, является результатом спонтанного нарушения симметрии), то могут образоваться домены вещества и антивещества.

Электрослабый бариогенезис:

T от 10^{12} ГэВ до 100 ГэВ.

Если работает электрослабый бариогенезис, то энтропия заведомо сохраняется только при $T < 100$ ГэВ.

Лекция 7

Закалка нейтрино. Закалка нейтронов. Нуклеосинтез. Синтез первичного гелия. Темная материя и закалка темной материи.

Закалка нейтрино

Температура – МэВы

e^-, e^+ – ультрарелятивистские

μ, τ – уже проаннигилировали

Барионы – нерелятивистские

Процессы: $\nu + e \rightleftharpoons \nu + e$ рассеяние
 $\nu + \nu \rightleftharpoons \nu + \nu$ рассеяние
 $\nu + \bar{\nu} \rightleftharpoons e^+ + e^-$ аннигиляция

Сечение процессов, по размерности:

$$G_F = 1.17 \cdot 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2} \quad (7.1)$$

$$\sigma_\nu \sim G_F^2 E^2 [\text{ГэВ}^{-4} \cdot \text{ГэВ}^2 = \text{ГэВ}^{-2}] \quad (7.2)$$

Время свободного пробега

$$\tau_\nu = \frac{1}{\langle \sigma_\nu v n \rangle} = \langle v \sim 1 \rangle = \frac{1}{\sigma_\nu n} =$$

$$= \left\langle n = \frac{3}{4} g_* \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \right\rangle \sim \frac{1}{\sigma_\nu T^3} \sim \frac{1}{G_F^2 T^5} \quad (7.3)$$

Хаббловское время

$$\frac{1}{H} = \frac{M_{Pl}^*}{T^2}; \quad g_* = 2 + \frac{7}{8}(2+2) + 3 \cdot 2 \cdot \frac{7}{8} \langle \gamma, e^\pm, \nu \rangle \quad (7.4)$$

Условие закалки ν :

$$\tau_\nu \sim \frac{1}{H} \Rightarrow \frac{1}{G_F^2 T^5} \sim \frac{M_{Pl}^*}{T^2} \quad (7.5)$$

$$T_{\nu, f} \sim \sqrt[3]{\frac{1}{G_F^2 M_{Pl}^*}} \approx 1.5 \text{ МэВ} \star \quad (7.6)$$

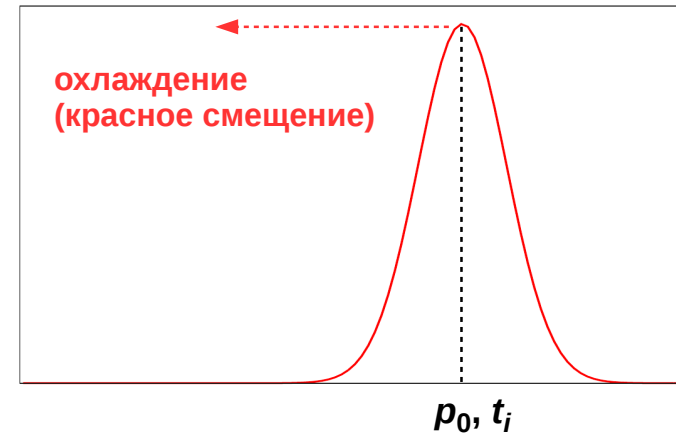
Возраст Вселенной для $T_{\nu, f}$

$$t_{\nu, f} = \frac{1}{2H} = \frac{1}{2} \frac{M_{Pl}^*}{T_{\nu, f}^2} \approx 0.3 \text{ сек} \quad (7.7)$$

Функция распределения по импульсам для газа не взаимодействующих частиц
 (как ν после закалки).

Функции распределения замороженные и не равновесные.

$$f(\mathbf{p}, t) = \frac{a(t)}{a(t_i)} f_i \left(\frac{a(t)}{a(t_i)} \mathbf{p} \right) \quad (7.8)$$



Сейчас:

$$T_\nu(t_0) = T_{\nu,f} \frac{a(t_{\nu,f})}{a(t_0)} = \frac{T_{\nu,f}}{1 + z_{\nu,f}} \quad (7.9)$$

- Сначала T_ν и T_γ падают одинаково.
- После закалки нейтрино, $T_{\nu,f} = 1.5 \text{ МэВ}$ остается много e^\pm , которые аннигилируют **позже** и дополнительно подогревают газ фотонов.

На сколько?

Сохранение энтропии:

$$s = g_* \frac{4\pi^2}{90} T^3; \quad sa^3(t) = \text{const} \Rightarrow \quad (7.10)$$

$$g_*(T) a^3 T^3 = \text{const} \quad (7.11)$$

После закалки ν , но перед аннигиляцией e^+, e^- в электрон-фотонную энтропию дают вклад γ, e^+, e^- :

$$g_*^{em}(\text{before}) = 2 + \frac{7}{8}(2 + 2) = \frac{11}{2} \quad (7.12)$$

После аннигиляции e^+, e^- :

$$g_*^{em}(\text{after}) = 2 \Rightarrow \quad (7.13)$$

a меняется мало за время аннигиляции

$$g_*^{em}(\text{before}) a^2 T_{\nu,\gamma}^3 = g_*^{em}(\text{after}) a^2 T_\gamma^3 \Rightarrow \quad (7.14)$$

$$\frac{T_\gamma^3}{T_{\nu,\gamma}^3} = \frac{g_*^{em}(\text{before})}{g_*^{em}(\text{after})} = \frac{11/2}{2} = \frac{11}{4} \Rightarrow \quad (7.15)$$

$$\boxed{\frac{T_\gamma}{T_\nu} = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3}} \quad (7.16)$$

Сейчас:

$$T_\nu = \frac{2.73 \text{ К}^\circ}{(11/4)^{1/3}} = 1.95 \text{ К}^\circ \quad (7.17)$$

Релятивистская ф.р. ν заморожена \Rightarrow

Плотность реликтовых нейтрино каждого типа (частицы + античастицы)

$$n_\nu = \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T_\nu^3 = 112 \text{ см}^{-3} \star \quad (7.18)$$

(даже если нейтрино массивные и сейчас нерелятивистские!)

Ограничение сверху на массу нейтрино

$m_\nu \gg T_\nu$

$$\rho_{\nu_i} \cong m_{\nu_i} n_\nu \quad (7.19)$$

$$\Omega_{\nu_i} = \frac{\rho_{\nu_i}}{\rho_c} = \frac{m_{\nu_i} \times 112 \text{ см}^{-3}}{1.88 \cdot 10^{-29} h^2 \Gamma / \text{см}^3} = \frac{m_{\nu_i}}{1 \text{ эВ}} \times 0.01 h^{-2} \star \quad (7.20)$$

Потребуем $\sum \Omega_{\nu_i} \ll \Omega_M \Rightarrow$

$$\sum_i m_{\nu_i} 0.01 h^{-2} \ll \Omega_M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_i m_{\nu_i} \ll 100 h^2 \Omega_M \text{ эВ} \approx 14 \text{ эВ} \Rightarrow \sum_i m_{\nu_i} \lesssim 2 \text{ эВ} \quad (7.21)$$

(современное ограничение по всем наблюдениям:
 $\sum m_{\nu_i} \lesssim 1 \text{ эВ}$)

Закалка нейтронов

При высоких температурах и плотностях n и p находятся в равновесии за счет слабых процессов

$$p + e^- \leftrightarrow n + \nu_e, \quad n + e^+ \leftrightarrow p + \bar{\nu}_e \quad (7.22)$$

Характерные масштабы энергии:

$$\begin{aligned} \Delta m &= m_n - m_p = 1.3 \text{ МэВ} \\ m_e &= 0.51 \text{ МэВ} \end{aligned} \quad (7.23)$$

Будем считать $T \gg \Delta m, m_e$

$$\sigma_{pn} \sim G_F^2 E^2; \quad \tau_{pn} = \frac{1}{\sigma_{pn} v n} \sim \frac{1}{G_F^2 T^5} \quad (7.24)$$

τ_{pn} определяется электронами и нейтрино, которые УР.

Закалка нейтронов:

$$\tau_{np} \sim \frac{1}{H} = \frac{T^2}{M_{Pl}^*} \quad (7.25)$$

Релятивистские γ, e^\pm, ν :

$$g_* = 2 + \frac{7}{8} \cdot 4 + \frac{7}{8} \cdot 2 \cdot 3 \quad (7.26)$$

– точно как для закалки ν , и снова

$$T_{n,f} \sim \sqrt[3]{\frac{1}{G_F^2 M_{Pl}^*}} = 1.5 \text{ МэВ} \quad (7.27)$$

Не очень согласуется с $T_{n,f} \gg \Delta m$!

Более точное значение (из кинетических уравнений):

$$T_{n,f} \approx 0.75 \text{ МэВ}, \quad t_{n,f} \approx 1.2 \text{ сек} \quad (7.28)$$

Остаточная концентрация нейтронов

В равновесии

$$\mu_p + \mu_e = \mu_n + \mu_\nu \Rightarrow \mu_n = \mu_p + \mu_e - \mu_\nu \quad (7.29)$$

p, n – нерелятивистские $\Rightarrow \mu_p \sim m_p, \mu_n \sim m_n$
 e, ν – ультрарелятивистские $\Rightarrow \mu_e, \mu_\nu$ – малы*

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e - \mu_\nu \approx \mu_p \quad (7.30)$$

$$n_p = 2 \left(\frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_p - m_p)/T} \quad (7.31)$$

$$n_n = 2 \left(\frac{m_n T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_n - m_n)/T} \quad (7.32)$$

Отсюда, в момент замораживания ($T = T_{n,f}$)

$$\frac{n_n}{n_p} \cong e^{-(m_n - m_p)/T_{n,f}} = e^{-\Delta m/T_{n,f}} \quad (7.33)$$

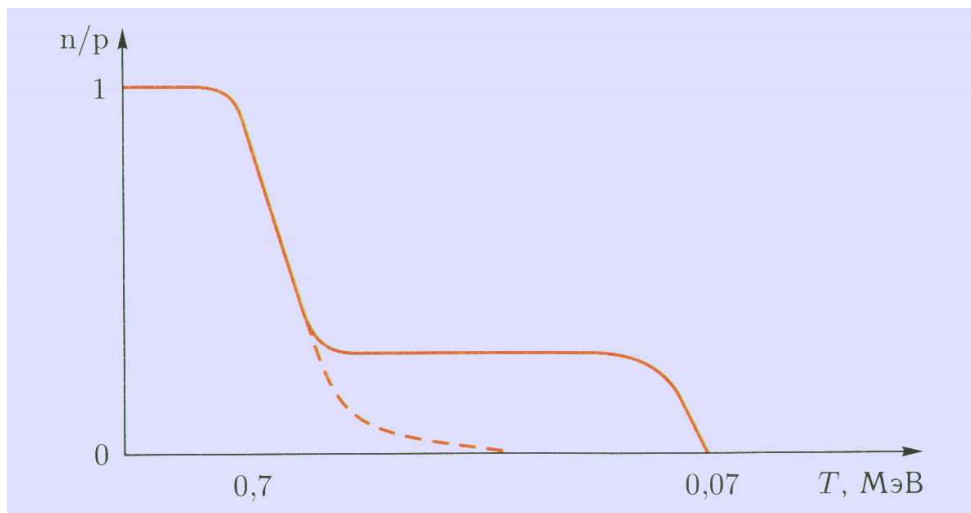
Для $T_{n,f} = 0.75 \text{ МэВ}$

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{-1.3/0.75} \approx 0.18 \quad (7.34)$$

Отношение через $T_{n,f}$ зависит от g_* , которое зависит от предположения $N_\nu = 3$. Так как n_n/n_p радикально влияет на первичный нуклеосинтез (количество ^4He) то гипотезы могут быть проверены.

*Более аккуратное обоснование $\mu_n \approx \mu_p$ (7.30) см. Горбунов, Рубаков, Т.1, 8.1. ($\mu_e \sim \mu_\nu \sim 10^{-3} \text{ эВ}$).

Сначала концентрация нейтронов равновесным образом падает относительно концентрации протонов из-за разницы в массах, потом нейтроны выходят из равновесия (замораживаются).



Нуклеосинтез

Кажется, что ядро A, Z начнет эффективно синтезироваться после того, как температура станет ниже энергии связи этого ядра. Это ошибка.

- Рассматриваем задачу синтеза общего ядра A, Z , предполагая, что синтез возможен через некоторую цепочку реакций.
- Рассматриваем только термодинамику реакции предполагая равновесие.

В равновесии:

$$n_n = 2 \left(\frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_n - m_n)/T} \quad (7.35)$$

$$n_p = 2 \left(\frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_p - m_p)/T} \quad (7.36)$$

(в предэкспоненциальном множителе не различаем m_n и m_p)

$$\mu_A = \mu_p Z + \mu_n (A - Z) \quad (7.37)$$

(это следствие равновесия)

$$\begin{aligned} n_A &= g_A \left(\frac{A m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_A - m_A)/T} = \\ &= \sqrt{\Delta_A = Z m_p + (A - Z) m_n - m_A} = \\ &= g_A \left(\frac{A m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{[Z(\mu_p - m_p) + (A - Z)(\mu_n - m_n) + \Delta_A]/T} \quad (7.38) \end{aligned}$$

$$e^{(\mu_p - m_p)/T} = n_p / 2 \left(\frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} \Rightarrow \quad (7.39)$$

$$e^{Z(\mu_p - m_p)/T} = \left[n_p / 2 \left(\frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} \right]^Z \quad (7.40)$$

$$e^{(A-Z)(\mu_n - m_n)/T} = \left[n_n / 2 \left(\frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} \right]^{(A-Z)} \quad (7.41)$$

$$\begin{aligned} n_A &= g_A \left(\frac{A m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} \left[\frac{n_p}{2 \left(\frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2}} \right]^Z \left[\frac{n_n}{2 \left(\frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2}} \right]^{A-Z} e^{\Delta_A/T} = \\ &= g_A n_p^Z n_n^{A-Z} 2^{-A} A^{3/2} \left(\frac{2\pi}{m_p T} \right)^{\frac{3}{2}(A-1)} e^{\Delta_A/T} \quad (7.42) \end{aligned}$$

(«Формула Саха»)

Концентрация нуклонов, связанных в ядре (A, Z):

$$\begin{aligned} X_A &\equiv \frac{A \times n_A}{n_B} = \\ &= g_A X_p^Z X_n^{A-Z} n_B^{A-1} 2^{-A} A^{5/2} \left(\frac{2\pi}{m_p T} \right)^{\frac{3}{2}(A-1)} e^{\Delta_A/T} \quad (7.43) \end{aligned}$$

При той же самой температуре

$$n_B = \eta_B n_\gamma = \eta_B \times 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 = 0.24 \eta_B T^3 \quad (7.44)$$

Подставляем n_B в (7.43):

$$X_A = g_A X_p^Z X_n^{A-Z} 2^{-A} A^{5/2} \left[\eta_B^{A-1} \left(\frac{2.5T}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}(A-1)} \right] e^{\Delta_A/T} \quad (7.45)$$

Очень малый множитель:

$$\eta_B^{A-1} \left(\frac{2.5T}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}(A-1)} \Rightarrow \quad (7.46)$$

Чтобы X_A было не очень мало нужна температура $T \ll \Delta_A$

Начало ядерного синтеза: реакция $p + n \rightarrow D + \gamma$

• Когда реакция $p + n \rightarrow D + \gamma$ становится термодинамически выгодной? Вот когда:

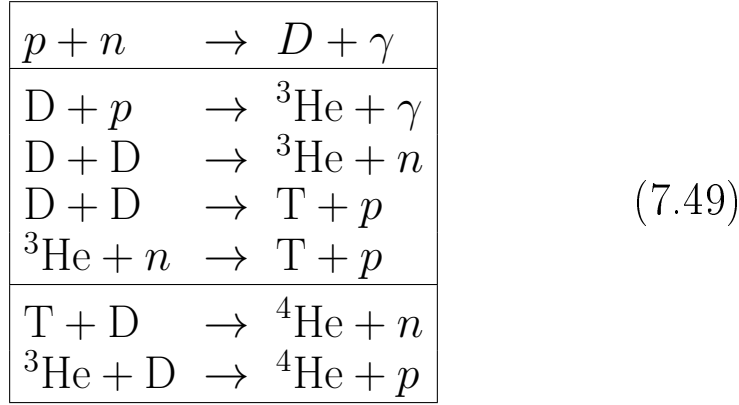
$$X_D = X_p X_n \sqrt{2} \eta_B \left(\frac{2.5 T_{NS}}{m_p} \right)^{3/2} e^{\Delta_D/T_{NS}} \sim 1 \quad (7.47)$$

$\Delta_D = 2.23$ МэВ, $X_p X_n = 0.14$ (после заковки n) \Rightarrow Численно (начало нуклеосинтеза):

$$T_{NS} \approx 65 \text{ КэВ}; t_{NS} \approx 4.5 \text{ мин} \quad (7.48)$$

Синтез гелия

Термодинамически выгодным является продолжение синтеза D до ${}^4\text{He}$.



Концентрация адронов, связанных в ядре (A, Z) (формула (7.45)):

$$X_A = g_A X_p^Z X_n^{A-Z} 2^{-A} A^{5/2} \eta_B^{A-1} \left(\frac{2.5T}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}(A-1)} e^{\Delta A/T} \quad (7.50)$$

Оценим равновесные концентрации всех прочих ядер, считая, что концентрация ${}^4\text{He} \sim 1$

Из (7.45):

$$X_{4\text{He}} \sim X_p^2 X_n^2 \eta_B^3 \left(\frac{2.5T_{NS}}{m_p} \right)^{9/2} e^{\Delta_{4\text{He}}/T_{NS}} \quad (7.51)$$

Считаем $X_p^2 \sim 1$, выражаем X_n :

$$X_n \sim X_{4\text{He}}^{1/2} \eta_B^{-3/2} \left(\frac{2.5T_{NS}}{m_p} \right)^{-9/4} e^{-\Delta_{4\text{He}}/2T_{NS}} \quad (7.52)$$

Подставляем X_n в (7.45) для произвольного ядра (A, Z) , считая $X_{4\text{He}} \sim 1$:

$$\begin{aligned} X_A &\sim \left[\eta_B \left(\frac{2.5T_{NS}}{m_p} \right)^{3/2} \right]^{\frac{3}{2}Z - \frac{1}{2}A - 1} \times \\ &\quad \times \exp \left(\frac{\Delta_A - \Delta_{4\text{He}}(A - Z)/2}{T_{NS}} \right) \approx \\ &\approx 10^{7.4(A+2-3Z)} \exp \left\{ \frac{(A - Z)[\Delta_A/(A - Z) - \Delta_{4\text{He}}/2]}{T} \right\} \quad (7.53) \end{aligned}$$

Только для ${}^4\text{He}$ экспонента ~ 1 .
Для всех других ядер

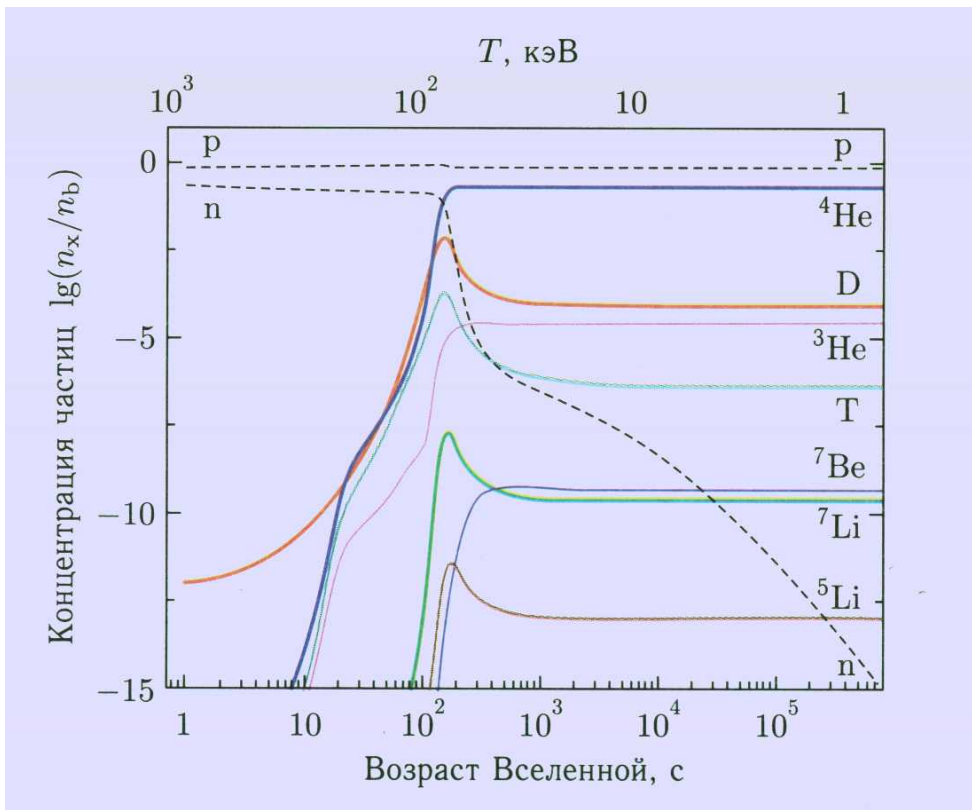
$$\Delta_A/(A - Z) - \Delta_{4\text{He}}/2 < 0 \quad (7.54)$$

и экспонента очень мала.

При $T_{NS} = 65$ кэВ из (7.53):

$$X_D \sim 10^{-79}, \quad X_{3\text{He}} \sim 10^{-118}, \dots \quad (7.55)$$

Это равновесные концентрации, но в действительности для большинства реакций равновесия нет. Но качественный вывод верен – ${}^4\text{He}$ сильно преобладает из-за высокой энергии связи на нуклон.



Остаточная концентрация ${}^4\text{He}$

Все нейтроны, не распавшиеся к $t_{NS} = 4.5$ мин, входят в ${}^4\text{He}$.

$$n_{4\text{He}}(t_{NS}) = \frac{1}{2}n_n(t_{NS}) \quad (7.56)$$

$$\frac{n_n(t_{NS})}{n_p(t_{NS})} \cong 0.2 \cdot e^{-t_{NS}/\tau_n} \approx \frac{1}{7} \quad (\tau_n = 886 \text{ сек}) \quad (7.57)$$

Массовая доля ${}^4\text{He}$:

$$\begin{aligned} X_{4\text{He}} &= \frac{m_{4\text{He}}n_{4\text{He}}}{m_p(n_p + n_n)} = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}n_n(t_{NS})}{n_p + n_n} = \\ &= \frac{2}{\frac{n_p(t_{NS})}{n_n(t_{NS})} + 1} \approx 25\% \quad (7.58) \end{aligned}$$

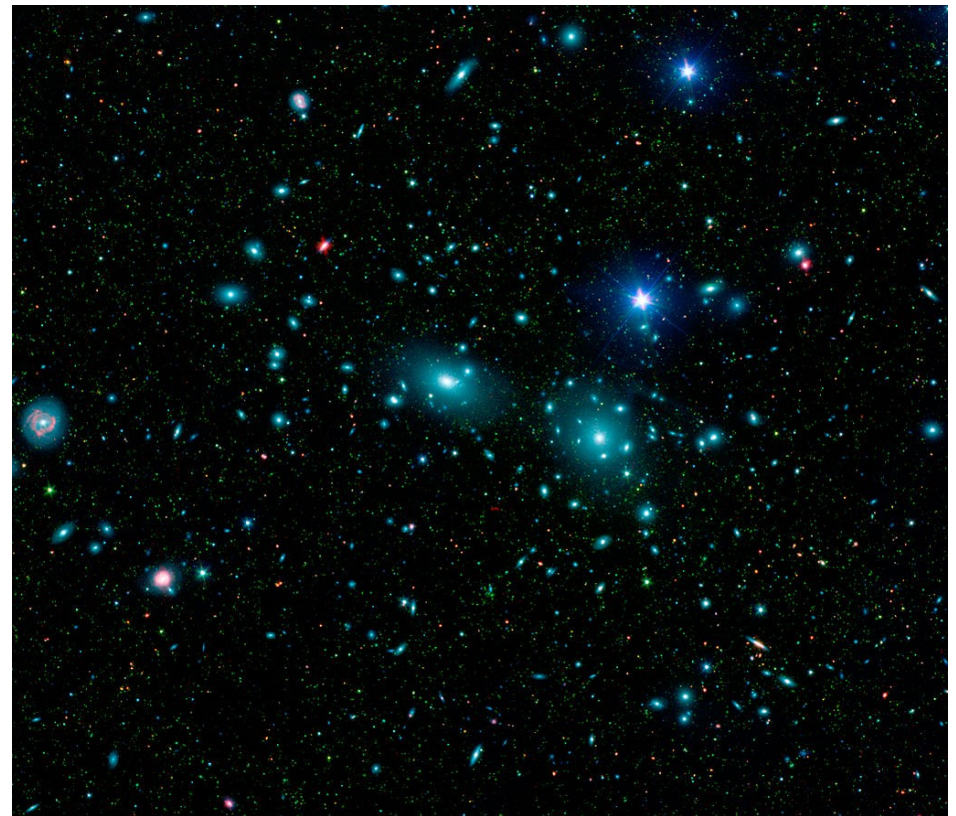
Темная материя

1. Скорости галактик в скоплениях

Теорема о вириале: $\langle T \rangle = \langle U \rangle$.

Фриц Цвикки, 1937. Скопление Кома (Волосы Вероники): Масса скопления в десятки раз превышает массу видимого вещества. «Темная материя» – термин Цвикки.

F. Zwicky. 1937, ApJ, 86, 217.



2. Плоские кривые вращения галактик

Ожидается $V \propto \sqrt{R}$

Туманность Андромеды (Хорес Бэбкок, 1939)

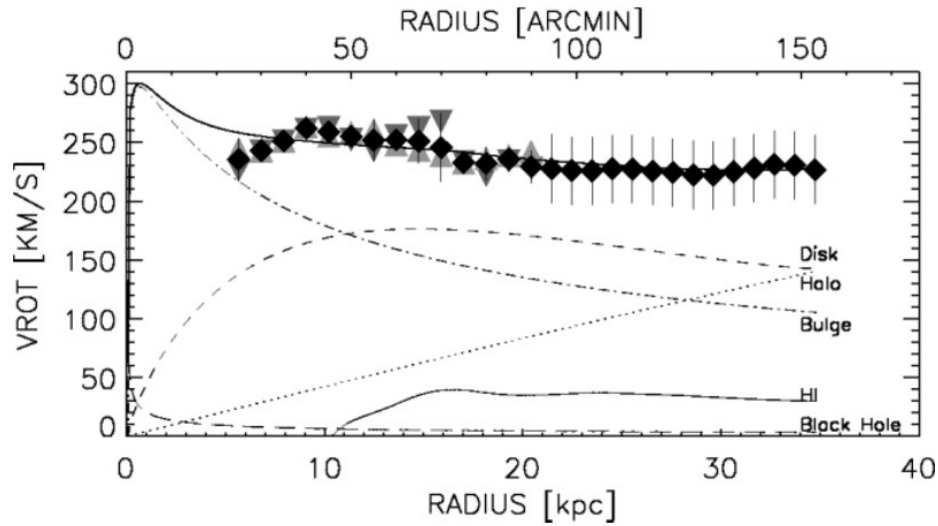
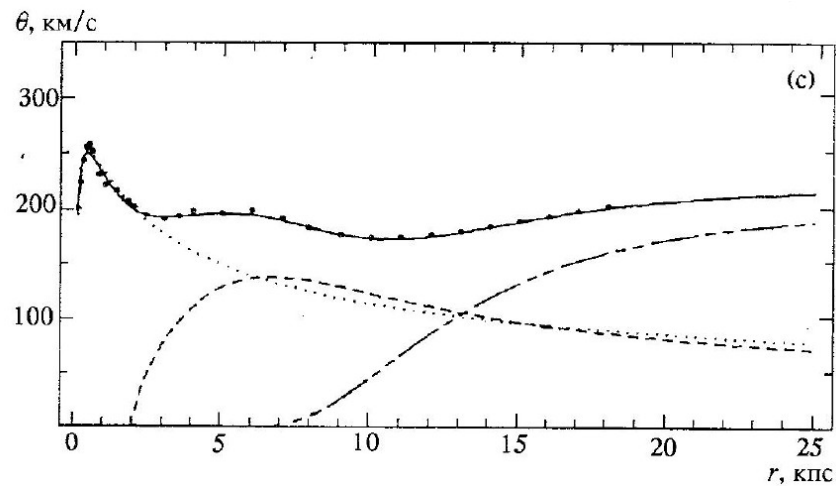


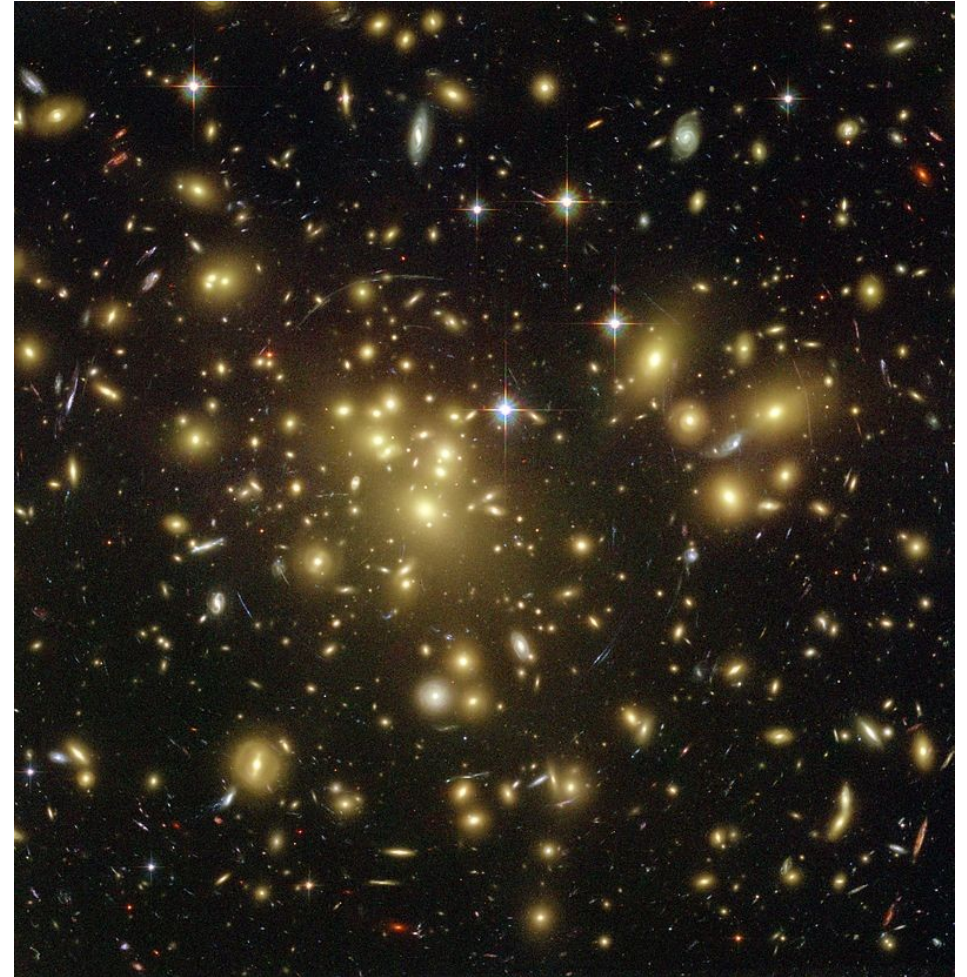
FIG. 2.—Rotation curve and mass model for M31. The new rotation velocities from the Effelsberg and GBT 100 m observations are for $R > 21$ kpc.

Млечный Путь



3. Сильное гравитационное линзирование скоплениями галактик

Дает результаты, согласующиеся с измерением скоростей в скоплениях галактик.



Скопления галактик Abell 1689. Снимок космического телескопа Хаббл (HST). Галактики самого скопления изображены жёлтым цветом. Галактики на заднем фоне (синие и красные) изогнуты в длинные дуги.

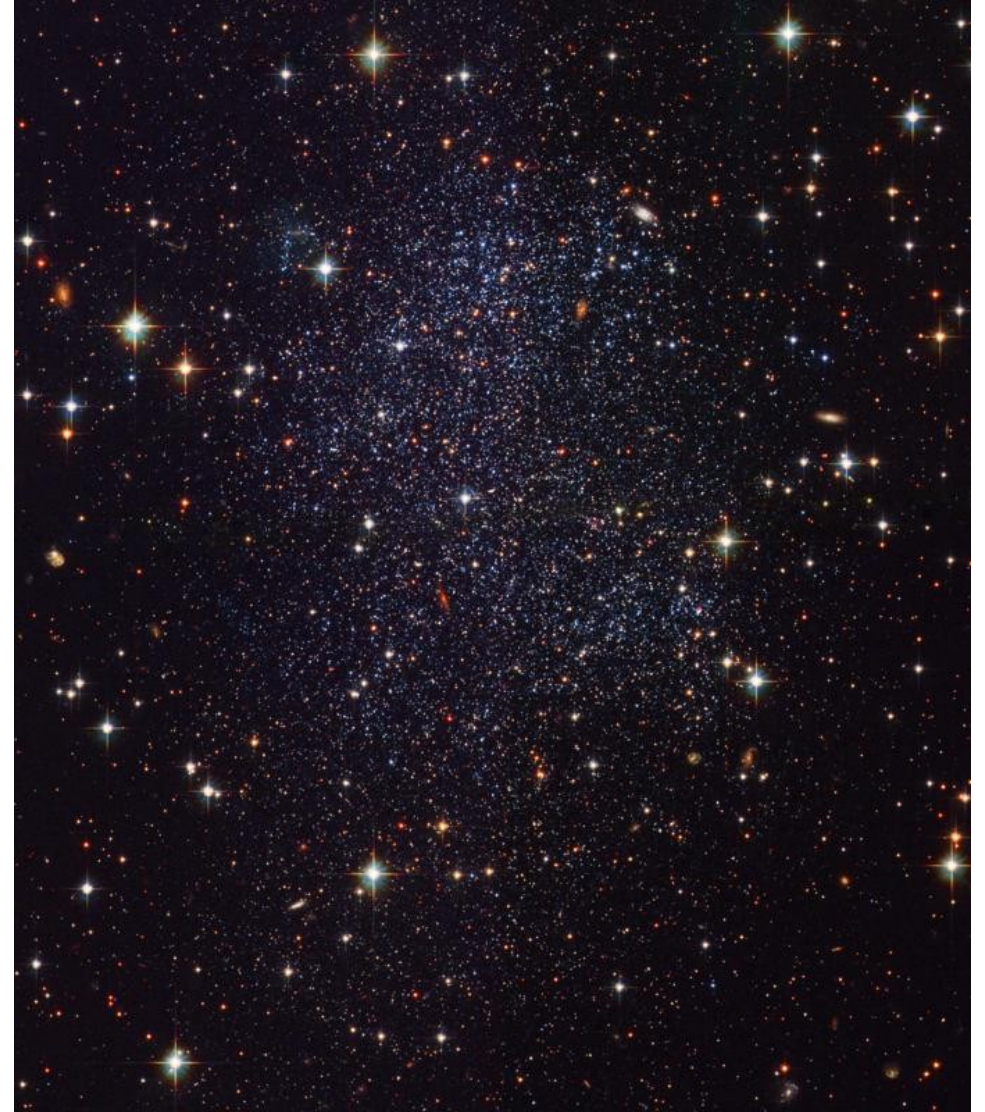
4. Удержание горячего газа эллиптическими галактиками



Эллиптическая галактика ESO 325-G004
Гравитационного поля одних только звезд и газа недостаточно для удержания горячего газа эллиптической галактики.

5. Карликовые галактики низкой поверхностной яркости

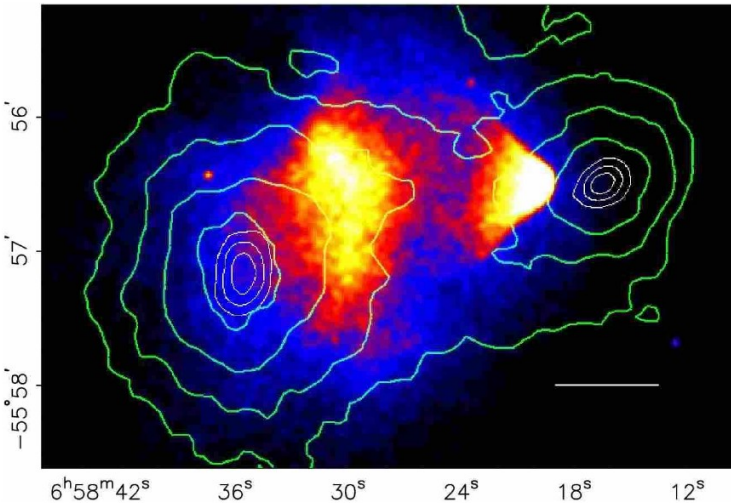
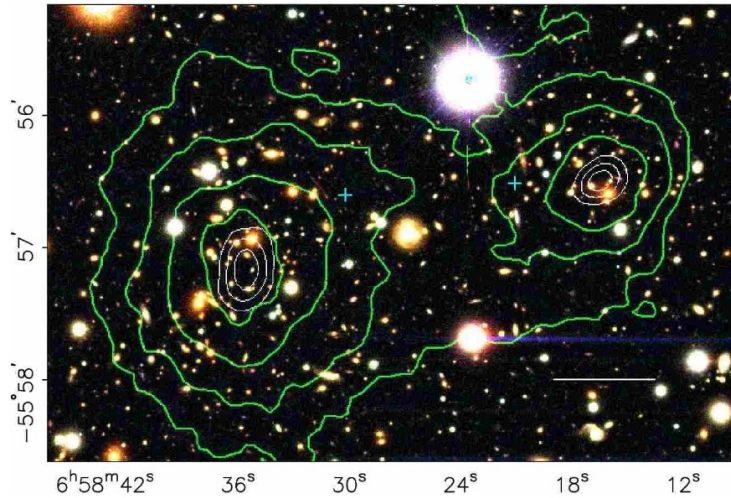
Состоят на $> 95\%$ из невидимого вещества.



Карликовая неправильная галактика в Стрельце.

Млечный путь имеет не менее 6 ultra-faint спутников с отношением долей массы темного вещества 99.9% (arXiv:0706.0516).

6. Сталкивающиеся кластеры галактик: распределение масс видимого вещества отличается от распределения масс, определенного по гравитационному линзированию: модельно-независимое доказательство существования темной материи.



1E0657-558 ($z=0.296$),
распределение горячего газа
(масс-доминирующая компонента), X-ray

Astrophys.J.648:L109-L113,2006 (astro-ph/0608407)

Что такое темная материя?

MOND (MOdified Newtonian Dynamics) и другие модифицированные теории гравитации.

Темная материя – не материя, а модификация закона тяготения при малых ускорениях/больших расстояниях.

Проблема: недостаточная универсальность.

- Центр тяготения всегда должен быть совмещен с центром масс барионной материи, что иногда не так (например, в парах взаимодействующих галактических кластеров).
- Отношение гравитирующей материи к барионной материи должно быть постоянным, что не так.

Темная материя – «материя»

- Небарионная. Крупные объекты давали бы интенсивное микролинзирование, мелкие объекты – интенсивное поглощение и рассеяние света.
- Электрически нейтральная. Заряженная темная материя интенсивно излучала бы или поглощала э.м. излучение. Коллапсировала бы в крупные объекты.
- Если это частицы, то взаимодействуют только слабо и гравитационно – WIMPy (Weakly Interacting Massive Particles) в широком смысле. Или даже только гравитационно.

Холодная, теплая и горячая ТМ

- *Холодная темная материя.* Выход из термодинамического равновесия при температуре $T_f < M_X$. Имеет место для $M_X \gtrsim 30 \text{ КэВ}$. WIMPy (Weakly Interacting Massive Particles) в узком смысле.
- *Теплая темная материя.* Массы между $\sim 1 \text{ эВ}$ и 30 КэВ . Частицы не являются релятивистскими на момент перехода от РД к ДМ стадии ($T_{eq} \sim 1 \text{ эВ}$), но являются релятивистскими на момент замораживания.
- *Горячая темная материя.* $M_X < 1 \text{ эВ}$. Частицы УР на момент перехода от РД к ДМ стадии. Исключена, т.к. не допускает образования гравитационно связанных объектов (см. ниже).

Основные кандидаты

- Нейтралино – легчайшая SUSY частица, смесь суперпартнёров Z-бозона, фотона и бозона Хиггса.
 $M_X \sim n \times GeV$
- Снейтрино – легчайший суперпартнер нейтрино.
 $M_X \sim n \times GeV$
- Гравитино – суперпартнер гравитона (\Rightarrow гравитация – калибровочная теория по группе Пуанкаре \Rightarrow теория Эйнштейна-Картана).
 $M_X \sim n \times GeV$
- Аксионоподобные частицы (аксион – решает проблему возможного сильного нарушения CP-инвариантности в хромодинамике).
 $M_X \sim n \times keV$
- Всякая экзотика. Топологические солитоны, зеркальная материя, микро/мини-дыры. . . $M_X = ?$

Ограничение по массе для частиц теплой темной материи

В диапазоне температур $T_f > T > M_X$ частицы уже свободны, но еще релятивистские.

Это приводит к сглаживанию начальных неоднородностей ТМ («перемешивание») \Rightarrow амплитуды возмущений на малых масштабах малы.

Перемешивание прекращается при $T \sim M_X$. Размер горизонта на этот момент определяет размер областей сейчас, где возмущения плотности подавлены.

Т.к. для теплой ТМ перемешивание кончается на РД стадии \Rightarrow

$$l_{Hor} \sim \frac{1}{H} = \frac{M_{Pl}^*}{T^2} \sim \frac{M_{Pl}^*}{M_X^2} \quad (7.59)$$

Этот размер сейчас:

$$l_{Hor,0} = l_{Hor}(1+z) = l_{Hor} \frac{T}{T_0} \sim \frac{M_{Pl}^*}{M_X T_0} \quad (7.60)$$

Электроны уже нерелятивистские ($T \lesssim 30$ кэВ):

$$g_* = 2 + \frac{7}{8} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} = 3.36 \Rightarrow \quad (7.61)$$

$$M_{pl}^* = \frac{M_{Pl}}{1.66\sqrt{g_*}} = 4 \cdot 10^{18} \text{ ГэВ}. \quad (7.62)$$

$$M_X \sim 1 \text{ эВ} \Rightarrow l_{Hor,0} \sim 100 \text{ Мпк} \quad (7.63)$$

– слишком много.

$$M_X \sim 1 \text{ кэВ} \Rightarrow l_{Hor,0} \sim 0.1 \text{ Мпк} \quad (7.64)$$

– разумно, т.к. приводит к структурам типа карликовых галактик \Rightarrow

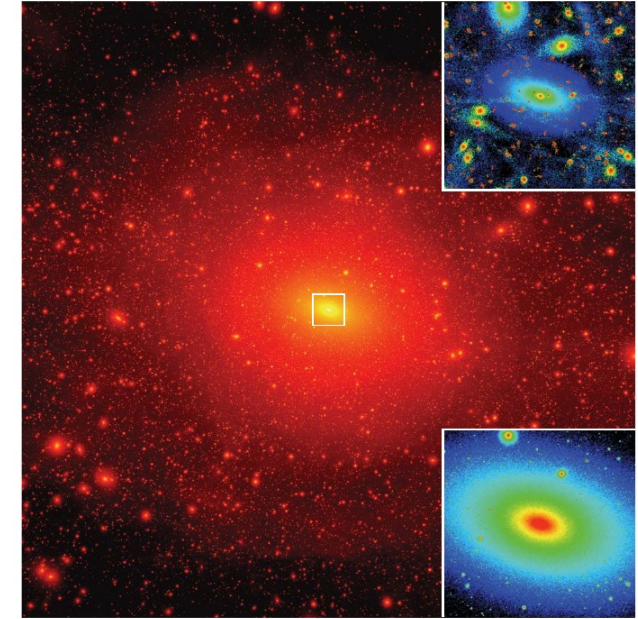
$$M_X \gtrsim 1 \text{ кэВ} \quad (7.65)$$

Теплая темная материя $1 \text{ кэВ} < M_X < 30 \text{ кэВ}$ не исключена!

Но предпочтительной считается холодная темная материя $M_X > 30 \text{ кэВ}$

Ограничение сверху на массу «частиц»:
 $M_X \lesssim 10^3 M_\odot$ – по разрушению звездных скоплений.

Проблема каспов холодной темной материи



Темная материя должна концентрироваться в компактных сгущениях с «сингулярностями» в центре (cusps, каспы), но никаких признаков каспов в Галактике не обнаружено.

Закалка числа частиц холодной темной материи

Предположения:

- X стабильны
- Находятся в равновесии до температур $T < M_X$
- $n_X - n_{\bar{X}} = 0$

При $T < M_X$, в равновесии

$$n_X = n_{\bar{X}} = g_X \left(\frac{M_X T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-M_X/T} \quad (7.66)$$

Уменьшение числа частиц ТМ в сопутствующем объеме возможно только за счет аннигиляции:

$X + \bar{X} \rightarrow$ легкие частицы.

После окончания аннигиляции количество частиц в сопутствующем объеме постоянно (с точностью до возможного распада X). $T_f = ?$

Время пробега до аннигиляции

$$\tau = \frac{1}{n_X} \frac{1}{\langle \sigma_{ann} v \rangle} \quad (7.67)$$

Условие замораживания числа частиц X :

$$\tau(T_f) = \frac{1}{n_X(T_f)} \frac{1}{\langle \sigma_{ann}(T_f) v(T_f) \rangle} = \frac{1}{H(T_f)} \quad (7.68)$$

Аннигиляция в s -волне (закон Бете):

$$\sigma_{ann}(v) = \frac{\sigma_0}{v}; \quad \sigma_0 = \text{const} \Rightarrow \langle \sigma_{ann} v \rangle = \sigma_0 \Rightarrow \quad (7.69)$$

$$\frac{1}{n_X} \frac{1}{\sigma_0} = \frac{1}{H(T_f)} = \left(\frac{T_f^2}{M_{pl}^*} \right)^{-1} \quad (\text{РД стадия!}) \quad (7.70)$$

Подставляем (7.66) в (7.70):

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{1}{g_X} \left(\frac{2\pi}{M_X T_f} \right)^{3/2} e^{M_X/T_f} = \frac{M_{Pl}^*}{T_f^2} \Rightarrow \quad (7.71)$$

$$\frac{M_X}{T_f} = \ln \left[\frac{g_X}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \cdot \left(\frac{M_X}{T_f} \right)^{1/2} \right] \quad (7.72)$$

Уравнение типа

$$x = \ln(Ax^\alpha) \quad (7.73)$$

$A = ?$

Область взаимодействия $a^2 \sim \sigma_0$

$$a \sim \lambda_C(M_X) = \frac{1}{M_X} \Rightarrow \Rightarrow \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \sim \frac{M_{Pl}^*}{M_X} \gtrsim 10^{13}; \quad \ln(A) \gtrsim 30 \quad (7.74)$$

Решаем (7.73) методом итераций, $\alpha = 1/2$:

$$x_0 = 1 \quad (7.75)$$

$$x_1 = \ln(A) \quad (7.76)$$

$$x_2 = \ln(A) + 0.5 \ln(\ln(A)) \quad (7.77)$$

$0.5 \ln(\ln(A)) \sim 1.5 \Rightarrow$ можно ограничиться приближением x_1 («решение в логарифмическом порядке») \Rightarrow

$$\frac{M_X}{T_f} \approx \ln \left[\frac{g_X}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \right] \Rightarrow \quad (7.78)$$

$$T_f = \frac{M_X}{\ln \left[\frac{g_X}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \right]} \quad (7.79)$$

$$T_f = \frac{M_X}{\ln \left[\frac{g_X}{(2\pi)^{3/2} \sigma_0 M_X M_{Pl}^*} \right]} \quad (7.80)$$

Знаменатель $\gtrsim 30 \Rightarrow T_f \ll M_X \Rightarrow$ ТМ действительно холодная.

По формуле (7.80), подбирая подходящий вес g_* :

M_X	T_f	t_f
1 ГэВ	0.048 ГэВ	$1 \cdot 10^{-4}$ сек
100 ГэВ	3.9 ГэВ	$1.6 \cdot 10^{-8}$ сек
10 ТэВ	330 ГэВ	$2.2 \cdot 10^{-12}$ сек

Лекция 8

Сечение аннигиляции частиц темной материи. Рекомбинация электронов и последнее рассеяние фотонов. Эпоха реионизации. Температурная история Вселенной. Фоновая метрика в конформном времени.

Сечение аннигиляции частиц темной материи

Сначала найдем $n_X(t_0)$ и Ω_X , потом выразим из них $\sigma v = \sigma_0 = \text{const}$.

Условие замораживания ТМ против аннигиляции (7.68):

$$\tau(T_f) = \frac{1}{n_X(T_f)} \frac{1}{\langle \sigma_{ann}(T_f) v(T_f) \rangle} = \frac{1}{H(T_f)} \Rightarrow \quad (8.1)$$

$$n_X(T_f) = \frac{H(T_f)}{\langle \sigma_{ann} v \rangle} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{T_f^2}{M_{Pl}^*} \quad (8.2)$$

Настоящее время:

$$n_X(t_0) = \left(\frac{a(t_f)}{a(t_0)} \right)^3 n_X(T_f) \quad (8.3)$$

$$s a^3 = \text{const} \Rightarrow s \sim \frac{1}{a^3} \Rightarrow \quad (8.4)$$

$$n_X(t_0) = \frac{s_0}{s(t_f)} n_X(T_f) \quad (8.5)$$

$$s_0 = \frac{4\pi}{90} (2T_\gamma^3 + \frac{7}{8} 2 \cdot 3 \cdot T_\nu^3) \approx 2.8 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3} \quad (8.6)$$

$$s(t_f) = g_*(t_f) \frac{4\pi^2}{90} T_f^3 \Rightarrow \quad (8.7)$$

$$\begin{aligned} n_X(t_0) &= \frac{s_0}{s(t_f)} \frac{1}{\sigma_0} \frac{T_f^2}{M_{Pl}^*} = \frac{M_{Pl}}{1.66 \sqrt{g_*(t_f)}} = \\ &= \frac{1}{\sigma_0} \frac{s_0}{\sqrt{g_*(t_f)} T_f M_{Pl} \left(\frac{4\pi^2}{1.66 \cdot 90} \right)} = 3.8 \frac{s_0}{T_f \sigma_0 M_{Pl} \sqrt{g_*(t_f)}} \end{aligned} \quad \star (8.8)$$

$$n_X(t_0) = 3.8 \frac{s_0}{T_f \sigma_0 M_{Pl} \sqrt{g_*(t_f)}} \quad (8.9)$$

Найдем Ω_X . Подставляя в (8.9) T_f из (7.80):

$$T_f = \frac{M_X}{\ln \left[\frac{g_X}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \right]} \Rightarrow \quad (8.10)$$

$$\begin{aligned} \Omega_X &= 2 \cdot \frac{M_X n_X(t_0)}{\rho_c} = \sqrt{2 - \text{из } X + \bar{X}} = \\ &= \sqrt{s_0 = 2.8 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}; M_{Pl} = 1.2 \cdot 10^{19} \text{ ГэВ};} \\ &\quad \rho_c = 1.88 \cdot 10^{-29} h^2 \frac{\Gamma}{\text{см}^2} \sqrt{\quad} = \\ &= \frac{3 \cdot 10^{-10}}{(\sigma_0 / \Gamma \text{эВ}^{-2}) \sqrt{g_*(t_f)}} \ln \left[\frac{g_X}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \right] \frac{1}{2h^2} \star \end{aligned} \quad (8.11)$$

Уравнение (8.11) перепишем как уравнение для σ_0 :

$$\sigma_0 = \frac{1}{\Omega_X} \times \frac{3 \cdot 10^{-10}}{\sqrt{g_*(t_f)}} \ln \left[\frac{g_X}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \right] \frac{1}{2h^2} \quad (8.12)$$

$\Omega_X = 0.26$ – известно.

$g_* = 10 \div 100$ – в зависимости от T_f

Как же найти численную величину σ_0 , если ни M_X , ни g_* точно не известны?

(8.12) решается методом итераций (4 итерации дают 6 значащих цифр):

$$\begin{aligned} M_X = 1 \text{ ГэВ} &\Rightarrow \sigma_0 = (0.76 \div 2.5) \cdot 10^{-8} \text{ ГэВ}^{-2} \\ M_X = 100 \text{ ГэВ} &\Rightarrow \sigma_0 = (0.82 \div 2.7) \cdot 10^{-8} \text{ ГэВ}^{-2} \\ M_X = 10 \text{ ТэВ} &\Rightarrow \sigma_0 = (0.88 \div 2.9) \cdot 10^{-8} \text{ ГэВ}^{-2} \end{aligned} \quad (8.13)$$

$$\sigma_0 \sim a^2 \sim \frac{1}{M_X^2} \Rightarrow M_X \sim \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}} \sim 10 \text{ ТэВ} \quad (8.14)$$

⇒ Тяжелая частица. Тяжелая частица со слабым взаимодействием – WIMP.

В современную эпоху, для астрофизических n_X :

$$\tau_{ann} = \frac{1}{n_X} \frac{1}{\langle \sigma_{ann} v \rangle} \quad (8.15)$$

$$r_{ann} = \frac{1}{\tau_{ann}} \times n_X = n_X^2 \langle \sigma_{ann} v \rangle \quad (8.16)$$

$$\langle \sigma_{ann} v \rangle = \sigma_0 \sim 10^{-8} \text{ ГэВ}^{-2} \quad (8.17)$$

Это значение используется для вычисления сигнала аннигиляции темной материи в современных условиях.

n_X зависит от того, куда смотрим: внутренние области Галактики, внешние области, каспы и т.д.

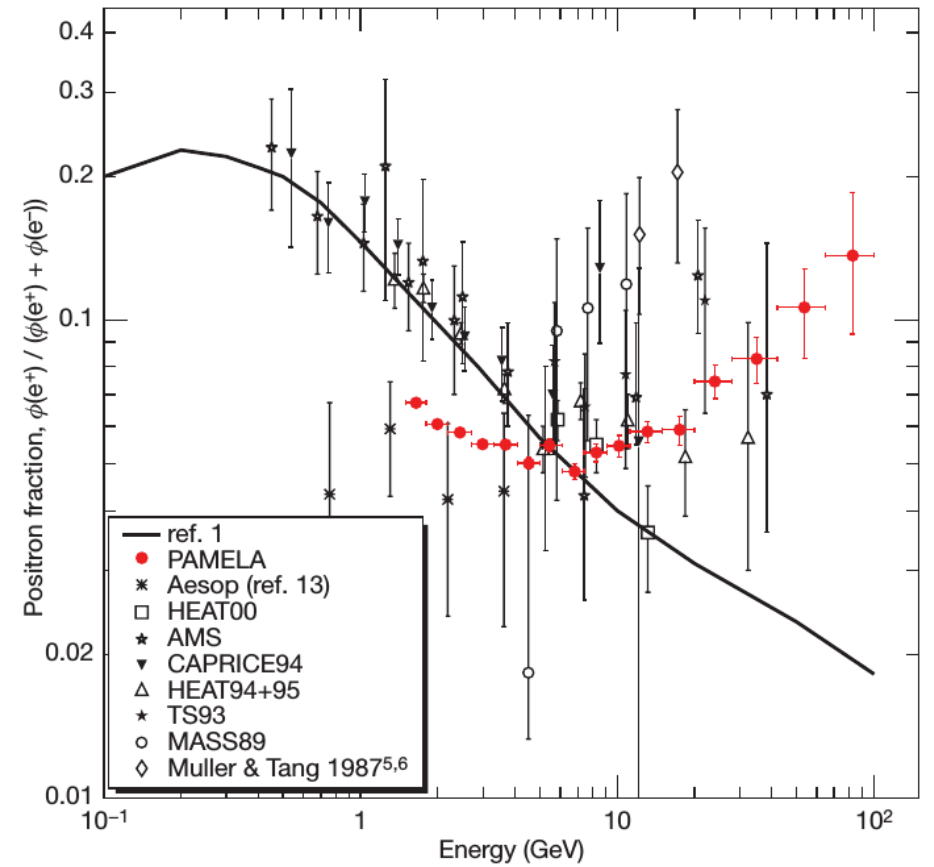


Figure 2 | PAMELA positron fraction with other experimental data and with secondary production model. The positron fraction measured by the PAMELA experiment compared with other recent experimental data (see refs 5–7, 11–13, 30, and references within). The solid line shows a calculation¹ for pure secondary production of positrons during the propagation of cosmic rays in the Galaxy without reacceleration processes. Error bars show 1 s.d.; if not visible, they lie inside the data points.

Nature, V. 458 (2009), P.607-609

Сечения (8.17) на 2-3 порядка не хватает, чтобы объяснить наблюдаемый поток позитронов в космических лучах ⇒ нужен «буст-фактор» $100 \div 1000$.

Рекомбинация электронов и последнее рассеяние фотонов

Температура рекомбинации

Энергия связи электрона в водороде 13.6 эВ.
Температура рекомбинации масштаба 13 эВ?

- Предполагаем, что все ядра – протоны.
- Предполагаем, что рекомбинация идет равновесно.
- $T \sim 10$ эВ $\Rightarrow p^+$ и e^- – нерелятивистские

$$n_e = g_e \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_e - m_e)/T}; \quad g_e = 2 \quad (8.18)$$

$$n_p = g_p \left(\frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_p - m_p)/T}; \quad g_p = 2 \quad (8.19)$$

$$n_H = g_H \left(\frac{m_H T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_H - m_H)/T}; \quad g_H = 4 \quad (8.20)$$

1. Температура рекомбинации определяется условием:

$$\boxed{n_p(T) = n_H(T)} \quad (8.21)$$

Это одно уравнение, но неизвестных 4:

T, μ_e, μ_p, μ_H

Нужно еще 3 уравнения.

2. Сохранение n_B :

$$n_p + n_H = n_B = \eta_B n_\gamma(T) \quad (8.22)$$

$$\eta_B \approx 6.1 \cdot 10^{-10} \quad (8.23)$$

$$n_\gamma(T) = 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \Rightarrow \quad (8.24)$$

$$n_p + n_H = 6.1 \cdot 10^{-10} \cdot 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \quad (8.25)$$

3. Химическое равновесие:

$$\mu_p + \mu_e = \mu_H \quad [p + e \leftrightarrow H + \gamma] \quad (8.26)$$

4. Электронейтральность (сохранение заряда)

$$n_p = n_e \quad (8.27)$$

Решение

$$n_p n_e = g_p g_e \left(\frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_p + \mu_e - m_p - m_e)/T} \quad (8.28)$$

$$m_p + m_e = m_H + \Delta_H, \quad \Delta_H = 13.6 \text{ эВ} \quad (8.29)$$

(8.27), (8.26) \Rightarrow

$$n_p^2 = g_p g_e \left(\frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_H - m_H)/T} e^{-\Delta_H/T} \quad (8.30)$$

Из (8.20):

$$e^{(\mu_H - m_H)/T} = \frac{n_H}{g_H \left(\frac{m_H T}{2\pi} \right)^{3/2}} \Rightarrow \quad (8.31)$$

$$n_p^2 = \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} n_H e^{-\Delta_H/T} \quad (8.32)$$

К форме Саха:

$$X_p = \frac{n_p}{n_B}, \quad X_H = \frac{n_H}{n_B}, \quad X_p + X_H = 1 \quad (8.33)$$

Из (8.32)

$$X_p^2 \left(\frac{2\pi}{m_e T} \right)^{3/2} e^{\Delta_H/T} = X_H \frac{1}{n_B} = (1 - X_p) \frac{1}{n_B} \Rightarrow \quad (8.34)$$

$$X_p + n_B X_p^2 \left(\frac{2\pi}{m_e T} \right)^{3/2} e^{\Delta_H/T} = 1 \quad (8.35)$$

$$n_B = \eta_B \cdot 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \quad (8.36)$$

$$X_p + \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} X_p^2 \eta_B \left(\frac{2\pi T}{m_e} \right)^{3/2} e^{\Delta_H/T} = 1 \quad (8.37)$$

$X_p = 0.5 \Rightarrow$

$$\frac{\zeta(3)}{\pi^2} \eta_B \left(\frac{2\pi T}{m_e} \right)^{3/2} e^{\Delta_H/T} = 1 \quad (8.38)$$

Малый множитель:

$$\eta_B \left(\frac{2\pi T}{m_e} \right)^{3/2} \sim 10^{-17} \Rightarrow \quad (8.39)$$

сразу видно, что $T_r \ll \Delta_H$.

Уравнение приводится к виду $x = \ln(Ax^\alpha)$:

$$\frac{\Delta_H}{T} = \ln \left[\frac{\sqrt{\pi}}{\zeta(3)\eta_B 2\sqrt{2}} \left(\frac{m_e}{\Delta_H} \right)^{3/2} \left(\frac{\Delta_H}{T} \right)^{3/2} \right] \quad (8.40)$$

Учитываем электроны и барионы, уже связанные в гелии:

$$\eta_B = 0.75 \times 6.1 \cdot 10^{-10} \quad (8.41)$$

В логарифмическом порядке (первая итерация):

$$T_{rec}^{(1)} = 0.37 \text{ эВ} \quad (8.42)$$

Точное решение (метод итераций)

$$T_{rec} = 0.321 \text{ эВ} \quad (8.43)$$

Когда?

Красное смещение:

$$T(t) = T_0 \frac{a_0}{a(t)} = T_0(z+1) \Rightarrow \quad (8.44)$$

$$z_{rec} = \frac{T}{T_0} - 1 \approx 1370 \quad (8.45)$$

Красное смещение РД-ДМ перехода

$$z \approx 3 \cdot 10^3 \Rightarrow \quad (8.46)$$

Рекомбинация происходит на ДМ- (пылевидной) стадии.

$$t = \frac{2}{3H} \quad (8.47)$$

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho \quad (\text{общее уравнение Фридмана}) \quad (8.48)$$

$$t_{rec} = \sqrt{\frac{1}{6\pi G \rho_M(t_{rec})}} = \sqrt{\frac{M_{Pl}^2}{6\pi \rho_M(T_{rec})}} \quad (8.49)$$

$$\begin{aligned}\rho_M(T_{rec}) &= \rho_B + \rho_{CDM} = \frac{\rho_B + \rho_{CDM}}{\rho_c} \frac{\rho_c}{\rho_B} \cdot \rho_B = \\ &= \frac{\Omega_M}{\Omega_B} \rho_B = \frac{\Omega_M}{\Omega_B} m_p n_B(T_{rec}) = \frac{\Omega_M}{\Omega_B} m_p \eta_B n_\gamma(T_{rec}) = \\ &= \frac{\Omega_M}{\Omega_B} m_p \eta_B \cdot 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T_{rec}^3 \Rightarrow\end{aligned}\quad (8.50)$$

$$t_{rec} = \sqrt{\frac{\pi}{12\zeta(3)} \frac{\Omega_B}{\Omega_M} \frac{M_{Pl}^2}{\eta_B m_p T_{rec}^3}} \approx 350 \text{ тыс. лет} \quad (8.51)$$

Каковы были химические потенциалы μ_p, μ_H, μ_e на момент рекомбинации?

$$\begin{cases} g_p \left(\frac{m_p T_{rec}}{2\pi}\right)^{3/2} e^{(\mu_p - m_p)/T_{rec}} = g_H \left(\frac{m_H T_{rec}}{2\pi}\right)^{3/2} e^{(\mu_H - m_H)/T_{rec}} \\ g_p \left(\frac{m_p T_{rec}}{2\pi}\right)^{3/2} e^{(\mu_p - m_p)/T_{rec}} = g_e \left(\frac{m_e T_{rec}}{2\pi}\right)^{3/2} e^{(\mu_e - m_e)/T_{rec}} \\ \mu_p + \mu_e = \mu_H \end{cases} \quad (8.52)$$

Решение ★:

$$\mu_p = m_p - \Delta_H + T_{rec} \ln \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m_e}{m_H}\right)^{3/2} \right] \quad (8.53)$$

$$\mu_e = m_e - \Delta_H + T_{rec} \ln \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m_p}{m_H}\right)^{3/2} \right] \quad (8.54)$$

$$\mu_H = m_H - \Delta_H + T_{rec} \ln \left[\frac{1}{4} \left(\frac{m_e}{m_p}\right)^{3/2} \right] \quad (8.55)$$

Во всех случаях

$$\mu_i = m_i - \delta\mu_i; \quad \delta\mu_i \ll m_i \quad (8.56)$$

Каков хим. потенциал атомов водорода сейчас?

$$\begin{aligned}n_H &\approx \eta_B n_\gamma = \eta_B \cdot 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T_0^3 = \\ &= g_H \left(\frac{m_H T_0}{2\pi}\right)^{3/2} e^{(\mu_H - m_H)/T_0}\end{aligned}\quad (8.57)$$

$$e^{(\mu_H - m_H)/T_0} = \sqrt{g_H = 4} = \frac{1}{2} \eta_B \frac{\zeta(3)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2T_0}{m_H}\right)^{3/2} \Rightarrow \quad (8.58)$$

$$\begin{aligned}\mu_H &= m_H + T_0 \ln \left[\frac{1}{2} \eta_B \frac{\zeta(3)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2T_0}{m_H}\right)^{3/2} \right] = \\ &= m_H - \delta\mu_H^0; \quad \delta\mu_H^0 = 1.5 \cdot 10^{-11} \text{ ГэВ}\end{aligned}\quad (8.59)$$

Длительность рекомбинации

Диапазон температур, когда $\exp(\Delta_H/T)$ отличается от $\exp(\Delta_H/T_{rec})$ в e раз:

$$\left| \frac{\Delta_H}{T \pm \Delta T} - \frac{\Delta_H}{T_{rec}} \right| = 1 \Rightarrow \frac{\Delta T}{T_{rec}} \approx \frac{T_{rec}}{\Delta_H} = \frac{0.32}{13.6} \approx 0.02 \quad (8.60)$$

$$T = \frac{\text{const}}{a} \Rightarrow \frac{\Delta a}{a_{rec}} = \frac{\Delta T}{T_{rec}} = 0.02 \ll 1 \quad (8.61)$$

Время рекомбинации много меньше хаббловского времени.

Последнее рассеяние фотонов (закалка фотонов)

Не то же самое, что рекомбинация – позже!

Томсоновское сечение рассеяния фотонов:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha^2}{m_e^2} \approx 0.67 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2 \quad (8.62)$$

Время свободного пробега фотона по отношению к томсоновскому рассеянию:

$$\tau_\gamma = \frac{1}{\sigma_T n_e(T)} \quad (8.63)$$

Из (8.32):

$$\begin{aligned} n_e^2(T) &= n_p^2(T) = \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/2} n_H e^{-\Delta_H/T} = \\ &= \setminus n_H \cong \eta_B \cdot n_\gamma \text{ т.к. рекомбинация} \\ &\quad \text{практически завершена} \setminus = \\ &= \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/2} \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3 e^{-\Delta_H/T} \quad (8.64) \end{aligned}$$

Время последнего рассеяния определяется

$$\tau_\gamma(T_f) \simeq H^{-1}(T_f) \simeq t_f \quad (8.65)$$

t_f мало отличается от $t_{rec} = 350$ тыс. лет, поэтому для оценки T_f можно в правой части уравнения использовать t_{rec} вместо t_f :

$$\frac{1}{\sigma_T} \frac{1}{\left[\left(\frac{m_e T_f}{2\pi}\right)^{3/2} \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T_f^3 e^{-\Delta_H/T_f}\right]^{1/2}} = t_{rec} \quad (8.66)$$

$$e^{\Delta_H/T_f} = \sigma_T^2 t_{rec}^2 \left(\frac{m_e T_f}{2\pi}\right)^{3/2} \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T_f^3 \quad (8.67)$$

$$\frac{\Delta_H}{T_f} = \ln \left[\sigma_T^2 t_{rec}^2 \left(\frac{m_e T_f}{2\pi}\right)^{3/2} \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T_f^3 \right] \quad (8.68)$$

В п.ч. $T_f \rightarrow T_{rec} \Rightarrow$

$$\frac{\Delta_H}{T_f} \cong \ln \left[\sigma_T^2 t_{rec}^2 \left(\frac{m_e T_{rec}}{2\pi}\right)^{3/2} \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T_{rec}^3 \right] \quad (8.69)$$

$$T_{rec} = 0.32 \text{ эВ} \quad (8.70)$$

$$\eta_B = 0.75 \cdot 6.1 \cdot 10^{-10} \quad (8.71)$$

$$t_{rec} = 3.5 \cdot 10^5 \text{ лет} \Rightarrow \quad (8.72)$$

$$\boxed{T_f = 0.27 \text{ эВ}} \quad (8.73)$$

Аналогично (8.51)

$$t_f = \sqrt{\frac{\pi}{12\zeta(3)} \frac{\Omega_B}{\Omega_M} \frac{M_{Pl}^2}{\eta_B m_p T_f^3}} \approx 460 \text{ тыс. лет} \quad (8.74)$$

$$z_f = \frac{0.27 \text{ эВ}}{2.73 \times 8.6 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}} = 1140 \approx 1100 \quad (8.75)$$

Горизонт на момент последнего рассеяния ($z \approx 1100$)

Момент последнего рассеяния обычно отождествляют с рекомбинацией: $f \rightarrow r$

Можно (довольно грубо) найти, считая, что Вселенная всегда была пылевидной:

$$l_{H,r} = \frac{2}{H_r(t_r)} \quad (8.76)$$

Из уравнения Фридмана:

$$H_r^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho_M(t_r) \quad (8.77)$$

$$\rho_M(t_r) = \rho_{M,0} \left(\frac{a_0}{a_r} \right)^3 = \rho_{M,0} (1 + z_r)^3 \quad (8.78)$$

$$\rho_{M,0} = \rho_c \Omega_M \quad (8.79)$$

$$l_{H,r} = \frac{2}{\sqrt{\frac{8\pi}{3} G \rho_c \Omega_M (1 + z_r)^3}} = \sqrt{\rho_c = \frac{H_0^2}{\frac{8\pi}{3} G}} = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{(1 + z_r)^{3/2}} \quad (8.80)$$

$$l_{H,r} = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{(1 + z_r)^{3/2}} \quad (8.81)$$

Сейчас этот размер растянут в $a_0/a_r = 1 + z_r$ раз:

$$l_{H,r}(t_0) = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{\sqrt{1 + z_r}} \quad (8.82)$$

Современный горизонт:

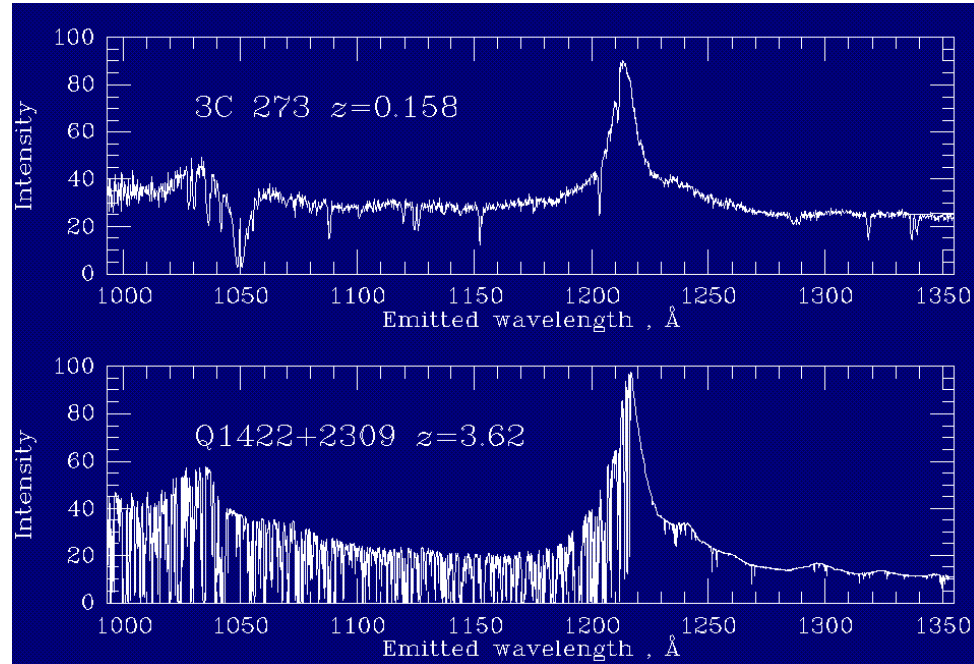
$$l_{H,0} = a_0 \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = a_0 \int_0^{t_0} \frac{dt}{a_0 \left(\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/3} [\text{sh} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda H_0 t} \right)]^{2/3}} = \frac{2}{H_0} \times 1.8 \quad (8.83)$$

Это в ~ 30 раз больше, чем $l_{H,r}(t_0)$ – видимая часть Вселенной содержит $\sim 3 \cdot 10^4$ причинно не связанных областей на момент рекомбинации.

Отчего же микроволновой фон однороден с точностью $\sim 10^{-4}$ везде? – «**проблема горизонта**».

Эпоха реионизации

Лайман-альфа-лес (Lyman-alpha forest) в спектрах квазаров



Основной пик – $\text{Ly}\alpha$
Линии поглощения - тоже $\text{Ly}\alpha$



- $\text{Ly}\alpha$ -линия поглощения сдвинутая разным красным смещением облаков водорода.
- Чем дальше квазар, тем гуще лес.
- При $z > 6$ густота леса перестает расти. Почему?

Реионизация водорода светом первых звезд (звездное население III типа),
 $6 < z < 20$, $150 \cdot 10^6 - 1000 \cdot 10^6$ лет.

Остаточная оптическая толщина $\tau \simeq 0.09 \pm 0.03$

Краткая история Вселенной (13.8 млрд. лет)

Событие	T	z	t
Горячий Большой взрыв	—	—	0
GUT-переход (?)	$\sim 10^{16}$ ГэВ	$\sim 10^{30}$	$\sim 10^{-39}$ сек
Бариогенезис (?)	$\sim 10^{16}$ ГэВ	$\sim 10^{30}$	$\sim 10^{-39}$ сек
Электрослабый переход	100 ГэВ	10^{15}	10^{-11} сек
Закалка темной материи(?)	$0.05 \div 300$ ГэВ	$10^{11} \div 10^{15}$	$2 \cdot 10^{-12} \div 10^{-4}$ сек
Адронизация: конфайнмент кварков	170 МэВ	$7 \cdot 10^{11}$	10^{-5} сек
Закалка нейтрино	1.5 МэВ	$5 \cdot 10^9$	0.3 сек
Закалка нейтронов	0.75 МэВ	$3 \cdot 10^9$	1.2 сек
Нуклеосинтез	65 кэВ	$3 \cdot 10^9$	4.5 мин

Событие	T	z	t
РД \rightarrow МД переход	1 эВ	3000	120 тыс. лет
Рекомбинация электронов	0.32 эВ	1370	350 тыс. лет
Последнее рассеяние фотонов	0.27 эВ	1140	460 тыс. лет
Реоинизация	$50 \div 15$ К°	$20 \div 6$	$150 \div 1000$ млн.лет
Начало эры ДеСиттера	4.5 К°	0.65	7.6 млрд.лет
Сейчас	2.73 К°	0.0	13.8 млрд.лет

Фоновая метрика, конформное время.

$$d\eta = dt/a; \quad dt = ad\eta; \quad dt/d\eta = a \quad (8.84)$$

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - dx^i dx^i] = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (8.85)$$

Перепишем уравнения в производных по конформному времени:

$$\frac{d}{d\eta} = \frac{dt}{d\eta} \frac{d}{dt} = a \frac{d}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{1}{a} \frac{d}{d\eta} \quad (8.86)$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{a'}{a^2} \quad (8.87)$$

Уравнение Фридмана

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \Rightarrow \left(\frac{a'}{a^2}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \quad (8.88)$$

(i, j) -компонента уравнений Эйнштейна ★

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -8\pi Gp \Rightarrow 2\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} = -8\pi Gp \quad (8.89)$$

Ковариантный закон сохранения энергии

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \Rightarrow \rho' + 3\frac{a'}{a}(\rho + p) = 0 \quad (8.90)$$

Космологические решения $a(\eta)$ ★:

$$\text{РД-стадия: } a(\eta) = \text{const} \cdot \eta; \quad \eta = \text{const} \cdot t^{1/2} \quad (8.91)$$

$$\text{ДМ-стадия: } a(\eta) = \text{const} \cdot \eta^2; \quad \eta = \text{const} \cdot t^{1/3} \quad (8.92)$$

$$\Lambda\text{-стадия: } a(\eta) = -\frac{1}{H_{dS}\eta}; \quad \eta = -\text{const} \cdot e^{-H_{dS}t}, \quad \eta < 0 \quad (8.93)$$

$$H_{dS}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_\Lambda \quad (8.94)$$

Коэффициенты в (8.91) и (8.92) – через a_0 и измеримые величины

РД-стадия ($T \lesssim 100 \text{ ГэВ}$)

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho = \frac{8\pi}{3}G\frac{\pi^2}{30}g_*T^4 \quad (8.95)$$

Сохранение энтропии:

$$g_*a^3T^3 = g_*^0a_0^3T_0^3 \quad (8.96)$$

$$T^3 = \frac{g_*^0}{g_*} \frac{a_0^3}{a^3} T_0^3 \Rightarrow T = \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/3} \frac{a_0}{a} T_0 \quad (8.97)$$

$$\rho_c \Omega_{rad} = \frac{\pi^2}{30}g_*^0T_0^4 \Rightarrow T_0^4 = \frac{\Omega_{rad}\rho_c}{\frac{\pi^2}{30}g_*^0} \quad (8.98)$$

Подставляем (8.98) в (8.97), (8.97) в (8.95):

$$\begin{aligned} H^2 &= \left(\frac{8\pi}{3}G\rho_c\right) \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/3} \left(\frac{a_0}{a}\right) \Omega_{rad} = \\ &= H_0^2 \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/3} \left(\frac{a_0}{a}\right) \Omega_{rad} \quad (8.99) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta &= \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_{a_0}^a \frac{da}{a^2 \dot{a}} = \\
&= \int_0^a \frac{1}{a} \frac{da}{\dot{a}} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H(a)} = \text{\ (8.99)\ } = \\
&= \int_0^a \frac{da}{a^2 H_0 \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/6} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \sqrt{\Omega_{rad}}} = \frac{1}{H_0} \left(\frac{g_*}{g_*^0}\right)^{1/6} \frac{1}{a_0^2} \frac{a}{\sqrt{\Omega_{rad}}}
\end{aligned} \tag{8.100}$$

$$\eta = \frac{1}{H_0} \left(\frac{g_*}{g_*^0}\right)^{1/6} \frac{1}{a_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{rad}}} \frac{a}{a_0} \tag{8.101}$$

ДМ-стадия (но не Λ)

$$H_0^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho_c \tag{8.102}$$

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho_M = \frac{8\pi}{3} G \rho_M^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \Rightarrow \tag{8.103}$$

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho_M^0}{\rho_c} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 = \Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \Rightarrow H^2 = H_0^2 \Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \tag{8.104}$$

$$\begin{aligned}
\eta &= \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H(a)} = \\
&= \int_0^a \frac{da}{a^2 H_0 \sqrt{\Omega_M} (a_0/a)^{3/2}} = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \sqrt{\frac{a}{a_0}} \tag{8.105}
\end{aligned}$$

$$\eta^2 = \frac{a}{a_0} \frac{4}{a_0^2 H_0^2 \Omega_M} \tag{8.106}$$

Конформные времена $\eta_0, \eta_r, \eta_{eq}$ – через a_0 и измеримые величины

Уравнение Фридмана:

$$H = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_{rad} (1+z)^4} \tag{8.107}$$

$$\begin{aligned}
\eta &= \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H(a)} = \\
&= \int_{z+1}^{\infty} \frac{da}{a^2 H(a)} = \int_{z+1}^{\infty} \frac{a_0}{(z+1)^2} dz \frac{1}{a_0 H(z)} = \\
&= \int_{z+1}^{\infty} \frac{dz}{a_0 H(z)} = \\
&= \frac{1}{a_0 H_0} \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_{rad} (1+z)^4}} \tag{8.108}
\end{aligned}$$

Конформное время современной эпохи:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \times \\ &\times \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} + (1+z)^3 + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} (1+z)^4}} = \\ &= \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \times I(\Omega_M) \quad (8.109) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_M = 0.31, \quad \Omega_\Lambda = 0.69, \quad \Omega_{rad} = 2 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \\ I(\Omega_M) \approx 0.89 \quad (8.110) \end{aligned}$$

Конформное время последнего рассеяния (рекомбинации):

$$\begin{aligned} \eta_r &= \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{2} \int_{z_r}^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+z)^3 + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} (1+z)^4}} = \\ &= \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \mathcal{F} \left(\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} \right) \quad (8.111) \end{aligned}$$

\mathcal{F} считается:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left(\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} \right) &= \sqrt{\frac{1}{1+z_r} + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}} - \sqrt{\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}} = \\ \left\langle \frac{\Omega_M}{\Omega_{rad}} = 1 + z_{eq} \star \right\rangle &= \sqrt{\frac{1}{1+z_r} + \frac{1}{1+z_{eq}}} - \sqrt{\frac{1}{1+z_{eq}}} \\ \mathcal{F} &= 0.017 \quad (8.112) \end{aligned}$$

Легко считается угол видимости горизонта рекомбинации:

$$\Delta\theta_r = \eta_r / \eta_0 = 0.019; \quad \Delta\theta_r = 1.1^\circ \quad (8.113)$$

$$\eta_{eq} = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{1+z_{eq}}}; \quad \mathcal{F} = 0.0076 \quad (8.114)$$

$$\frac{\eta_r}{\eta_{eq}} = 2.3; \quad \frac{\eta_0}{\eta_{eq}} = 1.2 \cdot 10^2 \quad (8.115)$$

η_r и η_{eq} близки, но не совпадают.

$$a_0 \eta_{eq} = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{\sqrt{1+z_{eq}}} (\sqrt{2}-1) \quad (8.116)$$

$$a_0 \eta_r = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \left(\sqrt{\frac{1}{1+z_r} + \frac{1}{1+z_{eq}}} - \sqrt{\frac{1}{1+z_{eq}}} \right) \quad (8.117)$$

$$a_0 \eta_0 = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} I(\Omega_M); \quad I(\Omega_M) = 0.89 \quad (8.118)$$

$$a_0 \eta_{eq} = \frac{a_0}{a_{eq}} (a_{eq} \eta_{eq}) = \frac{a_0}{a_{eq}} l_H^{eq} \quad (8.119)$$

– до каких размеров сейчас растянулся горизонт на момент перехода РД→ДМ. И т.д.

$$a_0 \eta_{eq} = 120 \text{ Мпк} \quad (8.120)$$

$$a_0 \eta_r = 510 \text{ Мпк} \quad (8.121)$$

$$a_0 \eta_0 = 14.1 \text{ Гпк} = 46.0 \text{ Млрд. св. лет} \quad (8.122)$$

Лекция 9

Джинсовская неустойчивость. Космологические возмущения: скалярные, векторные, тензорные моды. Линеаризованные уравнения.

Космологические возмущения

Джинсовская неустойчивость

Ньютоновская гравитация + классическая гидродинамика нерелятивистской идеальной жидкости.

Гравитационный потенциал:

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho \quad (9.1)$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0 \quad (9.2)$$

Уравнение Эйлера для идеальной жидкости:

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\rho\nabla\varphi - \nabla p \quad \star \quad (9.3)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_i} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \Rightarrow \quad (9.4)$$

$$\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\rho\nabla\varphi - \nabla p \quad (9.5)$$

Начальные условия – бесконечная однородная статическая среда:

$$\rho(\mathbf{x}) = \text{const}, \quad p(\mathbf{x}) = \text{const}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \quad \varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad (9.6)$$

[Заведомо нереалистично, т.к. $\Delta\varphi = 4\pi G\rho \neq 0$]

Изучаем малые возмущения.

Линеаризованные уравнения:

Из (9.1):

$$\Delta(\varphi + \delta\varphi) = 4\pi G(\rho + \delta\rho) \Rightarrow \quad (9.7)$$

$$\Delta\delta\varphi = 4\pi G\delta\rho \quad (9.8)$$

Из (9.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho + \delta\rho) + \nabla[(\rho + \delta\rho)(\mathbf{v} + \delta\mathbf{v})] &= \\ &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v} + \delta\rho\mathbf{v} + \rho\delta\mathbf{v} + \delta\rho\delta\mathbf{v}) = \\ &= \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v}) \right] + \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\delta\mathbf{v}) = \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho\nabla\delta\mathbf{v} \Rightarrow \end{aligned} \quad (9.9)$$

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho\nabla\delta\mathbf{v} = 0 \quad (9.10)$$

Из (9.5):

$$\rho(\delta\mathbf{v}\nabla)\delta\mathbf{v} \simeq 0 - 2\text{-й порядок малости} \quad (9.11)$$

$$\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla\delta p - \nabla\delta\varphi \quad (9.12)$$

Уравнение состояния: $p = p(\rho)$

$$\delta p = \frac{\partial p}{\partial \rho}\delta\rho \equiv u_s^2\delta\rho \quad (9.13)$$

Из (9.10), подставляя $\partial\delta\mathbf{v}/\partial t$ из (9.12)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} + \rho\nabla\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t} &= \\ &= \frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} + \rho\nabla\left(-\frac{1}{\rho}\nabla\delta p - \nabla\delta\varphi\right) = \left\langle \nabla\delta p = \nabla\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\delta\rho\right) \right\rangle = \\ &= \frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} + \rho\nabla\left(-\frac{1}{\rho}u_s^2\nabla\delta\rho\right) - 4\pi G\rho\delta\rho = \\ &= \frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} - u_s^2\Delta\delta\rho - 4\pi G\rho\delta\rho = 0 \quad (9.14) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} - u_s^2\Delta\delta\rho - 4\pi G\rho\delta\rho = 0} \quad (9.15)$$

[Если $G = 0$, то простое волновое уравнение]

Ищем решения в виде малых линейных волн:

$$\delta\rho(\mathbf{x}, t) = \int d^3q e^{i[\mathbf{q}\mathbf{x} - \omega(\mathbf{q})t]} \delta\rho(\mathbf{q}) = \int d^3q e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} \delta\rho(\mathbf{q}, t) \quad (9.16)$$

$$\frac{\partial^2\delta\rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \int [-\omega^2(\mathbf{q})] d^3q e^{i[\mathbf{q}\mathbf{x} - \omega(\mathbf{q})t]} \delta\rho(\mathbf{q}) \quad (9.17)$$

$$\Delta\delta\rho(\mathbf{x}, t) = \int (-q^2) d^3q e^{i[\mathbf{q}\mathbf{x} - \omega(\mathbf{q})t]} \delta\rho(\mathbf{q})$$

Подставляем в (9.15):

$$\int [-\omega^2(\mathbf{q}) + u_s^2q^2 - 4\pi G\rho] e^{i(\mathbf{q}\mathbf{x} - \omega t)} \delta\rho(\mathbf{q}) d^3q = 0 \quad (9.18)$$

\Rightarrow Закон дисперсии

$$\omega^2(\mathbf{q}) = \omega^2(q) = u_s^2q^2 - 4\pi G\rho \quad (9.19)$$

Джинсовский «импульс» (волновое число) и длина волны

$$\omega^2(q) = 0 \Rightarrow q_J = \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{u_s^2}}; \quad \lambda_J = \frac{2\pi}{q_J} \quad (9.20)$$

$$\lambda < \lambda_J \Rightarrow \omega^2(q) > 0, \text{ волна} \quad (9.21)$$

$$\lambda > \lambda_J \Rightarrow \text{волновых решений нет} \quad (9.22)$$

$$\omega(q) = \pm i\sqrt{4\pi G\rho - u_s^2q^2} = \pm\Omega_q, \quad \Omega_q > 0 \quad (9.23)$$

$$\delta\rho(q, t) = \delta\rho(q, 0)e^{\pm\Omega_q t} \quad (9.24)$$

Экспоненциально растущее и экспоненциально падающее решения – гравитационная неустойчивость Джинса.

Если $u_s = 0$ (пыль) то колебательных решений нет совсем.

Линейный и нелинейный режимы:

$$\delta(\mathbf{q}, t) \equiv \frac{\delta\rho(\mathbf{q}, t)}{\rho} \quad (9.25)$$

Если $\delta(\mathbf{q}, t) \ll 1$ работает линейный анализ (представление Фурье).

Время входа в нелинейный режим определяется условием

$$\delta(\mathbf{q}, t_{nl}) \sim 1 \quad (9.26)$$

Теория неустойчивости Джинса – прообраз теории космологических возмущений.

Возмущения метрики и фиксация калибровки $h_{0i} = 0$

Задача: Пусть на какой-то стадии эволюции Вселенной (возможно, весьма ранней) но после горячего Большого взрыва, над фоном Фридмановского пространства имеются малые возмущения вещества (и, следовательно, метрики). Что с ними станет по мере дальнейшей эволюции Вселенной?

$$ds^2 = a^2(\eta)\gamma_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (9.27)$$

$$\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (9.28)$$

$\eta_{\mu\nu}$ – Минковский, $h_{\mu\nu}$ – возмущение.

Соглашение: Индексы *возмущений* будем поднимать/опускать метрикой Минковского:

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda}h_{\rho\lambda} \text{ и т.д.} \quad (9.29)$$

Если $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, то $\gamma^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ (★)

Теория инвариантна относительно калибровочных преобразований – произвольных диффеоморфизмов. Рассматриваем произвольные инфинитезимальные преобразования

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x), \quad \xi^\mu \sim h^{\alpha\beta} \quad (9.30)$$

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \nabla^\mu \xi^\nu + \nabla^\nu \xi^\mu \quad \star \quad (9.31)$$

Как преобразуются $h^{\mu\nu}$? Используем (9.31):

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{\mu\nu} &= \frac{1}{a^2}(\eta^{\mu\nu} - \tilde{h}^{\mu\nu}) = \\ &= \frac{1}{a^2}(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) + g^{\mu\lambda}\nabla_\lambda \xi^\nu + g^{\nu\lambda}\nabla_\lambda \xi^\mu \quad (9.32) \end{aligned}$$

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - (\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda})\nabla_\lambda \xi^\nu - (\eta^{\nu\lambda} - h^{\nu\lambda})\nabla_\lambda \xi^\mu \quad (9.33)$$

$$\begin{aligned} (\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda})\nabla_\lambda \xi^\nu &\simeq \eta^{\mu\lambda}\nabla_\lambda \xi^\nu = \eta^{\mu\lambda}(\partial_\lambda \xi^\nu + \Gamma_{\sigma\lambda}^\nu \xi^\sigma) = \\ &= \partial^\mu \xi^\nu + \eta^{\mu\lambda}\Gamma_{\sigma\lambda}^\nu \xi^\sigma \quad (9.34) \end{aligned}$$

$\Gamma_{\sigma\lambda}^\nu$ достаточно считать в 0-порядке:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\sigma\lambda}^\nu &= \frac{1}{2}g^{\nu\rho}(\partial_\sigma g_{\lambda\rho} + \partial_\lambda g_{\rho\sigma} - \partial_\rho g_{\sigma\lambda}) = \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{a^2}\eta^{\nu\rho}[\partial_\sigma(a^2\eta_{\lambda\rho}) + \partial_\lambda(a^2\eta_{\rho\sigma}) - \partial_\rho(a^2\eta_{\sigma\lambda})] = \\ &= \frac{1}{a}(\partial_\sigma a \delta_\lambda^\nu + \partial_\lambda a \delta_\sigma^\nu - \partial_\rho a \eta^{\nu\rho}\eta_{\sigma\lambda}) \quad (9.35) \end{aligned}$$

$$\eta^{\mu\lambda}\Gamma_{\sigma\lambda}^\nu \xi^\sigma = \frac{1}{a}(\partial_\sigma a \xi^\sigma \eta^{\mu\nu} + \partial_\lambda a \eta^{\mu\lambda}\xi^\nu - \partial_\rho a \eta^{\nu\rho}\xi^\mu) \quad (9.36)$$

$$\begin{aligned} (\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda})\nabla_\lambda \xi^\nu &= \\ &= \partial^\mu \xi^\nu + \frac{1}{a}(\partial_\sigma a \xi^\sigma \eta^{\mu\nu} + \partial_\lambda a \eta^{\mu\lambda}\xi^\nu - \partial_\rho a \eta^{\nu\rho}\xi^\mu) \quad (9.37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\eta^{\nu\lambda} - h^{\nu\lambda})\nabla_\lambda \xi^\mu &= \\ &= \partial^\nu \xi^\mu + \frac{1}{a}(\partial_\sigma a \xi^\sigma \eta^{\nu\mu} + \partial_\lambda a \eta^{\nu\lambda}\xi^\mu - \partial_\rho a \eta^{\mu\rho}\xi^\nu) \quad (9.38) \end{aligned}$$

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu - 2\eta^{\mu\nu}\xi^\sigma \frac{\partial_\sigma a}{a} \quad (9.39)$$

Так как ξ^μ есть 4 произвольные функции, то их выбираем так, чтобы занулить 3 величины $h_{i0} = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Остается еще остаточная инвариантность для преобразований (так как они не меняют $0i$ -компоненты)

$$\partial_0 \xi_i + \partial_i \xi_0 = 0 \quad (9.40)$$

Годится, в частности

$$\xi_i = \xi_i(\mathbf{x}), \quad \xi_0 = 0 \quad (9.41)$$

В калибровке $h_{i0} = 0$:

$$ds^2 = a^2(\eta)[(1 + h_{00})d\eta^2 - (\delta_{ik} + h_{ik})dx_i dx_k]. \quad (9.42)$$

Соглашение: для трехмерных индексов возмущений, они опускаются трехмерной метрикой δ_{ij}

$$v_i = \delta_{ij}v^j = v^i \quad (9.43)$$

Для наблюдателя, покоящегося в сопутствующей системе, $dx_i = 0 \Rightarrow$

$$ds^2 = d\tau^2 = a^2(\eta)(1 + h_{00})d\eta^2 \Rightarrow \quad (9.44)$$

$$d\tau = a(\eta)\left(1 + \frac{1}{2}h_{00}\right)d\eta \quad (9.45)$$

Возмущения тензора энергии-импульса

ТЭИ идеальной жидкости:

$$T_\nu^\mu = (\rho + p)u^\mu u_\nu - \delta_\nu^\mu p \quad (9.46)$$

С возмущениями:

$$T_\nu^\mu = (\rho + \delta\rho + p + \delta p)(u^\mu + \delta u^\mu)(u_\nu + \delta u_\nu) - \delta_\nu^\mu(p + \delta p) \quad (9.47)$$

Скорость в контексте космологических возмущений

Невозмущенная (координатная: η, x^i) скорость имеет только 0-компоненту: $u^\mu = (u^0, 0, 0, 0)$

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1 \Rightarrow a^2 \eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = a^2 u^0 u^0 = 1 \Rightarrow u^0 = \frac{1}{a}; \quad u_0 u^0 = 1 \Rightarrow u_0 = a \quad (9.48)$$

Физические скорости:

$$dX^\mu = a dx^\mu \Rightarrow V^\mu = \frac{dX^\mu}{ds} = a \frac{dx^\mu}{ds} = a u^\mu \quad (9.49)$$

$$V^0 = a u^0 = 1; \quad V^i = a u^i = 0; \quad (9.50)$$

Возмущенная скорость:

$$\hat{V}^0 = V^0 + v^0 = 1 + v^0 \quad (9.51)$$

$$\hat{V}^i = V^i + v^i = v^i - \text{физическая скорость} \quad (9.52)$$

v^0 и v^i – величины первого порядка малости.

$$\hat{V}^\mu = a \hat{u}^\mu \Rightarrow \hat{u}^\mu = \frac{1}{a} \hat{V}^\mu \quad (9.53)$$

$$\hat{u}^0 \equiv u^0 + \delta u^0 = \frac{1}{a}(1 + v^0) \quad (9.54)$$

$$\hat{u}^i \equiv u^i + \delta u^i \equiv \delta u^i = \frac{1}{a} v^i \quad (9.55)$$

Тогда

$$\begin{aligned} 1 &= g_{\mu\nu} \hat{u}^\mu \hat{u}^\nu = a^2 [(\eta_{00} + h_{00}) \hat{u}^0 \hat{u}^0 - (\delta_{ij} + h_{ij}) \hat{u}^i \hat{u}^j] = \\ &= a^2 (1 + h_{00}) \frac{1}{a^2} (1 + v^0)^2 - (\delta_{ij} + h_{ij}) \delta u^i \delta u^j \cong \\ &\cong (1 + h_{00})(1 + v^0)^2 \cong 1 + h_{00} + 2v^0 \Rightarrow \quad (9.56) \end{aligned}$$

$$v^0 = -\frac{1}{2}h_{00} \quad (9.57)$$

В линейном порядке это есть гравитационное замедление времени. Даже если $v^i = 0$ время замедляется.

$$v^i \text{ могут быть любыми (малыми)} \quad (9.58)$$

Найдем u_μ и δu_μ (с нижними индексами):

$$\begin{aligned} \hat{u}_\mu \hat{u}^\mu &= (u_0 + \delta u_0)(u^0 + \delta u^0) + \delta u_i \delta u^i \cong \\ &\cong (u_0 + \delta u_0)(u^0 + \delta u^0) = 1 \Rightarrow \end{aligned} \quad (9.59)$$

$$u_0 + \delta u_0 = \frac{1}{u^0 + \delta u^0} = a(1 - v^0) \quad (9.60)$$

$$\delta u_i = g_{i\mu} \delta u^\mu \cong a^2 \eta_{i\mu} \delta u^\mu = -a^2 \delta u^i = -a^2 \frac{1}{a} v^i = -a v^i \quad (9.61)$$

$$u_0 + \delta u_0 = a(1 - v^0) \quad (9.62)$$

$$\delta u_i = -a v_i \quad (9.63)$$

Компоненты TЭИ

Из (9.47)

$$T_\nu^\mu = (\rho + \delta\rho + p + \delta p)(u^\mu + \delta u^\mu)(u_\nu + \delta u_\nu) - \delta_\nu^\mu (p + \delta p) \Rightarrow \quad (9.64)$$

$$\begin{aligned} T_0^0 &= (\rho + \delta\rho + p + \delta p) \frac{1}{a} (1 + v_0) a (1 - v_0) - \delta_0^0 (p + \delta p) \cong \\ &\cong \rho + \delta\rho \Rightarrow \end{aligned} \quad (9.65)$$

$$\delta T_0^0 = \delta\rho \quad (9.66)$$

$$\begin{aligned} T_i^0 &= (\rho + \delta\rho + p + \delta p) \frac{1}{a} (1 + v_0) (-a v_i) - \delta_i^0 (p + \delta p) \cong \\ &\cong (\rho + p + \delta\rho + \delta p) (-v_i) \cong -(\rho + p) v_i \Rightarrow \end{aligned} \quad (9.67)$$

$$\delta T_i^0 = -(\rho + p) v_i \quad (9.68)$$

$$\begin{aligned} T_j^i &= (\rho + \delta\rho + p + \delta p) \frac{1}{a} v^i (-a v_j) - \delta_j^i (p + \delta p) \cong \\ &\cong -\delta_j^i p - \delta_j^i \delta p \Rightarrow \end{aligned} \quad (9.69)$$

$$\delta T_j^i = -\delta_j^i \delta p \quad (9.70)$$

Потребуется, когда будем выписывать линеаризованные уравнения для возмущений.

Разложение возмущений по спиральностям: скалярные, векторные, тензорные моды

Так как все уравнения пишутся в линейном порядке по возмущениям, то разные компоненты Фурье можно изучать отдельно:

$$h_{\mu\nu}(\eta, \mathbf{x}) = \int d^3k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mu\nu}(\eta, \mathbf{k}) \quad (9.71)$$

и т.д. для $\delta\rho, \delta p, v_i$. Дифференцирование и умножение на ik для компонент Фурье взаимозаменяемы:

$$\partial_i \leftrightarrow ik_i \quad (9.72)$$

Для фиксированной моды \mathbf{k} пространство инвариантно относительно вращений вокруг вектора \mathbf{k} – «малая группа $SO(2)$ », но тензорные компоненты $h_{ik}, v_i, \delta\rho$ (вообще говоря) не инвариантны, преобразуются друг через друга \Rightarrow моды с определенной спиральностью (3 типа).

1. Скалярные моды (спиральность 0)

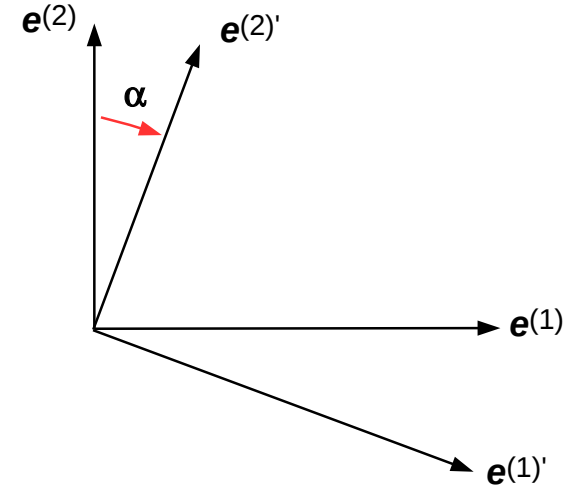
Объект при вращениях малой группы $SO(2)$ не преобразуется.

Типы скалярных мод (4 штуки)

- 3-скаляр ($\delta\rho, \delta p, \dots$)
- Вектор, $\parallel \mathbf{k}$
- Тензор, $\propto k_i k_j$ (т.к. k_i, k_j не меняются)
- Тензор, $\propto \delta_{i,j}$

2. Векторные моды (спиральность 1)

Преобразуются как вектор, ортогональный \mathbf{k}



$\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{k}$ – правая тройка.

Поворот по Ч.С. на α

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(1)'} &= \mathbf{e}^{(1)} \cos \alpha - \mathbf{e}^{(2)} \sin \alpha \\ \mathbf{e}^{(2)'} &= \mathbf{e}^{(1)} \sin \alpha + \mathbf{e}^{(2)} \cos \alpha \end{aligned} \quad (9.73)$$

$$\mathbf{e}^{\pm} = \mathbf{e}^{(1)} \pm i\mathbf{e}^{(2)} \quad (9.74)$$

$$\mathbf{e}^{(+)'(\alpha)} = \mathbf{e}^{(1)'}(\alpha) + i\mathbf{e}^{(2)'}(\alpha) = e^{i\alpha} \mathbf{e}^{(+)} \quad (9.75)$$

$$\hat{L}_\alpha \mathbf{e}^{(+)'(\alpha)} = -i \frac{\partial}{\partial \alpha} (e^{i\alpha} \mathbf{e}^{(+)}) = +1 \mathbf{e}^{(+)'(\alpha)} \quad (9.76)$$

– спиральность +1

$$\hat{L}_\alpha \mathbf{e}^{(-)'(\alpha)} = -1 \mathbf{e}^{(-)'(\alpha)} \quad (9.77)$$

– спиральность -1

Произвольный поперечный вектор является смесью спиральностей -1 и $+1$:

$$\mathbf{S} = \alpha_- \mathbf{e}^{(-)} + \alpha_+ \mathbf{e}^{(+)} \quad (9.78)$$

Единичную спиральность имеют (2 типа)

- Поперечные векторы
- Тензоры со структурой $k_i W_j^T$, где W_j^T – поперечный вектор, то есть $k_i W_i^T = 0$

(скалярные моды имеют спиральность 0, т.к. они не зависят от поворота α)

3. Тензорные моды (спиральность 2), всего 1 тип

Рассмотрим симметричные, бесследовые, поперечные 3-мерные тензоры:

- $h_{ij} = h_{ji}$ – 3 условия
- $h_{ii} = 0$ – 1 условие
- $k_i h_{ij} = 0$ – поперечность, 3 условия

9 параметров, 7 условий, 2 – свободные \Rightarrow
Размерность = 2

Из $\mathbf{e}^{(1)}$, $\mathbf{e}^{(2)}$ построим два тензора:

$$e_{ij}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i^{(1)} e_j^{(1)} - e_i^{(2)} e_j^{(2)}) \quad (9.79)$$

$$e_{ij}^{(\times)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i^{(1)} e_j^{(2)} + e_i^{(2)} e_j^{(1)}) \quad (9.80)$$

$$(9.81)$$

– линейно независимы, симметричны, бесследовы, поперечны по определению.

$$e_{ij}^{(\pm 2)} = e_{ij}^{(+)} \pm i e_{ij}^{(\times)} \quad (9.82)$$

Элементарно проверяется:

$$e_{ij}^{(+2)'}(\alpha) = e^{+2i\alpha} e_{ij}^{(+2)'} \Rightarrow \hat{L}_\alpha e_{ij}^{(+2)'}(\alpha) = +2 e_{ij}^{(+2)'} \quad (9.83)$$

$$e_{ij}^{(-2)'}(\alpha) = e^{-2i\alpha} e_{ij}^{(-2)'} \Rightarrow \hat{L}_\alpha e_{ij}^{(-2)'}(\alpha) = -2 e_{ij}^{(-2)'} \quad (9.84)$$

– объекты со спиральностью ± 2 .

• 4 типа скаляров (спиральность 0), 2 типа векторов (спиральность 1), 1 тип тензоров (спиральность 2) достаточно для разложения по ним всех величин, нужных для теории космологических возмущений (см. след. слайд).

- Дифференцирование компонент Фурье по x_j (умножение на ik_j) не меняет спиральности \Rightarrow

Линеаризованные (и потому линейные) уравнения разбиваются на независимые компоненты для мод разной спиральности.

Моды разной спиральности эволюционируют существенно по-разному!

Разложение h_{ij} и v_i по спиральностям

В калибровке $h_{0i} = 0$

$$h_{\mu\nu} = h_{00} \oplus h_{ij} \quad (9.85)$$

h_{00} не зависит от поворотов в плоскости (ij) \Rightarrow

$$h_{00} = 2\Phi - \text{скаляр} \quad (9.86)$$

h_{ij} есть комбинация всех возможных спиральностей:

$$h_{ij}(\eta, \mathbf{k}) = \begin{array}{l} -2\Psi\delta_{ij} - 2k_i k_j E \\ +i(k_i W_j^T + k_j W_i^T) \\ +h_{ij}^{TT} \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{спиральность } 0 \\ \text{спиральность } 1 \\ \text{спиральность } 2 \end{array} \right. \quad (9.87)$$

Ψ, E – скалярные моды (2 параметра)

W_j^T – векторные моды (2 параметра)

h_{ij}^{TT} – тензорные моды (2 параметра).

Всего 6 параметров, столько же независимых элементов в симметричной матрице h_{ij}

Разложение для скорости:

$$v_i(\eta, \mathbf{k}) = \begin{array}{l} ik_i v(\eta, \mathbf{k}) \\ +V_i^T(\eta, \mathbf{k}) \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{спиральность } 0 \\ \text{спиральность } 1 \end{array} \right. \quad (9.88)$$

v – скалярная мода (1 параметр)

V_i^T – векторные моды (2 параметра)

Всего 3 параметра, столько же независимых компонент вектора v_i

Если под $v(\eta, \mathbf{k})$ понимать всю компоненту Фурье, то

$$ik_i v(\eta, \mathbf{k}) = \partial_i v(\eta, \mathbf{k}) \quad (9.89)$$

поэтому $v(\eta, \mathbf{k})$ иногда называют потенциалом скорости.

Компоненты ТЭИ

Скаляр:

$$\delta T_0^0 = \delta\rho \quad (9.90)$$

Вектор и скаляр (см. (9.88)):

$$\delta T_i^0 = -(\rho + p)v_i \quad (9.91)$$

Скаляр:

$$\delta T_j^i = -\delta_j^i \delta p \quad (9.92)$$

Тензорного вклада нет!

Линеаризованные уравнения для возмущений

Ковариантное сохранение ТЭИ

$$\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = \partial_{\mu} T_{\nu}^{\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} T_{\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} T_{\lambda}^{\mu} = 0 \quad (9.93)$$

$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ считаются в метрике

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \quad (9.94)$$

в калибровке $h_{0i} = 0$ ★

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{a'}{a} + \frac{1}{2}h'_{00} \quad (9.95)$$

$$\Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{00}^i = \frac{1}{2}\partial_i h_{00} \quad (9.96)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{a'}{a}\delta_{ij} - \frac{1}{2}h'_{ij} \quad (9.97)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{a'}{a}(1 - h_{00})\delta_{ij} - \frac{a'}{a}h_{ij} - \frac{1}{2}h'_{ij} \quad (9.98)$$

$$\Gamma_{jk}^i = -\frac{1}{2}(\partial_j h_{ik} + \partial_k h_{ij} - \partial_i h_{jk}) \quad (9.99)$$

Подставляем в (9.93), используем выражения для δT , получаем два уравнения (для 0 и для i -компонент (9.93)) ★:

$$\delta\rho' + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho + \delta p) + (\rho + p) \left(\partial_i v_i - \frac{1}{2}h' \right) = 0 \quad (9.100)$$

$$\partial_i \delta p + (\rho + p) \left(4\frac{a'}{a}v_i + \frac{1}{2}\partial_i h_{00} \right) + [v_i(\rho + p)]' = 0 \quad (9.101)$$

где $h = h_{ii}$

Линеаризованные уравнения Эйнштейна

$$\delta G_{\mu}^{\nu} = 8\pi G \delta T_{\nu}^{\mu} \quad (9.102)$$

$$a^2 \delta G_0^0 = -3h_{00} \left(\frac{a'}{a} \right)^2 - \frac{1}{2}\partial_i \partial_j h_{ij} + \frac{1}{2}\Delta h - \frac{a'}{a}h' \quad (9.103)$$

$$a^2 \delta G_i^0 = \frac{1}{2}\partial_i h' - \frac{1}{2}\partial_j h'_{ij} + \frac{a'}{a}\partial_i h_{00} \quad (9.104)$$

$$a^2 \delta G_j^i = \frac{1}{2}\partial_i \partial_k h_{jk} + \frac{1}{2}\partial_j \partial_k h_{ik} + \frac{1}{2}h''_{ij} - \frac{1}{2}\Delta h_{ij} + \frac{1}{2}\partial_i \partial_j h_{00} - \frac{1}{2}\partial_i \partial_j h + \frac{a'}{a}h'_{ij} - \delta_j^i \left[\frac{1}{2}h'' + \frac{1}{2}\Delta h_{00} + \frac{1}{2}\partial_l \partial_k h_{lk} - \frac{1}{2}\Delta h + 2\frac{a''}{a}h_{00} - \left(\frac{a'}{a} \right)^2 h_{00} + \frac{a'}{a}(h'_{00} + h') \right] \quad (9.105)$$

Тензорные моды (Для компонент Фурье!)

В выражениях для δT_{ν}^{μ} [идеальная жидкость] (9.66)–(9.70) тензорного вклада нет, поэтому уравнение для тензорных мод однородное (очень просто!) ★:

$$\partial_{\eta}^2 h_{ij}^{TT} - \Delta h_{ij}^{TT} + 2\frac{a'}{a}\partial_{\eta} h_{ij}^{TT} = 0 \quad (9.106)$$

Это уравнение для гравитационных волн в пр-ве Фридмана.

В статическом пределе Минковского $\eta \rightarrow t$, $a' = 0$ и уравнение переходит в обычное волновое уравнение

$$\partial_t^2 h_{ij}^{TT} - \Delta h_{ij}^{TT} = 0 \quad (9.107)$$

Векторные моды

Векторные моды метрического тензора, скорости и ТЭИ

$$h_{ij} = i(k_i W_j^T + k_j W_i^T) = \partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T \quad (9.108)$$

$$v_i = V_i^T; \quad ik_i V_i = \partial_i V_i = 0 \quad (9.109)$$

$$\delta T_i^0 = -(\rho + p)v_i \quad (9.110)$$

Линеаризованные уравнения Эйнштейна:

00-компонента удовлетворяется тождественно ★;

0*i*-компоненты

$$\partial_\eta \Delta W_i^T = 16\pi G a^2 (\rho + p) V_i^T \quad (9.111)$$

ij-компоненты ★

$$\partial_\eta^2 W_i^T + 2\frac{a'}{a} \partial_\eta W_i^T = 0 \quad (9.112)$$

Откуда в 0*i*-компоненте 3-я производная? Получим:

$$\delta G_i^0 = \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{2} \partial_i h' - \frac{1}{2} \partial_j h'_{ij} + \frac{a'}{a} \partial_i h_{00} \right) = 8\pi G \delta T_i^0 \quad (9.113)$$

$$h_{00} \equiv 0 \Rightarrow \quad (9.114)$$

$$\partial_j h'_{ij} - \partial_i h' = a^2 16\pi G (\rho + p) V_i^T \quad (9.115)$$

$$\begin{aligned} \partial_j h'_{ij} &= \partial_\eta \partial_j (\partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T) = \partial_\eta [\partial_j \partial_i W_j^T + \partial_j \partial_j W_i^T] = \\ &= \partial_\eta \partial_j \partial_i W_j^T + \partial_\eta \Delta W_i^T \quad (9.116) \end{aligned}$$

$$\partial_j \partial_i W_j^T = -k_i k_j W_j^T = 0 \quad (\text{поперечность}) \quad (9.117)$$

$$h = i2k_j W_j^T = 0 \quad (\text{поперечность}) \quad (9.118)$$

$$\partial_\eta \Delta W_i^T = 16\pi G a^2 (\rho + p) V_i^T \quad (9.119)$$

или

$$-k^2 \partial_\eta W_i^T = 16\pi G a^2 (\rho + p) V_i^T \quad (9.120)$$

Из ковариантных сохранений нетривиально одно:

$$\partial_\eta [(\rho + p) V_i^T] + 4\frac{a'}{a} (\rho + p) V_i^T = 0 \quad (9.121)$$

Уравнение (9.112) является следствием (9.121) и (9.111).

Однородное уравнение (9.111) ($\rho = 0$) имеет решением любую функцию \mathbf{x} , не зависящую от η – это чистая калибровка.

Устраняется преобразованием (см. (9.41)):

$$\xi_i = W_i^T(\mathbf{x}), \quad \xi_0 = 0 \quad (9.122)$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{ij} &= h^{\mu\nu} - \partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu - 2\eta^{\mu\nu} \xi^\lambda \frac{\partial_\lambda a}{a} = \\ &= \partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T - \partial_i W_j^T - \partial_j W_i^T - 2\eta_{ij} W_j^T \frac{\partial_j a}{a} = 0 \quad (9.123) \end{aligned}$$

Векторные моды грав. поля в отсутствии источников не распространяются!

Лекция 10

Скалярные моды. Моды за горизонтом и моды под горизонтом.
Эволюция векторных и тензорных мод. Эволюция скалярных мод
для однокомпонентных сред.

Скалярные моды,
конформная Ньютонова калибровка

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu - 2\eta^{\mu\nu} \xi^\lambda \frac{\partial_\lambda a}{a} \quad (10.1)$$

Используем возможность остаточной калибровки, не нарушающей условия $h_{0i} = 0$ (см. (9.40)):

$$\partial_0 \xi_i + \partial_i \xi_0 = 0 \quad (10.2)$$

Общий вид такой калибровки:

$$\xi_i = -\partial_i \sigma(\eta, \mathbf{x}), \quad \xi_0 = \partial_\eta \sigma(\eta, \mathbf{x}) \quad (10.3)$$

$$\tilde{h}_{ij} = h_{ij} - 2\partial_i \partial_j \sigma - 2\frac{a'}{a} \delta_{ij} \sigma' \quad (10.4)$$

Общий вид скалярной моды h_{ij} (см. (9.87)):

$$h_{ij} = -2\Psi \delta_{ij} - 2k_i k_j E \quad (10.5)$$

В координатном представлении

$$h_{ij} = -2\Psi \delta_{ij} + 2\partial_i \partial_j E \quad (10.6)$$

$$\tilde{h}_{ij} = -2\Psi \delta_{ij} + 2\partial_i \partial_j E - 2\partial_i \partial_j \sigma - 2\frac{a'}{a} \delta_{ij} \sigma' \quad (10.7)$$

Подбираем σ :

$$2\partial_i \partial_j \sigma + 2\frac{a'}{a} \delta_{ij} \sigma' = \partial_i \partial_j E \quad (10.8)$$

Калибровка полностью фиксирована.

Для скалярных мод остается:

$$h_{00} = 2\Phi \quad (10.9)$$

$$h_{ij} = -2\Psi \delta_{ij} \quad (10.10)$$

$$v_i = \partial_i v \text{ [или } ik_i v \text{]} \quad (10.11)$$

Из (9.103)–(9.105) тензор Эйнштейна для скалярных мод ★:

$$\delta G_0^0 = \frac{2}{a^2} \left(-\Delta \Psi + 3\frac{a'}{a} \Psi' - 3\frac{a'^2}{a^2} \Phi \right) \quad (10.12)$$

$$\delta G_i^0 = \frac{2}{a^2} \left(-\partial_i \Psi' + \frac{a'}{a} \partial_i \Phi \right) \quad (10.13)$$

$$\begin{aligned} \delta G_j^i = & \frac{1}{a^2} \partial_i \partial_j (\Phi + \Psi) - \\ & - \frac{2}{a^2} \delta_{ij} \left[-\Psi'' + \frac{1}{2} \Delta (\Phi + \Psi) + \frac{a'}{a} (\Phi' - 2\Psi') + \right. \\ & \left. + \Phi \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a} \right) \right] \end{aligned} \quad (10.14)$$

В пространственной части для скалярных мод

$$\delta T_j^i = -\delta_j^i \delta p \quad (10.15)$$

Нет структуры $\partial_i \partial_j$, которая есть в $\delta G_j^i \Rightarrow$

$$\Phi + \Psi = 0 \Rightarrow \Psi = -\Phi \quad (10.16)$$

В Ньютоновом пределе Φ – Ньютоновский гравитационный потенциал, отсюда название калибровки.

Уравнения Эйнштейна для скалярных мод:

$$\Delta\Phi - 3\frac{a'}{a}\Phi' - 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = 4\pi G a^2 \delta\rho_{tot} \quad (10.17)$$

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi G a^2 [(\rho + p)v]_{tot} \quad (10.18)$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = 4\pi G a^2 \delta p_{tot} \quad (10.19)$$

Уравнения ковариантного сохранения ★
(λ – тип материи):

$$\delta\rho'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho_\lambda + \delta p_\lambda) + (\rho_\lambda + p_\lambda)(\Delta v_\lambda - 3\Phi') = 0 \quad (10.20)$$

$$[(\rho_\lambda + p_\lambda)v_\lambda]' + 4\frac{a'}{a}(\rho_\lambda + p_\lambda)v_\lambda + \delta p_\lambda + (\rho_\lambda + p_\lambda)\Phi = 0 \quad (10.21)$$

Не все уравнения (10.17)–(10.21) независимы.

Система не полна: нужны уравнения состояния:

$$p_\lambda = w_\lambda \rho_\lambda \quad (10.22)$$

и скорости звука

$$\delta p_\lambda = u_{s\lambda}^2 \delta\rho_\lambda \quad (10.23)$$

Вообще говоря, $w_\lambda \neq u_{s\lambda}^2$ так как $w_\lambda \neq \text{const!}$

В отсутствие материи (10.17)–(10.19) не имеют нетривиальных решений \Rightarrow свободное грав. поле не имеет распространяющихся скалярных (и векторных!) мод. Все распространяющиеся в пустоте моды – тензорные, спиральность ± 2 (или смесь).

Моды за горизонтом и моды под горизонтом

Длина волны возмущения

$$\lambda(\eta) = \frac{2\pi}{q(\eta)} \quad (10.24)$$

Для РД-стадии $l_H(\eta) = 1/H(\eta)$,
Для ДМ-стадии $l_H(\eta) = 2/H(\eta)$,
Всегда $l_H(\eta) \sim 1/H(\eta)$

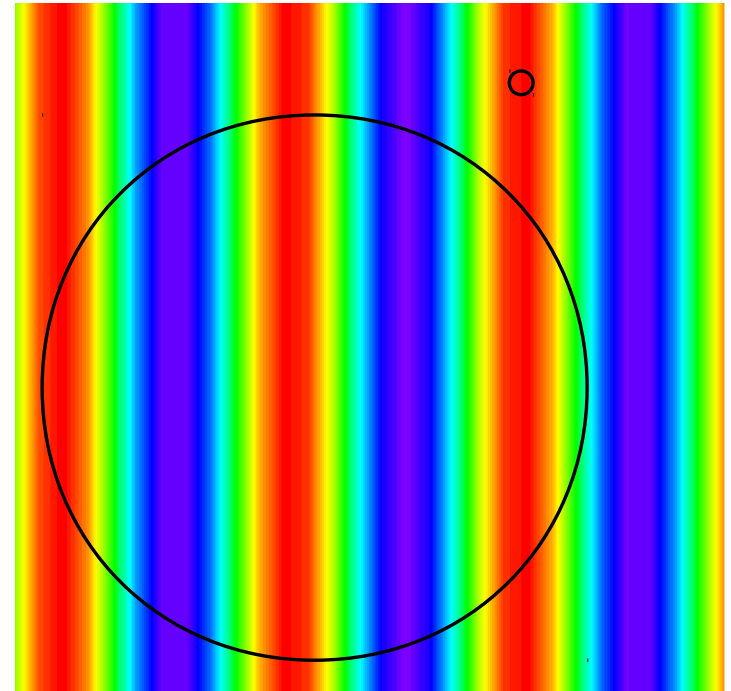
Важно различать случаи:

Мода далеко за горизонтом

$$\lambda(\eta) \gg l_H(\eta) \Rightarrow q(\eta) \ll H(\eta) \quad (10.25)$$

Мода глубоко под горизонтом

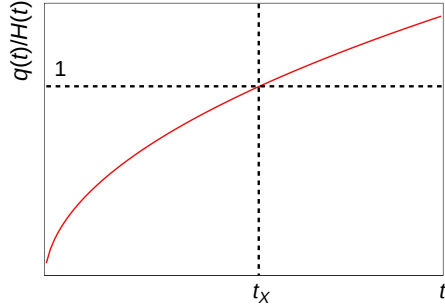
$$\lambda(\eta) \ll l_H(\eta) \Rightarrow q(\eta) \gg H(\eta) \quad (10.26)$$



РД и ДМ-стадии идут с замедлением ускорения \Rightarrow

$$\frac{l_H(t)}{\lambda(t)} = \frac{q(t)}{H(t)} = \frac{k/a(t)}{H(t)} \propto \frac{1/t^\alpha}{1/t} = t^{1-\alpha} \quad (10.27)$$

$\alpha < 1 \Rightarrow$ отношение растёт,
мода может войти под горизонт



На РД-стадии

$$l_H = \frac{1}{H} = \frac{1}{a'/a^2} = \frac{\text{const}^2 \eta^2}{\text{const}} = \text{const} \cdot \eta \cdot \eta = a(\eta) \eta \quad (10.28)$$

На ДМ-стадии

$$l_H = \frac{2}{H} = \frac{2}{a'/a^2} = \frac{2 \text{const}^2 \eta^4}{2 \text{const} \eta} = \text{const} \cdot \eta^2 \cdot \eta = a(\eta) \eta \quad (10.29)$$

Условие входа под горизонт

$$\lambda(\eta) \sim l_H(\eta) \quad (10.30)$$

$$\lambda(\eta) = \frac{2\pi}{q(\eta)} = \frac{2\pi}{k/a(\eta)} = \frac{2\pi a(\eta)}{k} \sim a(\eta) \eta \quad (10.31)$$

$$\Rightarrow k \eta_x \sim 2\pi \sim 1 \Rightarrow \eta_x \sim \frac{1}{k} \quad (10.32)$$

$$\eta \ll \frac{1}{k} - \text{за горизонтом} \quad (10.33)$$

$$\eta \gg \frac{1}{k} - \text{под горизонтом} \quad (10.34)$$

Т.к. $a \sim \eta$ или $a \sim \eta^2 \Rightarrow \eta \sim a/a'$, то эквивалентное условие

$$k \ll \frac{a'}{a} - \text{за горизонтом} \quad (10.35)$$

$$k \gg \frac{a'}{a} - \text{под горизонтом} \quad (10.36)$$

Особенно важен момент η_{eq} (РД \rightarrow ДМ).
Под горизонт входят волны

$$k_{eq} \sim \frac{1}{\eta_{eq}} \quad (10.37)$$

Их современный импульс (волновое число)

$$q_{eq}^{(0)} = \frac{k_{eq}}{a_0} = \frac{1}{a_0 \eta_{eq}} \quad (10.38)$$

$$\lambda_{eq}^{(0)} = \frac{2\pi}{q_{eq}^{(0)}} = 2\pi a_0 \eta_{eq} = 2\pi \cdot 1.2 \cdot 10^2 \text{ Мпк} = 750 \text{ Мпк} \quad (10.39)$$

Эволюция векторных мод

Векторные моды:

$$h_{ij} = \partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T \quad (10.40)$$

$$v_i = V_i^T \quad (10.41)$$

$$h_{00} = 0 \quad (10.42)$$

$$\delta p = \delta \rho = 0 \quad (10.43)$$

$$\delta T_i^0 = (\rho + p)V_i^T \quad (10.44)$$

Ковариантное сохранение:

$$\partial_\eta [(\rho + p)V_i^T] + 4\frac{a'}{a}(\rho + p)V_i^T = 0 \quad (10.45)$$

(0, i)-компонента уравнений Эйнштейна:

$$\partial_\eta \Delta W_i^T = 16\pi G a^2 (\rho + p)V_i^T \quad (10.46)$$

Из (10.45):

$$\frac{\partial_\eta [(\rho + p)V_i^T]}{(\rho + p)V_i^T} = -4\frac{\partial_\eta a}{a} \Rightarrow \quad (10.47)$$

$$\boxed{(\rho + p)V_i^T = \text{const} \cdot a^{-4}} \quad (10.48)$$

Если среда НР, то похоже на сохранение момента. Для каждой компоненты среды λ (10.48) выполняется отдельно.

Для релятивистского вещества $p \propto \rho \propto a^{-4} \Rightarrow$

$$\boxed{V_i^T = \text{const}} \quad (10.49)$$

Для нерелятивистского вещества $p = 0, \rho \propto a^{-3} \Rightarrow$

$$\boxed{V_i^T = \text{const}/a} \quad (10.50)$$

Векторные моды v_i либо не растут, либо убывают.

Из (10.46) и (10.48):

$$\partial_\eta (-k^2)W_i^T = 16\pi G a^2 \frac{\text{const}}{a^4} = \text{const} \frac{1}{a^2} \quad (10.51)$$

РД-стадия:

$$\partial_\eta W_i^T = \frac{\text{const}}{\text{const} \eta^2} = \frac{\text{const}}{\eta^2} \Rightarrow \quad (10.52)$$

$$\boxed{W_i^T = \frac{\text{const}}{\eta} = \frac{\text{const}}{a}} \quad (10.53)$$

ДМ-стадия:

$$\partial_\eta W_i^T = \frac{\text{const}}{\text{const} \eta^4} = \frac{\text{const}}{\eta^4} \Rightarrow \quad (10.54)$$

$$\boxed{W_i^T = \frac{\text{const}}{\eta^3} = \frac{\text{const}}{a^{3/2}}} \quad (10.55)$$

ЛД-стадия

$$\partial_\eta W_i^T = \frac{\text{const}}{(-1/H_{dS}\eta)^2} = \text{const} \eta^2 \Rightarrow \quad (10.56)$$

$$W_i^T = \text{const} \eta^3; \quad \eta = -\frac{1}{aH_{dS}} \Rightarrow \quad (10.57)$$

$$W_i^T = \frac{\text{const}}{a^3} \quad (10.58)$$

Векторные моды гравитации *падают* во всех режимах эволюции \Rightarrow падающие моды не должны себя проявлять, так как *ведут к сингулярности в начальных условиях*.

Обычно считается, что векторных мод нет (как и любых падающих мод!).

Эволюция тензорных мод (реликтовые гравитационные волны)

Уравнение Эйнштейна для тензорных мод (см. (9.106))

$$\partial_\eta^2 h_{ij}^{TT} + 2\frac{a'}{a}\partial_\eta h_{ij}^{TT} - \Delta h_{ij}^{TT} = 0 \quad (10.59)$$

$$h_{ij}^{TT} = \sum_A e_{ij}^{(A)} h^{(A)}; \quad A = +, \times \quad (10.60)$$

Из (10.59) для каждой (A):

$$\partial_\eta^2 h^{(A)} + 2\frac{a'}{a}\partial_\eta h^{(A)} - \Delta h^{(A)} = 0; \quad (10.61)$$

или в импульсном представлении (для любой из компонент)

$$h'' + 2\frac{a'}{a}h' + k^2 h = 0 \quad (10.62)$$

Тензорные моды за горизонтом: константная мода и падающая мода

Условие на k для мод за горизонтом (10.35):

$$k \ll \frac{a'}{a} \quad (10.63)$$

Пренебрегаем в (10.62) членом $k^2 h$:

$$h'' + 2\frac{a'}{a}h' = 0 \quad (10.64)$$

Одно из решений – константная мода:

$$h = h_{(i)} = \text{const} \quad (10.65)$$

(i) – initial или input.

Другое решение – падающая мода ★:

$$h(\eta) = \text{const} \int_\eta^\infty \frac{d\eta}{a^2(\eta)}; \quad h(\infty) = 0 \quad (10.66)$$

Ведет себя как падающая векторная мода

$$\begin{aligned} \text{РД} &: h \propto a^{-1} \\ \text{ДМ} &: h \propto a^{-3/2} \\ \text{ЛД} &: h \propto a^{-3} \end{aligned}$$

Следовательно такие решения не рассматриваются.

Все тензорные моды за горизонтом – только константные моды

$$h^A = h_{(i)}^A(\mathbf{k}); \quad A = +, \times \quad (10.67)$$

Тензорные моды под горизонтом. Сшивка с константной модой

Введем новую переменную:

$$f(\eta) = a(\eta)h(\eta) \quad (10.68)$$

Уравнение (10.62) принимает вид:

$$f'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) f = 0 \quad (10.69)$$

Т.к. a зависит от η степенным образом (РД и ДМ стадии), то

$$\frac{a''}{a} = \text{const} \frac{1}{\eta^2}, \quad \text{const} \sim 1 \quad (10.70)$$

Под горизонтом

$$\frac{1}{k} \ll \eta \Rightarrow k^2 \gg \frac{1}{\eta^2} \sim \frac{a''}{a} \Rightarrow k^2 - \frac{a''}{a} \cong k^2 \Rightarrow \quad (10.71)$$

получается уравнение осциллятора

$$f'' + k^2 f = 0 \Rightarrow \quad (10.72)$$

$$f(\eta) = C \cos(k\eta + \alpha) \Rightarrow h(\eta) = \frac{C}{a(\eta)} \cos(k\eta + \alpha) \quad (10.73)$$

Падающая мода, но безопасная, так как решение не нужно экстраполировать к $a = 0$ – только до момента входа под горизонт.

C, α ищем из условия сшивки с константной модой.

Грубо (асимптотика)

Момент входа под горизонт η_{\times} :

$$h(\eta_{\times}) = \frac{C}{a(\eta_{\times})} \cos(k\eta_{\times} + \alpha) \sim \frac{C}{a(\eta_{\times})} \Rightarrow \quad (10.74)$$

$$C \sim h(\eta_{\times})a(\eta_{\times}) \sim h_{(i)}a(\eta_{\times}) \Rightarrow \quad (10.75)$$

$$h(\eta) \sim h_{(i)} \frac{a(\eta_{\times})}{a(\eta)} \cos(k\eta + \alpha) \quad (10.76)$$

(η_{\times} для разных k – разные!)

Если $h_{(i)}$ не зависят от k (белый шум), то зависимость h от k для мод, вошедших под горизонт, определяется зависимостью $a(\eta_{\times}(k))$

$$\eta_{\times} \sim 1/k \Rightarrow$$

Если волны входят на РД стадии

$$a(\eta_{\times}) = \text{const} \eta_{\times} = \text{const} \frac{1}{k} \Rightarrow h(k) \propto h_i \frac{1}{k}; \quad k \gg k^{(eq)} \quad (10.77)$$

Если волны входят на ДМ стадии

$$a(\eta_{\times}) = \text{const} \eta_{\times}^2 = \text{const} \frac{1}{k^2} \Rightarrow h(k) \propto h_i \frac{1}{k^2}; \quad k \ll k^{(eq)} \quad (10.78)$$

Уточнение оценки: решаем (10.62) при $\eta \sim \eta_{\times}$

$$(10.62): h'' + 2\frac{a'}{a}h' + k^2h = 0 \quad (10.79)$$

Для РД-входящих мод

$$\frac{a'}{a} = \frac{1}{\eta} \Rightarrow \quad (10.80)$$

из (10.62)

$$h'' + \frac{2}{\eta}h' + k^2h = 0 \quad (10.81)$$

Замена $x = k\eta \Rightarrow$

$$\frac{d^2h}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dh}{dx} + h = 0 \quad (10.82)$$

Решение, стремящееся к константе при $x \rightarrow 0$ есть сферическая функция Бесселя 0-го порядка:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (10.83)$$

$$h(\eta) = h_{(i)} \frac{\sin k\eta}{k\eta} \quad (10.84)$$

• Это решение верно лишь на РД-стадии, вблизи η_{\times} . Как оно ведет себя потом?

Запишем в виде (переходит в (10.84) вблизи η_{\times}):

$$h(\eta) = h_{(i)} \frac{a(\eta_{\times})}{\eta_{\times}} \frac{\sin k\eta}{ka(\eta)} \quad (10.85)$$

$a(\eta) = \text{const} \times \eta$, отношение $a(\eta)/\eta$ не зависит от времени (вблизи η_{\times}). Из (8.101):

$$\frac{a(\eta_{\times})}{\eta_{\times}} = \left(\frac{g_*}{g_{*,0}} \right)^{1/6} a_0^2 H_0 \sqrt{\Omega_{rad}} \Rightarrow \quad (10.86)$$

$$h(\eta) = h_{(i)} \left[\left(\frac{g_*}{g_{*,0}} \right)^{1/6} a_0^2 H_0 \sqrt{\Omega_{rad}} \right] \frac{\sin k\eta}{ka(\eta)} \quad (10.87)$$

Это решение универсально верно при всех η после входа моды под горизонт, так как амплитуда универсально падает как $1/a$ (см. грубую оценку выше)! Фаза колебания фиксирована!

Формула (10.87) доводится до числа:

$$\frac{a_0^2}{ka(\eta)} = \frac{a_0}{a(\eta)} \frac{1}{k/a_0} = \frac{a_0}{a(\eta)} \frac{1}{q_0}; \quad k\eta = q_0(a_0\eta) \quad (10.88)$$

Для ДМ-входящих мод

$$a(\eta) = \text{const} \eta^2; \quad \frac{a'}{a} = \frac{2\eta}{\eta^2} = \frac{2}{\eta} \quad (10.89)$$

из (10.62)

$$h'' + \frac{4}{\eta}h' + k^2h = 0 \quad (10.90)$$

Замена:

$$h(\eta) = \frac{1}{\eta}y(\eta) \Rightarrow \quad (10.91)$$

$$\frac{d^2y}{d\eta^2} + \frac{2}{\eta} \frac{dy}{d\eta} + \left(k^2 - \frac{2}{\eta^2} \right) y = 0 \quad (10.92)$$

Еще замена: $x = k\eta \Rightarrow$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) y = 0 \quad (10.93)$$

– уравнение для сферической функции Бесселя 1-го порядка:

$$j_1(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) \quad (10.94)$$

Асимптотика $j_1(x \rightarrow 0) = 1/3$.

Решение с асимптотикой $h(\eta \rightarrow 0) = h_{(i)}$:

$$h(\eta) = -3h_{(i)} \frac{1}{(k\eta)^2} \left(\cos k\eta - \frac{\sin k\eta}{k\eta} \right) \quad (10.95)$$

$$\begin{aligned} h(\eta) &= -3h_{(i)} \frac{a(\eta_{\times})}{\eta_{\times}^2} \frac{1}{k^2 a(\eta)} \left(\cos k\eta - \frac{\sin k\eta}{k\eta} \right) = \\ &= \left\{ \text{Из (8.45)} : \frac{a}{\eta^2} = \frac{a_0^3 H_0^2 \Omega_M}{4} \right\} = \\ &= -3h_{(i)} \frac{a_0^3 H_0^2 \Omega_M}{4} \frac{1}{k^2 a(\eta)} \left(\cos k\eta - \frac{\sin k\eta}{k\eta} \right) \quad (10.96) \end{aligned}$$

При $k\eta \gg 1$ (глубоко под горизонтом)

$$h(\eta) = -3h_{(i)} \frac{a_0^3 H_0^2 \Omega_M}{4} \frac{1}{k^2 a(\eta)} \cos k\eta \quad (10.97)$$

что соответствует (10.76) и (10.78).

Это решение универсально верно при всех η после входа моды под горизонт, так как амплитуда универсально падает как $1/a$ (см. грубую оценку выше)! Фаза колебания фиксирована!

Скалярные возмущения – однокомпонентные среды

Формализм описывает возмущения той компоненты, которая доминирует.

Уравнения Эйнштейна для скалярных мод, однокомпонентная среда (см. (10.17)–(10.19))

$$\Delta\Phi - 3\frac{a'}{a}\Phi' - 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = 4\pi G a^2 \delta\rho \quad (10.98)$$

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi G a^2 [(\rho + p)v] \quad (10.99)$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = 4\pi G a^2 \delta p \quad (10.100)$$

Для однокомпонентной среды уравнения сохранения следуют из (10.98)–(10.100).

(10.98) в импульсном представлении:

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi G a^2 \delta\rho \quad (10.101)$$

Уравнение состояния: $\delta p = u_s^2 \delta\rho$

(10.101) + (10.100) $\times u_s^2$:

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}(1+u_s^2)\Phi' + \left[2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}(1-3u_s^2)\right]\Phi + u_s^2 k^2\Phi = 0 \quad (10.102)$$

Уравнение Фрийдмана:

$$\frac{a'^2}{a^4} = \frac{8\pi}{3}G\rho \quad (10.103)$$

Уравнения фоновой метрики для (i, j) -компонент (см. (8.89)):

$$2\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} = -8\pi Gp \Rightarrow \quad (10.104)$$

$$\left[2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}(1 - 3u_s^2) \right] = -8\pi Ga^2(p - u_s^2\rho) \quad (10.105)$$

Считаем $p = u_s^2\rho$, тогда [...] исчезает

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}(1 + u_s^2)\Phi' + u_s^2k^2\Phi = 0 \quad (10.106)$$

Скалярные моды за горизонтом

$$k \ll \frac{a'}{a} \Rightarrow \quad (10.107)$$

последним слагаемым в (10.106) пренебрегаем

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}(1 + u_s^2)\Phi' = 0 \quad (10.108)$$

Имеется константное решение

$$\Phi = \Phi_{(i)} = \text{const} \quad (10.109)$$

и есть падающая мода

$$\Phi(\eta) = \text{const} \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta}{a^{3(1+u_s^2)}(\eta)} \quad (10.110)$$

Предполагаем, как обычно, что падающей моды нет.

Ищем

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho} \quad (10.111)$$

Из (10.101), за горизонтом для константной моды

$$3\frac{a'^2}{a^2}\Phi_{(i)} = -4\pi Ga^2\delta\rho \quad (10.112)$$

Из уравнения Фрийдмана

$$\frac{a'^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3}a^2G\rho \quad (10.113)$$

Подставляем в (10.112) \Rightarrow

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho} = -2\Phi_{(i)} = \text{const} \quad (10.114)$$

Скорости, соответствующие скалярной моде v : $v_j = \partial_j v$

Из (10.99) потенциал скорости

$$v = -\frac{1}{4\pi Ga^2(\rho + p)} \frac{a'}{a} \Phi \quad (10.115)$$

$$\Phi = \Phi_{(i)} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \Rightarrow$$

$$v_j = \partial_j v = -\frac{1}{4\pi G(\rho + p)} \frac{a'}{a^2} \frac{1}{a} i k_j e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \sim$$

$$\sim \frac{1}{4\pi G(\rho + p)} H q = \frac{1}{4\pi G(\rho + p)} H^2 \frac{q}{H} \sim \frac{q}{H} \ll 1$$
(10.116)

Скалярные моды под горизонтом: УР вещество

$$w = u_s^2 = 1/3 \quad (10.117)$$

Из (10.106)

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a} (1 + u_s^2) + u_s^2 k^2 \Phi = 0; \quad \frac{a'}{a} = \frac{1}{\eta} \Rightarrow \quad (10.118)$$

$$\Phi'' + \frac{4}{\eta} + u_s^2 k^2 \Phi = 0 \quad (10.119)$$

Сводится к уравнению для сферической функции Бесселя 1-го порядка (см. (10.90)). Решение:

$$\Phi(\eta) = -3\Phi_{(i)} \frac{1}{(u_s k \eta)^2} \left[\cos(u_s k \eta) - \frac{\sin(u_s k \eta)}{u_s k \eta} \right] \quad (10.120)$$

$$\Phi(\eta \rightarrow 0) = \Phi_{(i)} \quad (10.121)$$

Звуковой горизонт:

$$l_s = u_s \cdot \frac{1}{H} \quad (10.122)$$

Далеко под звуковым горизонтом ($u_s k \eta \gg 1$) имеется падающая волна с определенной фазой:

$$\Phi(\eta) = -3\Phi_{(i)} \frac{1}{(u_s k \eta)^2} \cos(u_s k \eta) \quad (10.123)$$

Ищем $\delta = \delta\rho/\rho$ глубоко под (звуковым) горизонтом. Из (10.101) (объединили слагаемые с Φ):

$$\left(k^2 + 3\frac{a'^2}{a^2} \right) \Phi + 3\frac{a'}{a} \Phi' = -4\pi G a^2 \delta \rho \quad (10.124)$$

Покажем, что слева существенен только член $k^2\Phi$.

$$\eta^2 \left(k^2 + 3\frac{a'^2}{a^2} \right) \Phi =$$

$$= \eta^2 \left(k^2 + \frac{3}{\eta^2} \right) \left(-3\Phi_{(i)} \cos(u_s k \eta) \frac{1}{(u_s k \eta)^2} \right) =$$

$$= (\eta^2 k^2 + 3) \left(-3\Phi_{(i)} \cos(u_s k \eta) \frac{1}{(u_s k \eta)^2} \right) =$$

$$= \backslash u_s k \eta \gg 1 \backslash \approx$$

$$\approx \eta^2 k^2 \left(-3\Phi_{(i)} \cos(u_s k \eta) \frac{1}{(u_s k \eta)^2} \right) \sim \Phi_{(i)} \quad (10.125)$$

$$\eta^2 3\frac{a'}{a} \Phi' \cong \frac{9\Phi_{(i)}}{u_s k \eta} \sin(u_s k \eta) \sim \frac{1}{u_s k \eta} \Phi_{(i)} \quad (10.126)$$

$$\Phi_{(i)} \gg \frac{1}{u_s k \eta} \Phi_{(i)} \quad (10.127)$$

$$\begin{aligned}
k^2\Phi &= -4\pi G a^2 \delta\rho \Rightarrow \delta\rho = -\frac{1}{4\pi G} \frac{k^2}{a^2} \Phi(\eta) = \\
&= \frac{3\Phi_{(i)}}{4\pi G} \frac{1}{u_s^2} \frac{1}{a^2 \eta^2} \cos(u_s k \eta) = \sqrt{\frac{1}{a^2 \eta^2} = H^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho} = \\
&= 6\Phi_{(i)} \rho \cos(u_s k \eta) \Rightarrow (10.128)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\delta_{rad} = \frac{\delta\rho_{rad}}{\rho} = 6\Phi_{(i)} \cos(u_s k \eta)} \quad (10.129)$$

Возмущения плотности релятивистского вещества под горизонтом испытывают акустические осцилляции.

Амплитуда не растет и не убывает – Джинсовской неустойчивости нет.

Возмущение скорости релятивистской материи

Исходим из (10.99) [доминирует УР материя \Rightarrow УР стадия]:

$$\Phi' + \frac{a'}{a} \Phi = -4\pi G a^2 (\rho + p) v \quad (10.130)$$

$$\frac{a'^2}{a^4} = \frac{8\pi}{3} G \rho; \quad \frac{a'}{a^2} = \frac{1}{a\eta}; \quad p = \frac{1}{3}\rho \Rightarrow \quad (10.131)$$

$$a^2(p + \rho) = \frac{1}{\eta^2} \frac{1}{2\pi G} \star \quad (10.132)$$

Подставляем $\Phi_{(i)}$ (10.120) и (10.132) в (10.99) и получаем:

$$kv = \frac{3\Phi_{(i)}}{u_s} \left[\frac{\sin(u_s k \eta)}{(u_s k \eta)^2} - \frac{\cos(u_s k \eta)}{u_s k \eta} - \frac{1}{2} \sin(u_s k \eta) \right] \quad (10.133)$$

v – потенциал скорости: $v_i = ik_i v = \partial_i v$; kv – «физическая скорость».

Для мод глубоко под (акустическим) горизонтом ($u_s k \eta \gg 1$)

$$\boxed{kv = -\frac{3\Phi_{(i)}}{2u_s} \sin(u_s k \eta)} \quad (10.134)$$

– акустические осцилляции.

Ср. (10.129) и (10.134) – фазы сдвинуты на $\pi/2$.

Нерелятивистское вещество (под и за горизонтом)

(10.106) (общее уравнение для скалярного потенциала Φ):

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}(1 + u_s^2)\Phi' + u_s^2 k^2 \Phi = 0 \quad (10.135)$$

$p = 0$; $u_s = 0 \Rightarrow$ все моды находятся за *звуковым горизонтом*.

Все, что остается от уравнения и за горизонтом, и под горизонтом:

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' = 0 \Rightarrow \Phi(\eta) = \Phi = \text{const} \quad (10.136)$$

Начальные данные – константная мода, она для потенциала и сохраняется. \Rightarrow

• В линейном режиме возмущения потенциалов скалярной моды НР вещества не меняются.

Плотность (стадия ДМ - автоматически из-за однокомпонентности!)

(10.101):

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi Ga^2\delta\rho \quad (10.137)$$

$\Phi' = 0 \Rightarrow$

$$\left(k^2 + 3\frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = -4\pi Ga^2\delta\rho \Rightarrow \quad (10.138)$$

$$\begin{aligned} \delta\rho &= -\frac{1}{4\pi Ga^2} \left(k^2 + 3\frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = \\ &= \backslash a = \text{const } \eta^2 \Rightarrow a'/a = 2/\eta \backslash = \\ &= -\frac{1}{4\pi Ga^2} \left(k^2 + \frac{12}{\eta^2}\right)\Phi \quad (10.139) \end{aligned}$$

$$\delta\rho = -\frac{1}{4\pi Ga^2} \left(k^2 + \frac{12}{\eta^2}\right)\Phi \quad (10.140)$$

За горизонтом

(уже знаем: $\delta = -2\Phi_{(i)}$, константная мода)

$$\frac{1}{k} \gg \eta \Rightarrow k^2 \ll 1/\eta^2 \Rightarrow$$

$12/\eta^2$ доминирует \Rightarrow

$$\delta\rho \propto 1/a^3.$$

$$\text{Но } \rho \propto 1/a^3 \Rightarrow \delta = \delta\rho/\rho = \text{const}$$

$$H = \frac{a'}{a^2} = \frac{2}{a\eta} \quad (10.141)$$

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \Rightarrow \rho = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{2}{a\eta}\right)^2 \Rightarrow \quad (10.142)$$

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho} = -2\Phi \quad (10.143)$$

$$\delta = \delta_{(i)} = -2\Phi_{(i)} = \text{const} - \text{за горизонтом} \quad (10.144)$$

Для мод за горизонтом для нерелятивистского вещества Джинсовская неустойчивость не развивается.

Под горизонтом

$$k\eta \gg 1 \Rightarrow k^2 \gg 1/\eta^2 \Rightarrow$$

$$\delta\rho = -\frac{1}{4\pi Ga^2}k^2\Phi = +\frac{1}{8\pi Ga^2}k^2\delta_{(i)} \quad (10.145)$$

Уже видно, что δ будет расти пропорционально $a \Rightarrow$ джинсовская неустойчивость. Найдём, как:

$$\rho = \frac{3}{8\pi G}H^2 \quad (10.146)$$

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{3} \frac{k^2}{a^2} \frac{1}{H^2} \delta_{(i)} = \frac{1}{3} \frac{q^2}{H^2} \delta_{(i)} \quad (10.147)$$

В момент входа под горизонт $q_{\times} = H_{\times}$, из (10.147) \Rightarrow

$$\delta_{\times} = \frac{1}{3}\delta_{(i)} \quad (10.148)$$

$$H^2 = \left(\frac{2}{a\eta} \right)^2 \Rightarrow \quad (10.149)$$

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{3} \frac{k^2}{a^2} \frac{a^2 \eta^2}{4} \delta_{(i)} = \frac{1}{12} k^2 \eta^2 \delta_{(i)} = \\ &= \left\langle \eta^2 = \frac{a}{\text{const}} \right\rangle = \frac{1}{12} k^2 \frac{a}{\text{const}} \delta_{(i)} \quad (10.150) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{12} k^2 \frac{a_{\times}(k)}{\text{const}} \delta_{(i)} = \delta_{\times} = \frac{1}{3} \delta_{(i)} \quad (10.151)$$

$$\text{const} = \frac{1}{4} k^2 a_{\times}(k) \quad (10.152)$$

$$\delta(\eta) = \frac{1}{3} \frac{a(\eta)}{a_{\times}} \delta_{(i)}, \quad k\eta \gg 1 \quad (10.153)$$

Амплитуда моды растет со временем – неустойчивость Джинса. Чем позднее мода входит под горизонт, тем меньше успевает вырасти к моменту η

Какие моды привели к образованию наблюдаемых структур?

Рассмотрим все моды, вошедшие под горизонт на МД-стадии.

Самая короткая среди них – вошедшая под горизонт в момент q_{eq}

Координатный импульс (волновое число) моды определяется

$$k_{eq} \eta_{eq} \sim 1 \quad (10.154)$$

Длина волны сейчас:

$$\frac{k_{eq}}{a_0} (a_0 \eta_{eq}) = q_{eq} (a_0 \eta_{eq}) = \frac{2\pi}{\lambda_{eq}} (a_0 \eta_{eq}) \sim 1 \Rightarrow \quad (10.155)$$

$$\lambda_{eq} \sim 2\pi (a_0 \eta_{eq}) = 2\pi \times 120 \text{ Мпк} \approx 750 \text{ Мпк} \quad (10.156)$$

$$\delta = \frac{1}{3} (1 + z_{eq}) \delta_{(i)} \quad (10.157)$$

$$\delta_{(i)} \sim 3 \cdot 10^{-5}, \quad z_{eq} \approx 3000 \Rightarrow \delta \sim 0.03 \quad (10.158)$$

Моды, вошедшие под горизонт на МД-стадии не вошли в нелинейный режим \Rightarrow

Вселенная на масштабах 750 Мпк и более – заведомо однородна.

Существующие структуры определяются модами, вошедшими под горизонт раньше – на РД-стадии.

Лекция 11

Скалярные моды нерелятивисткой материи в однокомпонентной модели (окончание). Начальные условия за горизонтом для адиабатической моды. Гауссовы случайные поля и начальные условия для адиабатических возмущений. Стандартная космологическая модель.

Скорости, скалярные моды за и под горизонтом

$0i$ -компонента линеаризованных уравнений Эйнштейна для скалярной моды (10.99):

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi G a^2(\rho + p)v \quad (11.1)$$

$\Phi' = 0, p = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} v &= -\frac{a'}{a}\Phi \frac{1}{4\pi G a^2} \frac{1}{\rho} = \left\langle H = \frac{a'}{a^2}, a = \text{const } \eta^2 \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{8\pi}{3} G \rho = H^2 = \left(\frac{2}{a\eta}\right)^2, \frac{a'}{a} = \frac{2}{\eta} \right\rangle = \\ &= -\frac{1}{3}\Phi\eta \quad (11.2) \end{aligned}$$

$$\boxed{kv = -\frac{\Phi}{3}k\eta} \quad (11.3)$$

Моды за горизонтом $k\eta \ll 1 \Rightarrow kv \ll \Phi$
 Под горизонтом скорости растут $kv \propto \eta \propto \sqrt{a}$
 При всех масштабах, т.к. $u_s = 0$

Нерелятивистское вещество на Λ -доминированной стадии

$$(8.93) : \quad a(\eta) = -\frac{1}{H_{dS}\eta}, \quad H_{dS}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_\Lambda \quad (11.4)$$

Λ создает давление, но не создает возмущения давления!

Потенциал Φ .

ij -компонента линеаризованных уравнений Эйнштейна для скалярной моды (10.100):

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = 4\pi G a^2 \delta p_{tot} \quad (11.5)$$

$\delta p_{tot} = 0$. Подставляем (11.4):

$$\Phi'' - \frac{3}{\eta}\Phi' + \frac{3}{\eta^2}\Phi = 0 \quad (11.6)$$

Два типа решений:

$$\Phi(\eta) = \text{const} \cdot \eta \propto \frac{1}{a} \quad (11.7)$$

$$\Phi(\eta) = \text{const} \cdot \eta^3 \propto \frac{1}{a^3} \quad (11.8)$$

Падает!

Плотность

Ковариантное сохранение (10.101):

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi Ga^2\delta\rho \quad (11.9)$$

Подставляем (11.7), пренебрегаем (11.8), используем $a'/a = -1/\eta$ (два последних слагаемых слева в (11.9) сокращаются)

$$k^2\Phi = -4\pi Ga^2\delta\rho \Rightarrow \delta\rho = -\frac{k^2\Phi}{4\pi Ga^2} \quad (11.10)$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \propto \frac{\Phi}{a^2} \cdot a^3 \propto \frac{1}{a^3} \times a^3 = 1 \text{ (не растут)} \quad (11.11)$$

Структуры большего масштаба, чем наблюдаются сейчас, не появятся никогда.

Первичные скалярные возмущения в многокомпонентной Вселенной

Основные уравнения для возмущений в импульсном представлении

Линеаризованные уравнения Эйнштейна (10.17)–(10.19), переписаны с учетом нескольких компонент материи λ :

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi Ga^2 \sum_{\lambda} \delta\rho_{\lambda} \quad (11.12)$$

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi Ga^2 \sum_{\lambda} (\rho_{\lambda} + p_{\lambda})v_{\lambda} \quad (11.13)$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a}\right)\Phi = 4\pi Ga^2 \sum_{\lambda} \delta p_{\lambda} \quad (11.14)$$

Линеаризованный закон сохранения ТЭИ:

$$\delta\rho'_{\lambda} + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho_{\lambda} + \delta p_{\lambda}) - (\rho_{\lambda} + p_{\lambda})(k^2v_{\lambda} + 3\Phi') = 0 \quad (11.15)$$

$$[(\rho_{\lambda} + p_{\lambda})]' + 4\frac{a'}{a}(\rho_{\lambda} + p_{\lambda})v_{\lambda} + \delta p_{\lambda} + (\rho_{\lambda} + p_{\lambda})\Phi = 0 \quad (11.16)$$

Основные компоненты среды до рекомбинации:

- Барион-электрон-фотонная среда $\lambda = B\gamma$
- Темная материя: $\lambda = CDM$.
- Нейтрино (лептоны): $\lambda = L$

Обозначения и связи:

$$\delta_{\lambda} = \delta\rho_{\lambda}/\rho_{\lambda} \quad (11.17)$$

$$\delta p_{\lambda} = u_{s,\lambda}^2\delta\rho_{\lambda} \quad (11.18)$$

$$p_{\lambda} = w_{\lambda}\rho_{\lambda} \quad (11.19)$$

Уравнения (11.15) и (11.16) в терминах $\delta_\lambda, w_\lambda, u_{s,\lambda}^2$ ★:

$$\delta'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(u_{s,\lambda}^2 - w_\lambda)\delta_\lambda - (1 + w_\lambda)k^2 v_\lambda = 3(1 + w_\lambda)\Phi' \quad (11.20)$$

$$[(1+w_\lambda)v_\lambda]' + \frac{a'}{a}(1-3w_\lambda)(1+w_\lambda)v_\lambda + u_{s,\lambda}^2\delta_\lambda = -(1+w_\lambda)\Phi \quad (11.21)$$

Адиабатическая мода и мода постоянной кривизны

Контекст:

- Интерес представляют моды, отвечающие за анизотропию СМВ и за рост структур вещества.
- Такие моды входят под горизонт при температурах не более $T \sim 100$ кэВ:
 - барионы и электроны нерелятивистские
 - СDM нерелятивистская
 - нейтрино (~ 1 МэВ) и СDM (> 0.05 ГэВ) заморожены, не взаимодействуют с барион-электрон-фотонной плазмой

Основные параметры космической плазмы:

- n_B, n_{CDM}, n_L
- T (или $s \propto T^3$)

- Вообще говоря, имеют место возмущения температуры, плотности и состава среды вместе.
- Если возмущения малы (линейный режим), то можно разделить на две линейно-независимые компоненты:
 - Возмущения плотности (температуры) – отдельно;
 - Возмущения состава – отдельно.

Возмущения плотности – адиабатическая мода

Вещество имеет ненулевые возмущения плотности энергии (температуры), но относительные величины, характеризующие барионную асимметрию, плотность темной материи и плотность лептонов не зависят от типа материи:

$$\delta\left(\frac{n_B}{s}\right) = \delta\left(\frac{n_{CDM}}{s}\right) = \delta\left(\frac{n_L}{s}\right) = 0 \quad (11.22)$$

Возмущения состава – моды постоянной кривизны

Возмущения плотности вещества отсутствуют, но:

- Неоднородность барионного числа \rightarrow барионная мода постоянной кривизны
- Неоднородность плотности темной материи \rightarrow СDM-мода постоянной кривизны
- Неоднородность лептонного числа \rightarrow лептонная мода постоянной кривизны (при прочих фоновых концентрациях)

Кривизна постоянна потому, что изменения концентраций рассматриваются на фоне постоянной полной

плотности энергии.

Общее определение: для мод постоянной кривизны за горизонтом возмущение гравитационных потенциалов отсутствует.

Наблюдения показывают: вклад мод постоянной кривизны мал.

Адиабатическая мода за горизонтом.

Начальные условия для адиабатической моды – что это такое?

За горизонтом возмущения существуют в виде константных мод $\Phi = \Phi_{(i)} = \text{const}$, $\delta\rho/\rho = \text{const}$ и общая пространственно-временная картина, соответствующая одной *адиабатической* константной моде, на эвристическом уровне соответствует набору независимых однородных вселенных несколько различающихся по времени эволюции и потому имеющих разную температуру, или начавших развиваться в разное время.

Тогда для адиабатической моды для каждой независимой компоненты среды можно записать:

$$\delta\rho_\lambda = \rho'_\lambda \delta\eta(\mathbf{x}, \eta) \equiv \rho'_\lambda \varepsilon(\mathbf{x}, \eta) \quad (11.23)$$

$$\delta p_\lambda = p'_\lambda \delta\eta(\mathbf{x}, \eta) \equiv p'_\lambda \varepsilon(\mathbf{x}, \eta) \quad (11.24)$$

Функция $\varepsilon(\mathbf{x}, \eta)$ – одна для всех компонент λ , так как моды адиабатические.

В то же время, при фиксированном составе среды, ρ

и p однозначно зависят от температуры \Rightarrow :

$$\delta\rho_\lambda = \frac{\partial\rho_\lambda}{\partial T} \delta T(\mathbf{x}, \eta) \quad (11.25)$$

$$\delta p_\lambda = \frac{\partial p_\lambda}{\partial T} \delta T(\mathbf{x}, \eta) \quad (11.26)$$

Но:

$$\delta T(\mathbf{x}, \eta) = \frac{\partial T}{\partial \eta} \delta\eta \equiv \frac{\partial T}{\partial \eta} \varepsilon(\mathbf{x}, \eta) \quad (11.27)$$

$\varepsilon(\mathbf{x}, \eta)$ и $\delta T(\mathbf{x}, \eta)$ однозначно связаны, поэтому определения (11.25,11.26) и (11.23,11.24) эквивалентны.

Формулы (11.25,11.26) можно считать определением адиабатической моды.

Совместимо ли определение (11.25,11.26) или (11.23,11.24) с уравнениями (11.12)–(11.16)?

Покажем, что Φ (а следовательно и все остальное) действительно выражается только через ε – при том, что уравнения записаны для отдельных компонент λ .

Используем (11.15) –
сохранение ТЭИ, зависящее от λ :

$$(11.15): \delta\rho'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho_\lambda + \delta p_\lambda) - (\rho_\lambda + p_\lambda)(k^2 v_\lambda + 3\Phi') = 0 \quad (11.28)$$

За горизонтом можно считать $k = 0$, остается:

$$\begin{aligned} \delta\rho'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho_\lambda + \delta p_\lambda) - (\rho_\lambda + p_\lambda)3\Phi' &= \\ = \left\langle \delta\rho_\lambda = \rho'_\lambda \varepsilon; \rho'_\lambda = -3\frac{a'}{a}(\rho_\lambda + p_\lambda) \text{ ков. сохр. (8.90)} \right\rangle & \\ = -3(\rho_\lambda + p_\lambda) \left[\left(\frac{a'}{a} \varepsilon \right)' + \Phi' \right] = 0 \Rightarrow & \quad (11.29) \end{aligned}$$

$$\boxed{\Phi' = - \left(\frac{a'}{a} \varepsilon \right)'} \quad (11.30)$$

– Зависимости от λ нет!

Решение (11.30):

$$\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \eta) = -\frac{a'}{a}\varepsilon(\mathbf{x}, \eta) - \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \quad (11.31)$$

$\zeta(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ важна, т.к., в действительности, и определяет константную моду за горизонтом.

Из ковариантного сохранения (8.90)

$$\rho'_\lambda = -3\frac{a'}{a}(\rho_\lambda + p_\lambda) \Rightarrow \quad (11.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{a'}{a} &= -\frac{1}{3} \frac{\rho'_\lambda}{(\rho_\lambda + p_\lambda)} = \left\langle \rho'_\lambda = \frac{\delta\rho_\lambda}{\varepsilon} \right\rangle = \\ &= -\frac{1}{3} \frac{\delta\rho_\lambda}{\varepsilon(\rho_\lambda + p_\lambda)} \Rightarrow \quad (11.33) \end{aligned}$$

ε в (11.31) сокращается! \Rightarrow

$$\zeta = -\Phi + \frac{1}{3} \frac{\delta\rho_\lambda}{\rho_\lambda + p_\lambda} = -\Phi + \frac{1}{3} \frac{\delta\rho_{tot}}{\rho_{tot} + p_{tot}} \quad (11.34)$$

– так как мода адиабатическая

$$\boxed{\zeta = -\Phi + \frac{1}{3} \frac{\delta\rho_{tot}}{\rho_{tot} + p_{tot}}} \quad (11.35)$$

– не зависит от времени, в то время, как слагаемые в п.ч. могут зависеть от времени!

Выразим Φ только через ζ .

Решаем уравнение (11.12)

(00-компонента уравнений Эйнштейна)

$$(11.12): k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi G a^2 \sum_{\lambda} \delta\rho_\lambda \quad (11.36)$$

- Для константной моды $k = 0$
- Подставляем $\delta\rho_\lambda = \rho_\lambda\varepsilon$
- Подставляем Φ из (11.31), Φ' из (11.30)
- Используем $\rho_{tot} = \frac{3}{8\pi G} \frac{a'^2}{a^4}$
- Используем $2\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} = -8\pi G p_{tot}$

$$\boxed{2\frac{a'}{a}\varepsilon + \varepsilon' + \zeta = 0 \star} \quad (11.37)$$

Решение вариацией постоянных.
 Общее решение при $\zeta = 0 \Rightarrow \varepsilon = Ca^{-2}$
 – падающая мода, должно быть отброшено $\Rightarrow \zeta \neq 0$
 Ответ:

$$\varepsilon(\eta) = -\zeta \frac{1}{a^2(\eta)} \int_0^\eta a^2(\eta) d\eta \quad (11.38)$$

Нижний предел выбран исходя из $\varepsilon(\eta \rightarrow 0) = 0$, так как только в этом случае $\Phi = -\frac{a'}{a}\varepsilon - \zeta$ конечен в $\eta = 0$.

Уравнение (11.14) (пространственные компоненты линеаризованного уравнения Эйнштейна для скалярных мод) с (11.38) удовлетворяется автоматически \star .

Из (11.31):

$$\Phi = -\zeta \left(1 - \frac{a'}{a^3} \int_0^\eta a^2(\eta) d\eta \right) \quad (11.39)$$

Из (11.13) ищется потенциал скорости v_λ (и сама скорость). $\delta\rho_\lambda$ определяется из (11.34).

$\Rightarrow \zeta(\mathbf{k})$ полностью определяет адиабатическую моду за горизонтом.

Вместо ζ можно использовать (и часто используется) величину

$$\mathcal{R} = -\Phi + \frac{a'}{a}v_{tot}; \quad v_{tot} \equiv \frac{\sum_\lambda(\rho_\lambda + p_\lambda)v_\lambda}{\sum_\lambda(\rho_\lambda + p_\lambda)} \quad (11.40)$$

Из (11.12), (11.13) и

$$\frac{\delta\rho_\lambda}{\rho_\lambda + p_\lambda} = \frac{\delta\rho_{tot}}{\rho_{tot} + p_{tot}} \quad (\text{адиабатичность}) \quad (11.41)$$

следует \star

$$\zeta - \mathcal{R} = -\frac{k^2\Phi}{12\pi Ga^2(\rho + p)_{tot}} \rightarrow 0 \quad \text{в пределе } k \rightarrow 0 \quad (11.42)$$

За горизонтом ζ и \mathcal{R} – одно и то же.

В качестве начального условия для адиабатических скалярных мод можно взять $\zeta_{(i)}(\mathbf{k})$ или $\mathcal{R}_{(i)}(\mathbf{k})$

Начальные условия для УР вещества за горизонтом

На РД-стадии, для главных УР мод за горизонтом (10.114) (поскольку УР моды доминируют)

$$\delta_{rad} = -2\Phi \quad (11.43)$$

$p_{tot} = \rho_{tot}/3 \Rightarrow$

$$\zeta = -\Phi + \frac{\delta\rho_{tot}}{3(\rho_{tot} + p_{tot})} = -\Phi + \frac{1}{4}\delta = -\frac{3}{2}\Phi \Rightarrow \quad (11.44)$$

$$\Phi = -\frac{2}{3}\zeta = -\frac{2}{3}\mathcal{R}; \quad \delta_{rad} = \frac{4}{3}\mathcal{R} \quad (11.45)$$

Начальные условия для НР вещества

На РД стадии, не слишком задолго до РД→МД перехода имеется нерелятивистское вещество – В и CDM. Для НР вещества

$$\rho_M \propto 1/a^3 \Rightarrow \rho'_M = -3\rho_M \frac{a'}{a} \quad (11.46)$$

Для УР вещества

$$\rho_{rad} \propto 1/a^4 \Rightarrow \rho'_{rad} = -4\rho_{rad} \frac{a'}{a} \quad (11.47)$$

Отсюда

$$\delta_M = \frac{\delta\rho_M}{\rho_M} = \frac{\rho'_M \varepsilon}{\rho_M} = -3\frac{a'}{a}\varepsilon \quad (11.48)$$

$$\delta_{rad} = \frac{\delta\rho_{rad}}{\rho_{rad}} = \frac{\rho'_{rad} \varepsilon}{\rho_{rad}} = -4\frac{a'}{a}\varepsilon \quad (11.49)$$

$$\delta_M = \frac{3}{4}\delta_{rad} = -\frac{3}{2}\Phi = \mathcal{R} \quad (11.50)$$

Эти соотношения выполняются для каждой компоненты в отдельности: В, CDM, γ ...

Итог:

$$\Phi(\mathbf{k}) = -\frac{2}{3}\zeta(\mathbf{k}) = -\frac{2}{3}\mathcal{R}(\mathbf{k}) \quad (11.51)$$

$$\delta_{rad}(\mathbf{k}) = \frac{4}{3}\mathcal{R}(\mathbf{k}) \quad (11.52)$$

$$\delta_M(\mathbf{k}) = \mathcal{R}(\mathbf{k}) \quad (11.53)$$

Начальные условия для мод постоянной кривизны

Для мод постоянной кривизны $\zeta_{tot} = \mathcal{R}_{tot} \equiv 0$ по определению.

Для каждой отдельной компоненты λ :

$$\zeta_\lambda = -\Phi + \frac{\delta\rho_\lambda}{3(\rho_\lambda + p_\lambda)} = -\Phi + \frac{\delta_\lambda}{3(1 + w_\lambda)} \quad (11.54)$$

не зависит от времени (см. (11.34)).

Начальные условия для мод постоянной кривизны выражаются через ζ_λ :

$$S_{\lambda,\lambda'} = 3(\zeta_\lambda - \zeta_{\lambda'}) = \frac{\delta_\lambda}{1 + w_\lambda} - \frac{\delta_{\lambda'}}{1 + w_{\lambda'}} \quad (11.55)$$

Обычно $\lambda' = \gamma$; $S_\lambda \equiv S_{\lambda,\gamma}$

$$S_\lambda = \delta_\lambda - \frac{3}{4}\delta_\gamma, \quad \lambda = B, CDM \quad (11.56)$$

Для УР материи (γ)

$$s_\gamma = g_\gamma \frac{4\pi^2}{90} T^3 \quad (11.57)$$

$$n_\gamma = g_\gamma \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \quad (11.58)$$

$$\rho_\gamma = g_\gamma \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad (11.59)$$

$$\frac{\delta s_\gamma}{s_\gamma} = 3 \frac{\delta T}{T} \quad (11.60)$$

$$\frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} = 3 \frac{\delta T}{T} \quad (11.61)$$

$$\frac{\delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma} = 4 \frac{\delta T}{T} \quad (11.62)$$

$$(11.63)$$

$$\frac{\delta s_\gamma}{s_\gamma} = \frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} = \frac{3}{4} \delta_\gamma \quad (11.64)$$

Реальный интерес представляют:

$$\begin{aligned} \frac{\delta(n_\lambda/s_\gamma)}{n_\lambda/s_\gamma} &= \frac{\delta n_\lambda}{n_\lambda} - \frac{\delta s_\gamma}{s_\gamma} = \frac{\delta n_\lambda}{n_\lambda} - \frac{3}{4} \delta_\gamma = \\ &= \backslash \lambda - \text{HP} \backslash = \frac{\delta \rho_\lambda}{\rho_\lambda} - \frac{3}{4} \delta_\gamma = \delta_\lambda - \frac{3}{4} \delta_\gamma = S_\lambda \Rightarrow \end{aligned} \quad (11.65)$$

$$S_\lambda = \frac{\delta(n_\lambda/s)}{n_\lambda/s} - \text{«Энтропийные моды»} \quad (11.66)$$

Гауссовы случайные поля

Распределение Гаусса

$$F(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(q - q_0)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (11.67)$$

q_0 – среднее, σ^2 – дисперсия.

$$\tilde{q} = aq + b \quad (11.68)$$

– снова Гаусс, $\tilde{q}_0 = aq_0 + b$, $\tilde{\sigma} = a\sigma$.

Для определения случайной величины нужен ансамбль событий (систем).

Обобщение на многомерный случай

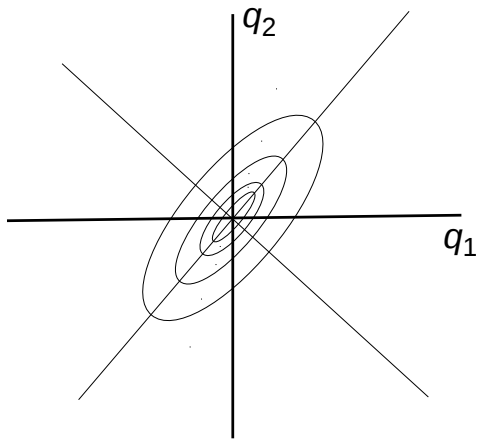
Гауссов набор случайных величин

$$F(q_1, \dots, q_N) = \mathcal{N} \exp \left[-\frac{1}{2} q_m M_{mn} q_n + L_n q_n \right] \quad (11.69)$$

M – положительно определенная симметричная матрица

$$\int F(q) d^n q = 1; \quad \mathcal{N} = (\det M)^{-1/2} (2\pi)^{-N/2} \quad (11.70)$$

$$\langle q_m \rangle = (M^{-1})_{mn} L_n \quad (11.71)$$



Если привести M_{mn} к главным осям, то получится просто произведение одномерных Гауссовых функций

Набор линейных функций от гауссовых случайных величин – тоже набор гауссовых случайных величин.

Рассматриваем случай $L_n = 0 \Rightarrow \langle q_m \rangle = 0$

Теорема Вика

Если q_n – гауссов набор случайных величин, то корреляторы нечетного числа величин равны нулю, а для четного числа величин

$$\langle q_p q_r q_s q_t \rangle = D_{pr} D_{st} + D_{ps} D_{rt} + D_{pt} D_{rs}; \quad \text{и т.д.} \quad (11.72)$$

где $D_{pr} = \langle q_p q_r \rangle$ и т.д. И обратно.

Смысл усреднения – *усреднение по ансамблю*

Случайное поле

Кубическая решетка со стороной L , шаг a .

$\varphi_i = \varphi(\mathbf{x}_i)$ – гауссов набор случайных величин \Rightarrow случайное поле на решетке.

• Гауссово случайное поле: предел $a \rightarrow 0$

Теорема Вика гауссовых для случайных полей

$$\langle \varphi(\mathbf{x}_1) \varphi(\mathbf{x}_2) \varphi(\mathbf{x}_3) \varphi(\mathbf{x}_4) \rangle = D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) D(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) + D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) D(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4) + D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4) D(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \quad (11.73)$$

где

$$D(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \langle \varphi(\mathbf{x}_i) \varphi(\mathbf{x}_j) \rangle \quad (11.74)$$

– двухточечные корреляторы – основной объект изучения теории случайных полей.

Однородное и изотропное случайное поле:

$$D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = D(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \quad (11.75)$$

Переходим к Фурье-образу

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int d^3 \mathbf{k} e^{i \mathbf{k} \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{k}); \quad \varphi^*(-\mathbf{k}) = \varphi(\mathbf{k}) \quad (11.76)$$

$$\varphi(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{x} e^{-i \mathbf{k} \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \quad (11.77)$$

Будучи интегралом случайного поля, Фурье-образ случайного поля сам является случайным полем (в пространстве \mathbf{k}).

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\mathbf{k}) \varphi(\mathbf{k}') \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{y} e^{-i \mathbf{k} \mathbf{x}} e^{-i \mathbf{k}' \mathbf{y}} D(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = \\ &= \langle \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{z} \rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{z} e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \mathbf{x}} e^{i \mathbf{k}' \mathbf{z}} D(|\mathbf{z}|) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \int d^3 \mathbf{z} e^{i \mathbf{k}' \mathbf{z}} D(|\mathbf{z}|) = \frac{P(k)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \end{aligned} \quad (11.78)$$

так как $P(\mathbf{k})$ зависит от $|\mathbf{k}|$, четна, действительна.

$$\langle \varphi(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{k}') \rangle = \frac{P(k)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (11.79)$$

$$P(k) = \int d^3\mathbf{z} e^{i\mathbf{kz}} D(|\mathbf{z}|) \quad (11.80)$$

$P(k)$ – неотрицательна:

$$\varphi[f] = \int f(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{k})d^3\mathbf{k}, \quad f^*(\mathbf{k}) = f(-\mathbf{k}) \quad (11.81)$$

Очевидно: $\langle \varphi^2[f] \rangle \geq 0$ (усреднение по ансамблю $\phi!$).

$$\begin{aligned} \langle \varphi^2[f] \rangle &= \left\langle \int f(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{k})d^3\mathbf{k} \cdot \int f(\mathbf{k}')\varphi(\mathbf{k}')d^3\mathbf{k}' \right\rangle = \\ &= \text{\ (11.79)\ } = \int d^3\mathbf{k} |f(\mathbf{k})|^2 \frac{P(k)}{(2\pi)^3} \geq 0 \Rightarrow P(k) \geq 0. \end{aligned} \quad (11.82)$$

$P(k)$ – спектр мощности случайного поля.

$$\mathcal{P}(k) = \frac{k^3 P(k)}{2\pi^2} \quad (11.83)$$

– тоже называется спектром мощности. Смысл:

$$\begin{aligned} \langle \varphi^2(\mathbf{x}) \rangle &= \int d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}' e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}} \langle \varphi(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{k}') \rangle = \\ &= 4\pi \int_0^\infty dk k^2 \frac{P(k)}{(2\pi)^3} = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}(k) = \int_0^\infty d(\ln k) \mathcal{P}(k) \end{aligned} \quad (11.84)$$

Важно: Согласно (11.79) $P(k)$ определяется усреднением по ансамблю, но согласно (11.80) $P(k)$ может быть приблизительно оценено усреднением по реализации, если гауссово случайное поле однородное и изотропное \Rightarrow байесовская вероятность.

Первичные адиабатические скалярные моды и наблюдения

- Наблюдения говорят о том, что в начальных возмущениях доминируют адиабатические скалярные моды.
- Тензорные моды и скалярные моды постоянной кривизны не обнаружены, есть только ограничения сверху.

Адиабатические скалярные моды самые существенные – *стандартная космологическая модель* (СКМ) включает пока только их.

Начальные данные для адиабатической скалярной моды – константные моды за горизонтом – характеризуются функцией $\mathcal{R}(\mathbf{k})$ ($\zeta(\mathbf{k})$), через которую вычисляются относительные флуктуации плотности и возмущения гравитационного потенциала, (11.51)–(11.53).

$\mathcal{R}(\mathbf{k})$ – в СКМ однородное и изотропное случайное гауссово поле.

Однозначно описывается двухточечным коррелятором:

$$\langle \mathcal{R}(\mathbf{k})\mathcal{R}(\mathbf{k}') \rangle = \frac{P_{\mathcal{R}}(k)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (11.85)$$

Задача наблюдений – найти одну скалярную функцию $P_{\mathcal{R}}(k)$ – спектр мощности константной моды адиабатических скалярных возмущений.

Смысл усреднения $\langle \mathcal{R}(\mathbf{k})\mathcal{R}(\mathbf{k}') \rangle$ – усреднение по ансамблю вселенных.

Оценка $P_{\mathcal{R}}(k)$ через двухточечный коррелятор:

$$P_{\mathcal{R}}(k) = \int d^3\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} D(|\mathbf{x}|) \quad (11.86)$$

Так как мы имеем дело только с конечным фрагментом Вселенной внутри горизонта, то оценка дает лишь конечную точность, в предположении однородности и изотропии.

Остаточная неопределенность – *космическая неопределенность*, cosmic variance

Если некоторая теория предсказывает определенную $P_{\mathcal{R}}(k)$, то предсказание это невозможно будет проверить с любой наперед заданной точностью. Точность измерений здесь ни при чем. См. картинку.

Вместо $P_{\mathcal{R}}(k)$ обычно используют

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} P_{\mathcal{R}}(k) \Rightarrow \quad (11.87)$$

$$\langle \mathcal{R}^2(\mathbf{x}) \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \int_0^\infty d(\ln k) \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \quad (11.88)$$

Иногда используется обозначение: $\Delta_{\mathcal{R}}^2(k) = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$

Простейшее предположение – плоский спектр:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \text{const} \quad (11.89)$$

– *спектр Гаррисона-Зельдовича*.

Как реальный спектр мощности отличается от спектра Гаррисона-Зельдовича?

Наблюдения показывают, что начальный спектр флуктуаций близок к плоскому.

Степенная параметризация (s – scalar):

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = A_s \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s - 1} \quad (11.90)$$

$$\frac{k_*}{a_0} = \frac{1}{500 \text{ Мпк}} = 0.002 \text{ Мпк}^{-1} \quad (11.91)$$

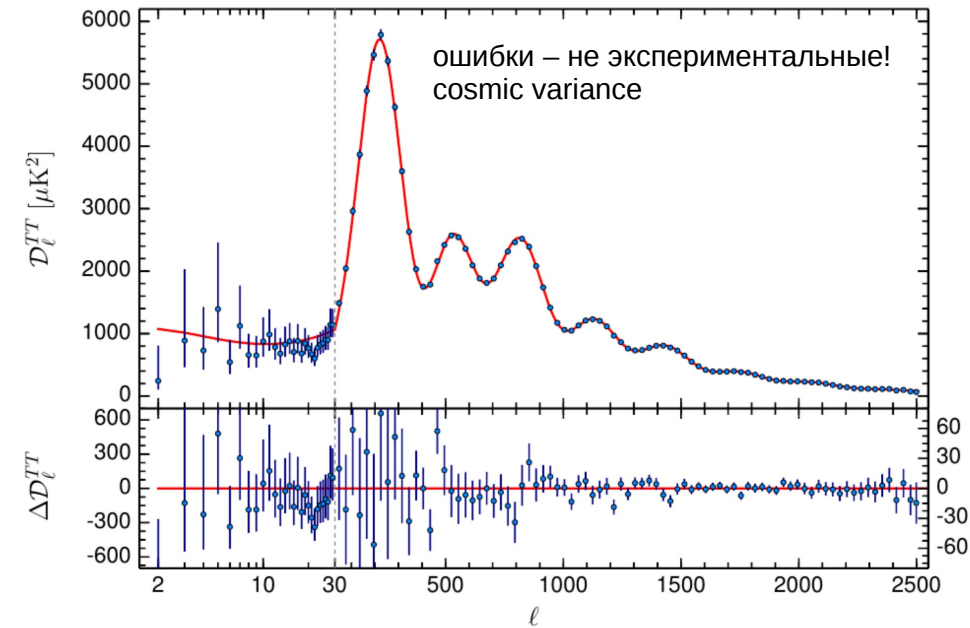
Современные значения:

$$n_s = 0.9667 \pm 0.0040 \quad (11.92)$$

$$A_{\mathcal{R}} = 2.441_{-0.092}^{+0.088} \times 10^{-9} \quad (11.93)$$

Относительная амплитуда возмущений

$$\Delta_{\mathcal{R}} = \sqrt{A_{\mathcal{R}}} \approx 4.5 \cdot 10^{-5} \quad (11.94)$$



6 параметров СКМ

Физическая плотность барионов	$\Omega_B h^2$	0.02230 ± 0.00014
Физическая плотность темной материи	$\Omega_{CDM} h^2$	0.1188 ± 0.00010
Возраст	t_0	$(13.799 \pm 0.021) \cdot 10^9 \text{ лет}$
Скалярный спектральный индекс	n_s	0.9667 ± 0.0040
Амплитуда флуктуаций кривизны	$A_{\mathcal{R}}, \Delta_{\mathcal{R}}^2$	$2.441_{-0.092}^{+0.088} \times 10^{-9}$
Оптическая толщина реионизации	τ	0.066 ± 0.012
Приведенная постоянная Хаббла*	h	0.6774 ± 0.0046

*Постоянная Хаббла не входит в число 6 параметров!

Первичные моды постоянной кривизны и наблюдения

Аналогично адиабатическим модам:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}(k) \text{ и } \mathcal{P}_{\mathcal{S}_B}(k)$$

Дополнительно, могут быть корреляции с адиабатической модой, которые задаются параметром

$$\beta = \frac{\mathcal{P}_{\mathcal{RS}}}{\sqrt{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}\mathcal{P}_{\mathcal{S}}}}, \quad \langle \mathcal{R}(\mathbf{x})\mathcal{S}(\mathbf{x}) \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\mathcal{RS}}(k) \quad (11.95)$$

Оценки для $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}(k)$ и $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_B}(k)$ зависят от предположений о β :

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}(k)}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} < 0.07, \quad \beta = 0 \quad (11.96)$$

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}(k)}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} < 0.004, \quad \beta = 1 \quad (11.97)$$

Моды постоянной кривизны малы.

В СКМ $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{CDM}}(k) = \mathcal{P}_{\mathcal{S}_B}(k) = 0$.

Первичные тензорные моды и наблюдения

Тензорные моды до сих пор (ноябрь 2019) не обнаружены, поэтому можно только предполагать, что они образуют гауссовы случайные поля, причем одинаковые, но независимые для разных компонент поляризации:

$$\langle h_{(i)}^{(A)}(\mathbf{k})h_{(i)}^{(B)}(\mathbf{k}') \rangle = \frac{1}{2}\delta_{AB} \frac{P_T(k)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (11.98)$$

Предполагается спектр, близкий к плоскому:

$$\mathcal{P}_T = A_T \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_T-1}, \quad n_T \approx 1 \quad (11.99)$$

$$\sum_A \langle [h_i^{(A)}(\mathbf{x})]^2 \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_T(\mathbf{k}) \quad (11.100)$$

Отношение тензорных и скалярных мод (PLANCK-2015)

$$r = \frac{A_T}{A_{\mathcal{R}}} < 0.067, \quad 95\% \quad (11.101)$$

Очень важная величина, так как позволяет различать разные модели инфляции.

В СКМ $r = 0$.

Лекция 12

Динамика CDM и барион-фотонной среды до рекомбинации.
Анизотропия реликтового излучения.

Динамика CDM и барион-фотонной среды до рекомбинации.

Важна в двух отношениях:

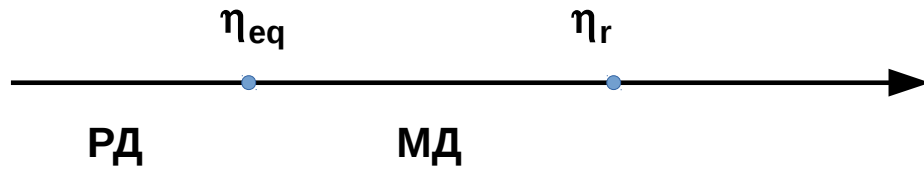
- Определяет структуру анизотропии реликтового микроволнового фона
- Формирует начальные условия для последующего формирования структур – галактик и т.д.

Вплоть до рекомбинации барион-фотонная компонента среды $B\gamma$ остается релятивистской, в том смысле, что

$$\frac{\rho_B}{\rho_\gamma}(\eta_r) \cong 0.85 \quad (12.1)$$

$$\frac{\rho_B}{\rho_\gamma}(\eta_{eq}) \cong 0.30 \quad (12.2)$$

$B\gamma$ рассматривается как единая среда.



Длинноволновые адиабатические моды CDM

- Входят под горизонт между η_{eq} и η_r (или позже)
- Современная длина волн больше $2\pi a_0 \eta_{eq} = 750$ Мпк (см. (8.120)).
- Нерелятивистская CDM доминирует, работает однокомпонентная модель, осцилляций в компоненте CDM нет,
- возмущения CDM растут как масштабный фактор, но никогда не входят в нелинейный режим ($\delta < 0.03$,

см. (10.158))

Адиабатические моды, входящие под горизонт на РД-стадии

Уже известно: Релятивистская компонента на РД-стадии осциллирует с фиксированной фазой (10.120)

$$\Phi(\eta) = -3\Phi_{(i)} \frac{1}{(u_s k \eta)^2} \left[\cos(u_s k \eta) - \frac{\sin(u_s k \eta)}{u_s k \eta} \right] \quad (12.3)$$

$$\Phi_{(i)} = -\frac{2}{3}\zeta = -\frac{2}{3}\mathcal{R} \quad (12.4)$$

Осцилляции $B\gamma$ продолжаются до рекомбинации.

- Существенно новое явление: Потенциал главной УР осциллирующей компоненты $\Phi(\eta)$ индуцирует возмущения темной материи, которые уже на РД-стадии логарифмически растут во времени.
- Релятивистская $B\gamma$ -материя осциллирует до самой рекомбинации, и остаточных возмущений $\sqrt{R} \sim 5 \cdot 10^{-5}$ не хватило бы для перехода в нелинейный режим и формирования структур.
- После рекомбинации барионная материя сваливается в потенциальные ямы, сформированные CDM еще до рекомбинации, и только благодаря этому возникают структуры.
- Изучаем возмущения CDM, индуцированные потенциалом (10.120) (или (12.3))

Возмущения темной материи на РД-стадии

Потенциалы считаем заданными уравнениями (10.120) (или (12.3)).

Покомпонентные уравнения ковариантного сохранения ЭИ (11.20), (11.21):

$$\delta'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(u_{s,\lambda}^2 - w_\lambda)\delta_\lambda - (1+w_\lambda)k^2 v_\lambda = 3(1+w_\lambda)\Phi' \quad (12.5)$$

$$[(1+w_\lambda)v_\lambda]' + \frac{a'}{a}(1-3w_\lambda)(1+w_\lambda)v_\lambda + u_{s,\lambda}^2\delta_\lambda = -(1+w_\lambda)\Phi \quad (12.6)$$

$$\lambda = CDM \Rightarrow w_\lambda = u_{s,\lambda}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\delta'_{CDM} - k^2 v_{CDM} = 3\Phi' \quad (12.7)$$

$$v'_{CDM} + \frac{1}{\eta}v_{CDM} = -\Phi \quad (12.8)$$

Из (12.8), методом вариации постоянных:

$$v_{CDM}(\eta) = -\frac{1}{\eta} \int_{\eta_0}^{\eta} \eta\Phi(\eta) d\eta \quad (12.9)$$

η_0 – неопределенная постоянная.

Решение расходится в нуле при всех $\eta_0 \neq 0 \Rightarrow \eta_0 = 0$.

Следовательно конечное решение есть

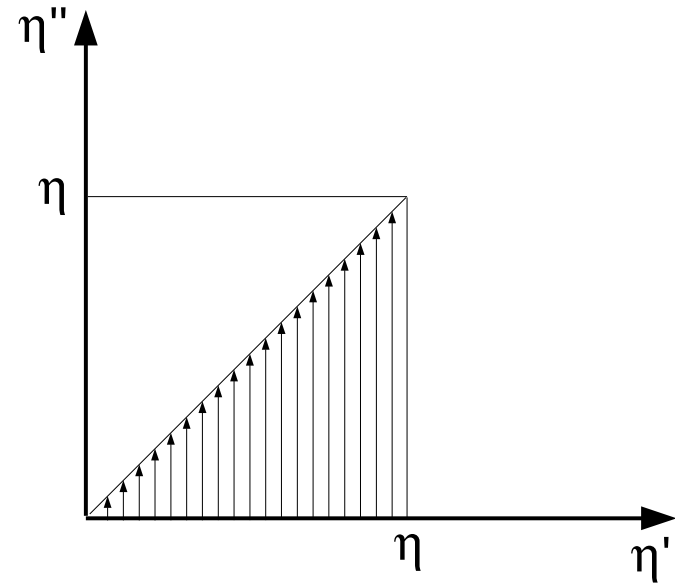
$$v_{CDM}(\eta) = -\frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} \eta\Phi(\eta) d\eta \quad (12.10)$$

Из (12.7) сразу получается:

$$\delta_{CDM}(\eta) = 3\Phi(\eta) + C - k^2 \int_0^{\eta} \frac{d\eta'}{\eta'} \int_0^{\eta'} \eta''\Phi(\eta'')d\eta'' \quad (12.11)$$

$$\eta = 0 \Rightarrow C = -3\Phi_{(i)} + \delta_{CDM(i)} \Rightarrow \quad (12.12)$$

$$\begin{aligned} \delta_{CDM}(\eta) &= \\ &= \delta_{CDM(i)} + 3[\Phi(\eta) - \Phi_{(i)}] - k^2 \int_0^{\eta} \frac{d\eta'}{\eta'} \int_0^{\eta'} \eta''\Phi(\eta'')d\eta'' \end{aligned} \quad (12.13)$$



$$\begin{aligned} \int_0^{\eta} d\eta' \int_0^{\eta'} d\eta'' \frac{\eta''}{\eta'} \Phi(\eta'') &= \int_0^{\eta} d\eta'' \int_{\eta''}^{\eta} d\eta' \frac{\eta''}{\eta'} \Phi(\eta'') = \\ \int_0^{\eta} d\eta'' \eta'' \Phi(\eta'') \int_{\eta''}^{\eta} \frac{d\eta'}{\eta'} &= \int_0^{\eta} d\eta'' \eta'' \Phi(\eta'') \ln \left(\frac{\eta}{\eta''} \right) \Rightarrow \end{aligned} \quad (12.14)$$

$$\begin{aligned} \delta_{CDM}(\eta) &= \\ &= \delta_{CDM(i)} + 3[\Phi(\eta) - \Phi_{(i)}] - k^2 \int_0^\eta d\eta'' \eta'' \Phi(\eta'') \ln \left(\frac{\eta}{\eta''} \right) \end{aligned} \quad (12.15)$$

Интеграл сходится и считается, для мод глубоко под акустическим горизонтом ($u_s k \eta \gg 1$) получается ★:

$$\delta_{CDM}(\eta) = \delta_{CDM(i)} - 9\Phi_{(i)} \left[\ln(u_s k \eta) + \mathbf{C} - \frac{2}{3} \right] \quad (12.16)$$

$\mathbf{C} = 0.577\dots$ – постоянная Эйлера.

Из (11.51), (11.53) следует $\delta_{CDM(i)} = -\frac{3}{2}\Phi_{(i)} \Rightarrow$

$$\delta_{CDM}(\eta) = -9\Phi_{(i)} \left[\ln \left(\frac{k\eta}{\sqrt{3}} \right) + \mathbf{C} - \frac{1}{2} \right] \quad (12.17)$$

Есть логарифмический рост возмущения плотности CDM , скорость которого определяется амплитудами потенциалов $9\Phi_{(i)}$

Важны потенциалы CDM , в которые потом сваливается обычное вещество:

Из (11.12) (00 компонента Лин. Ур. Э.)

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi G a^2 \delta\rho_{CDM} \quad (12.18)$$

В пределе $u_s k \eta \gg 1$ остается только член $k^2\Phi \Rightarrow$

$$\Phi_{CDM}(\eta) = -4\pi G \frac{a^2(\eta)}{k^2} \rho_{CDM}(\eta) \delta_{CDM} \quad (12.19)$$

– падает немного медленнее, чем $1/a(\eta)$.

На РД-стадии $\Phi_{CDM}(\eta)$ мал по сравнению с релятивистским $\Phi(\eta)$ из-за малости ρ_{CDM} по сравнению с ρ_{tot} .

Но вклад CDM становится главным при переходе на МД-стадию.

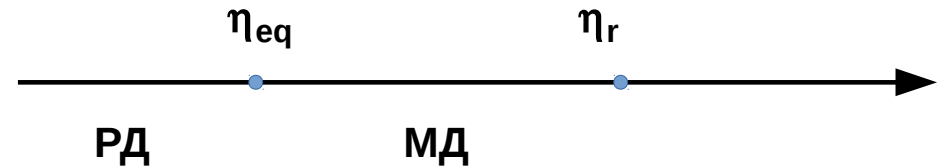
Уже на РД-стадии есть логарифмический рост возмущения плотности CDM

$$\delta_{CDM}(\eta) = -9\Phi_{(i)} \left[\ln \left(\frac{k\eta}{\sqrt{3}} \right) + \mathbf{C} - \frac{1}{2} \right] \quad (12.20)$$

Потенциал CDM падает немного медленнее, чем $1/a(\eta)$:

$$\Phi_{CDM}(\eta) = -4\pi G \frac{a^2(\eta)}{k^2} \rho_{CDM}(\eta) \delta_{CDM} \quad (12.21)$$

Возмущения темной материи на МД-стадии



Так как CDM является доминирующей компонентой на МД-стадии после η_{eq} , то заранее ясно, что нужно ожидать роста δ_{CDM} пропорционально $a(\eta)$ на фоне постоянных потенциалов $\Phi_{CDM}(\eta)$, как это предсказывает упрощенная однокомпонентная модель адиабатических возмущений, см. (10.136) и (10.153).

Наивная оценка:

$$\begin{aligned}\delta_{CDM}(\eta) &= \delta_{CDM}(\eta_{eq}) \frac{a(\eta)}{a_{eq}} = \\ &= -9\Phi_{(i)} \frac{a(\eta)}{a_{eq}} \left[\ln \left(\frac{k\eta_{eq}}{\sqrt{3}} \right) + \mathbf{C} - \frac{1}{2} \right] \approx \\ &\approx -9\Phi_{(i)} \frac{a(\eta)}{a_{eq}} \ln(0.6k\eta_{eq}) \quad (12.22)\end{aligned}$$

Более точная оценка [Горбунов, Рубаков, Т.2, 6.2.1]:

$$\delta_{CDM}(\eta) \approx -\frac{27}{2} \frac{a(\eta)}{a_{eq}} \Phi_{(i)} \ln(0.2k\eta_{eq}) \quad (12.23)$$

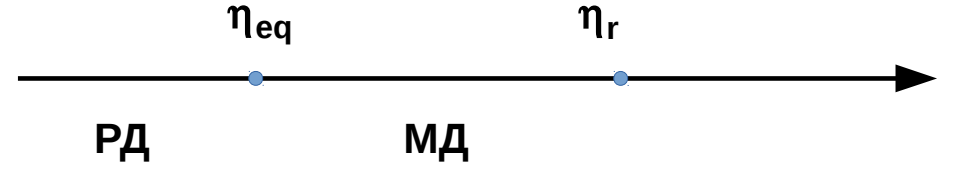
Решения не совсем сшиваются – есть переходная область в районе η_{eq} («ступенька», фактор 3/2).

Из (12.21):

$$\begin{aligned}\Phi_{CDM}(\eta) &= \frac{27}{2} \Phi_{(i)} 4\pi G \rho_{CDM} \frac{a^2}{k^2} \frac{a}{a_{eq}} \ln(0.2k\eta_{eq}) = \\ &= \left\langle \rho_{CDM} = \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 \rho_{CDM}^0 = \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 \Omega_{CDM} \frac{3}{8\pi G} H_0^2 \right\rangle = \\ &= \frac{81}{4} \Phi_{(i)} \frac{a_0^2}{k^2} \Omega_{CDM} H_0^2 (1 + z_{eq}) \ln(0.2k\eta_{eq}) \quad (12.24)\end{aligned}$$

– не зависит от времени.

Возмущения барион-фотонной компоненты $B\gamma$ на МД-стадии до рекомбинации



• Продолжаются осцилляции, но на фоне растущего возмущения CDM-компоненты.

• Единство $B\gamma$ (приближение тесной связи):

$$v_\gamma \approx v_B \equiv v_{B\gamma} \quad (12.25)$$

• Для адиабатической моды:

$$\delta_B = 3 \frac{\delta T}{T}, \quad \delta_\gamma = 4 \frac{\delta T}{T} \Rightarrow \delta_B = \frac{3}{4} \delta_\gamma \quad (12.26)$$

• Из-за того, что барионы нерелятивистские, переноса энергии от фотонов к барионам нет, поэтому ковариантное сохранение для барионов и фотонов выполняется отдельно.

• $B\gamma$ – субдоминантная компонента (CDM – доминантная).

С использованием потенциала (12.24) (или какого-то похожего, более точного), уравнений ковариантного сохранения и Эйнштейна для возмущений, ищется δ_γ .

Можно считать численно, можно приближенно аналитически (метод типа ВКБ).

Результат (ВКБ): [Горбунов, Рубаков, Т.2, 6.2.2]

$$R_B \equiv \frac{3\rho_B(\eta)}{4\rho_\gamma(\eta)} \propto a(\eta) \propto \eta^2 \quad (12.27)$$

$$R_B(\eta_{eq}) \approx 0.2; \quad R_B(\eta_r) \approx 0.6 \quad (12.28)$$

$$u_s^2(\eta) = \frac{\delta p}{\delta \rho} = \frac{\delta \rho_\gamma / 3}{\delta \rho_\gamma + \delta \rho_B} = \frac{1}{3[1 + R_B(\eta)]} \quad (12.29)$$

$u_s \neq 1/\sqrt{3}$, но меняется не очень сильно.

$$\begin{aligned} \delta_\gamma(\eta) = \Phi_i \times \\ \times \left[-324 \cdot (1 + R_B) I(\Omega_M)^2 \frac{\Omega_{CDM}}{\Omega_M} (1 + z_{eq}) \frac{\ln(0.2k\eta_{eq})}{(k\eta_0)^2} + \right. \\ \left. + \frac{6}{(1 + R_B)^{1/4}} \cos \left(k \int_0^\eta u_s(\eta') d\eta' \right) \right] \quad (12.30) \end{aligned}$$

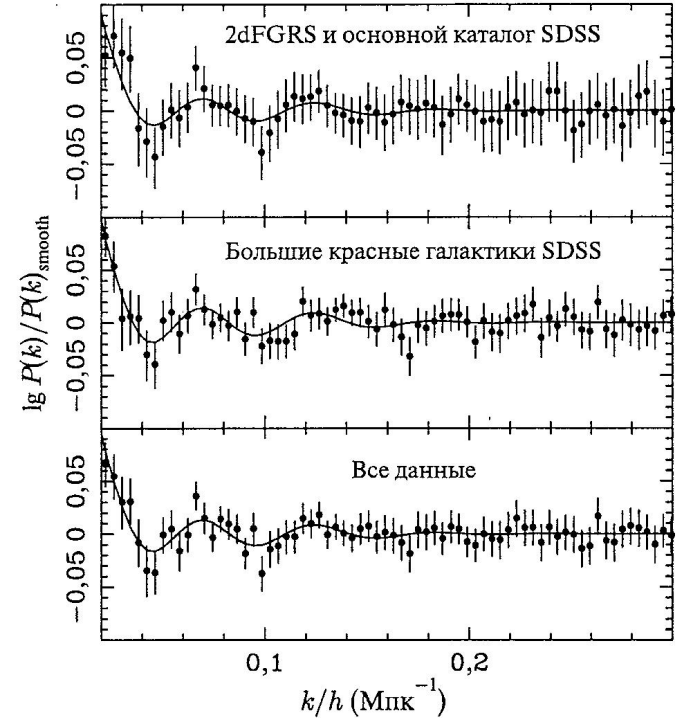
где (см. (8.109))

$$I(\Omega_M) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+z)^3 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} (1+z)^4}} \approx 0.89 \quad (12.31)$$

Осцилляции $B\gamma$ -материи до момента рекомбинации влияют на

- анизотропию микроволнового фона
- распределение барионной материи – *барионные осцилляции*

Корреляционная функция распределения материи (галактики)



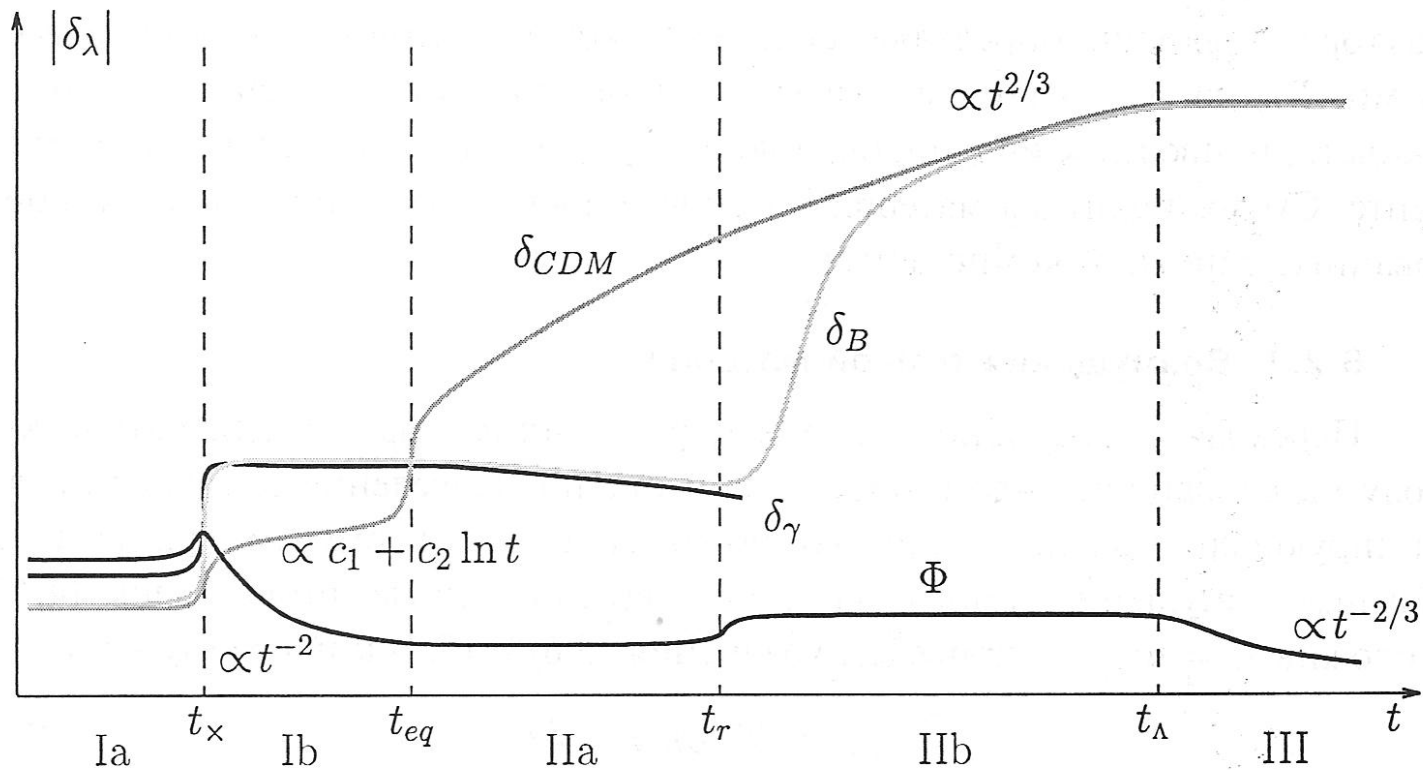


Рис. 6.1. Схематическое изображение эволюции линейных скалярных возмущений в адиабатической моде с фиксированным конформным импульсом k , входящих под горизонт на РД-стадии. Осцилляции не изображены. t_x — момент входа под горизонт. Поведение вблизи характерных времен ($t_x, t_{eq}, t_r, t_\Lambda$) показано условно. Масштаб по осям не соблюден. I — РД-стадия, доминируют возмущения релятивистской компоненты (раздел 4.2); Ia — до входа под горизонт моды не эволюционируют, их значения удовлетворяют соотношениям (5.22); Ib — вблизи входа под горизонт возмущение релятивистского вещества индуцирует логарифмически растущее возмущение CDM, формула (6.11); II — МД-стадия, доминируют возмущения CDM (раздел 4.3) с начальными данными для этой стадии, соответствующими формуле (6.11); IIa — возмущения барион-фотонной компоненты — звуковые волны — осциллируют согласно (6.36), кроме того, CDM-возмущения индуцируют возмущения барион-фотонной компоненты, формула (6.35); IIb — барионы отщеплены, их возмущения догоняют возмущения CDM, формулы (7.19), (7.18); III — ΛД-стадия, рост возмущений прекращается (раздел 4.4)

Анизотропия температуры реликтового излучения

Средняя температура реликтового микроволнового фона (СМВ, Cosmic Microwave Background)

$$T_0 = 2.725 \pm 0.001 \text{ К}$$

Есть два типа анизотропии:

- Диполь $\delta T/T \sim 10^{-3}$ – эффект Доплера соответствующий движению со скоростью $v = 369 \pm 2$ км/сек относительно сопутствующей системы в направлении созвездия Гидры. Часть амплитуды может иметь космологическое происхождение, но много меньше наблюдаемого значения.
- Более высокие мультиполи космологического происхождения $\delta T/T \sim 5 \times 10^{-5}$ – основа количественной космологии (но не единственная, что важно).

Дипольная компонента $l = 1$ вычитается.

Анизотропия температуры:

$$\delta T_0(\mathbf{n}) = T(\mathbf{n}) - T_0 \quad (12.32)$$

$$\frac{\delta T_0(\mathbf{n})}{T_0} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (12.33)$$

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \sin^{|m|} \theta \frac{d^{|m|} P_l(\cos \theta)}{(d \cos \theta)^{|m|}} e^{im\varphi} \quad (12.34)$$

$$a_{l,m}^* = (-1)^m a_{l,-m} \quad (\text{вещественность}) \quad (12.35)$$

$$a_{lm} = \int d\mathbf{n} \frac{\delta T_0(\mathbf{n})}{T_0} Y_{lm}^*(\mathbf{n}) \quad (12.36)$$

Y_{lm} – неоднородности масштаба π/l

- Коэффициенты a_{lm} линейно определяются через начальные возмущения \mathcal{R} и др. \Rightarrow
- Если начальные возмущения – гауссовы случайные поля, то и a_{lm} – набор гауссовых случайных величин.
- Если Вселенная совершенно изотропна и флуктуации случайны, то a_{lm} не должны коррелировать при различных l, m
- Рассматриваем ансамбль вселенных, таких как наша (!)
- Тогда, усредняя по ансамблю

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = C_l \cdot \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (12.37)$$

- Имея одну вселенную измерить C_l невозможно.
- Но для больших l есть много гармоник $m = -l, \dots, +l$, поэтому можно найти среднее C_l по набору, и можно даже проверить гауссов характер флуктуаций.

$$\langle C_l \rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} |a_{lm}|^2 \quad (12.38)$$

Несмотря на то, что ансамбль вселенных нам недоступен, каую-то оценку C_l получить можно.

Коэффициенты a_{lm} зависят от ориентации системы координат, в которой они вычисляются.

• Корректны ли определения (12.37) и (12.38)?

Величины C_l – не зависят от системы координат:

$$\Theta_0(\mathbf{n}) \equiv \frac{\delta T_0(\mathbf{n})}{T_0} \quad (12.39)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-l}^{+l} |a_{lm}|^2 = \\ &= \sum_{m=-l}^{+l} \int d\mathbf{n}_1 \Theta_0(\mathbf{n}_1) Y_{lm}(\mathbf{n}_1) \int d\mathbf{n}_2 \Theta_0(\mathbf{n}_2) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_2) = \\ &= \int d\mathbf{n}_1 d\mathbf{n}_2 \Theta_0(\mathbf{n}_1) \Theta_0(\mathbf{n}_2) \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\mathbf{n}_1) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_2) = \\ &= \left\langle \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\mathbf{n}_1) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_2) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \right\rangle = \\ &= \frac{2l+1}{4\pi} \int d\mathbf{n}_1 d\mathbf{n}_2 \Theta_0(\mathbf{n}_1) \Theta_0(\mathbf{n}_2) P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \quad (12.40) \end{aligned}$$

$$C_l = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{n}_1 d\mathbf{n}_2 \Theta_0(\mathbf{n}_1) \Theta_0(\mathbf{n}_2) P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \quad (12.41)$$

Точного значения C_l , какое дало бы усреднение по ансамблю, не получим!

Какова ошибка (стандартное отклонение) $\delta C_l = ?$

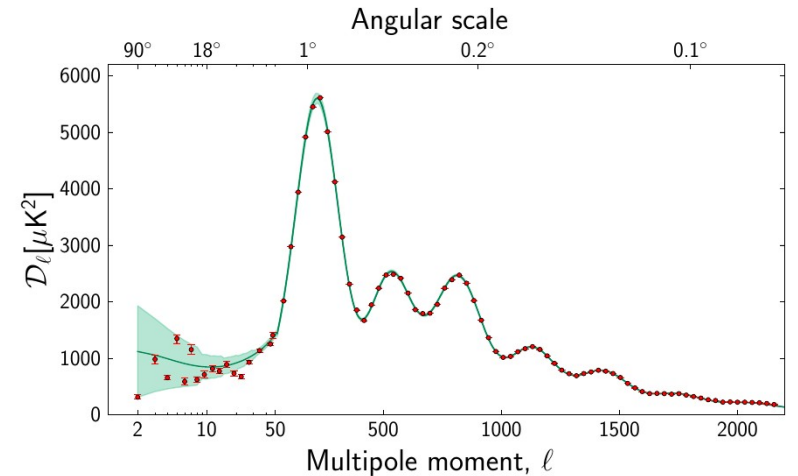
$$\begin{aligned} \sigma^2 C_l &= \frac{1}{(2l+1)^2} \sigma^2 \left(\sum_{m=-l}^{+l} |a_{lm}|^2 \right) = \\ &= \frac{1}{(2l+1)^2} \sigma^2 (\chi_{2l+1}^2) \langle |a_{lm}| \rangle^2 = \\ &= \frac{1}{(2l+1)^2} 2(2l+1) C_l^2 = \frac{2C_l^2}{2l+1} \Rightarrow \quad (12.42) \end{aligned}$$

$$\delta C_l \equiv \sqrt{\sigma^2 C_l} = \frac{C_l}{\sqrt{l + \frac{1}{2}}} \quad (12.43)$$

δC_l – космическая неопределенность, cosmic variance.

• Предсказания величины коэффициентов C_l не могут быть проверены с точностью, выше $\delta C_L \Rightarrow$

• Космологические параметры не могут быть определены со сколь угодно высокой точностью



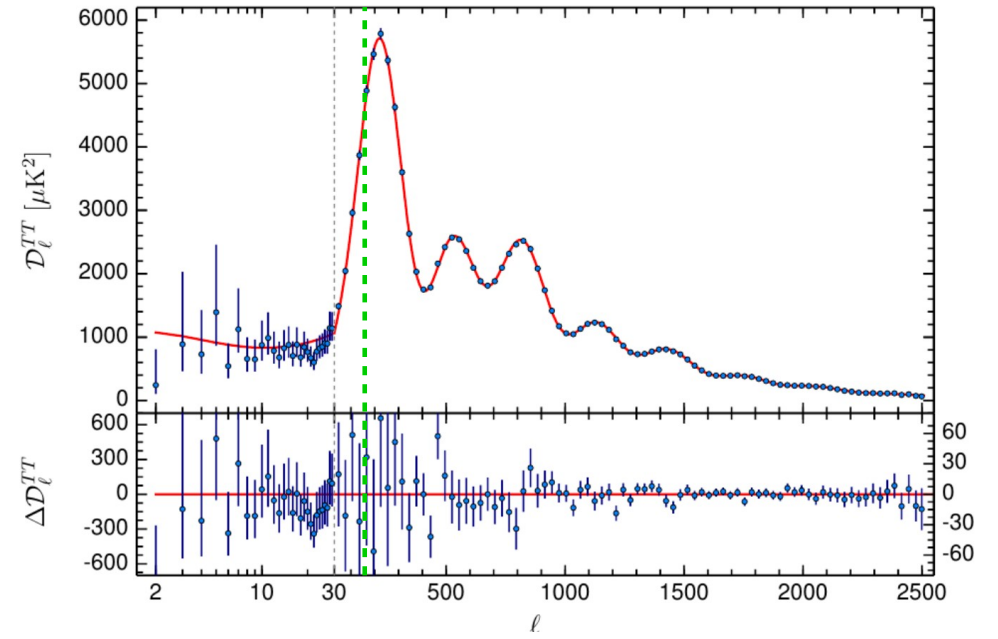
Выразим $\langle \delta T^2 \rangle$ через коэффициенты C_l .

Двухточечная корреляционная функция (усреднение по ансамблю вселенных):

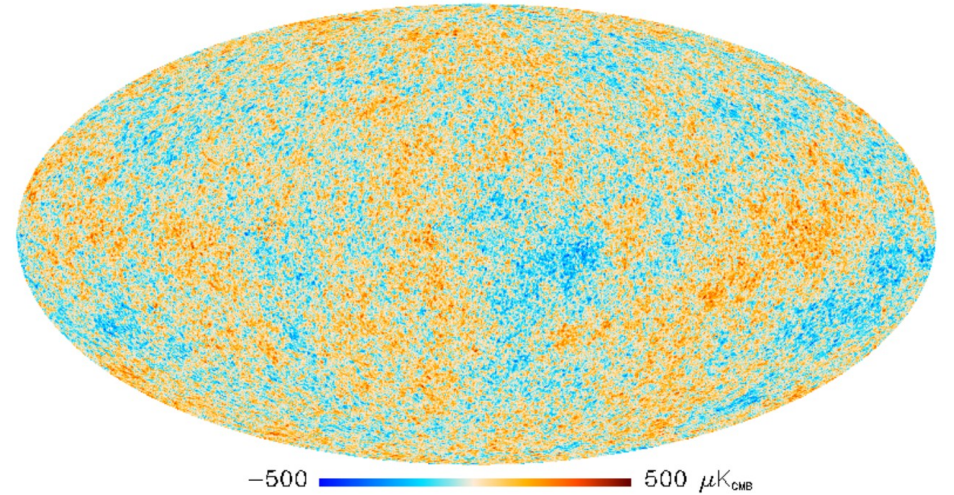
$$\begin{aligned}
 \langle \delta T_0(\mathbf{n}_1) \delta T_0(\mathbf{n}_2) \rangle &= \langle \delta T_0(\mathbf{n}_1) \delta T_0^*(\mathbf{n}_2) \rangle = \\
 &= T_0^2 \left\langle \sum_{l_1=2}^{\infty} \sum_{m_1=-l_1}^{+l_1} a_{l_1 m_1} Y_{l_1 m_1}(\mathbf{n}_1) \sum_{l_2=2}^{\infty} \sum_{m_2=-l_2}^{+l_2} a_{l_2 m_2}^* Y_{l_2 m_2}^*(\mathbf{n}_2) \right\rangle = \\
 &= T_0^2 \sum_{l_1=2}^{\infty} \sum_{m_1=-l_1}^{+l_1} \sum_{l_2=2}^{\infty} \sum_{m_2=-l_2}^{+l_2} \langle a_{l_1 m_1} a_{l_2 m_2}^* \rangle Y_{l_1 m_1}(\mathbf{n}_1) Y_{l_2 m_2}^*(\mathbf{n}_2) = \\
 &= \langle a_{l_1 m_1} a_{l_2 m_2}^* \rangle = C_l \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2} \langle a_{l m} a_{l m}^* \rangle = \\
 &= T_0^2 \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} C_l Y_{lm}(\mathbf{n}_1) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_2) = \\
 &= \left\langle \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\mathbf{n}_1) Y_{lm}^*(\mathbf{n}_2) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \right\rangle = \\
 &= T_0^2 \sum_{l=2}^{\infty} C_l \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \quad (12.44)
 \end{aligned}$$

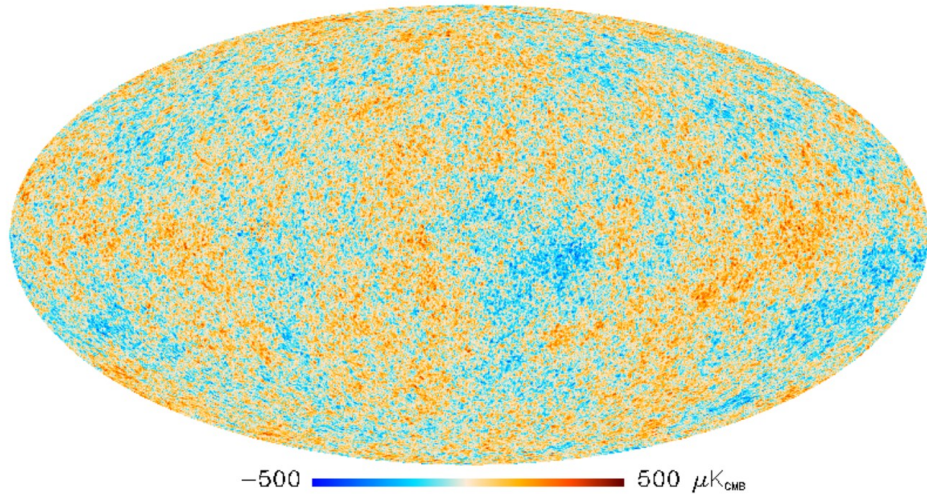
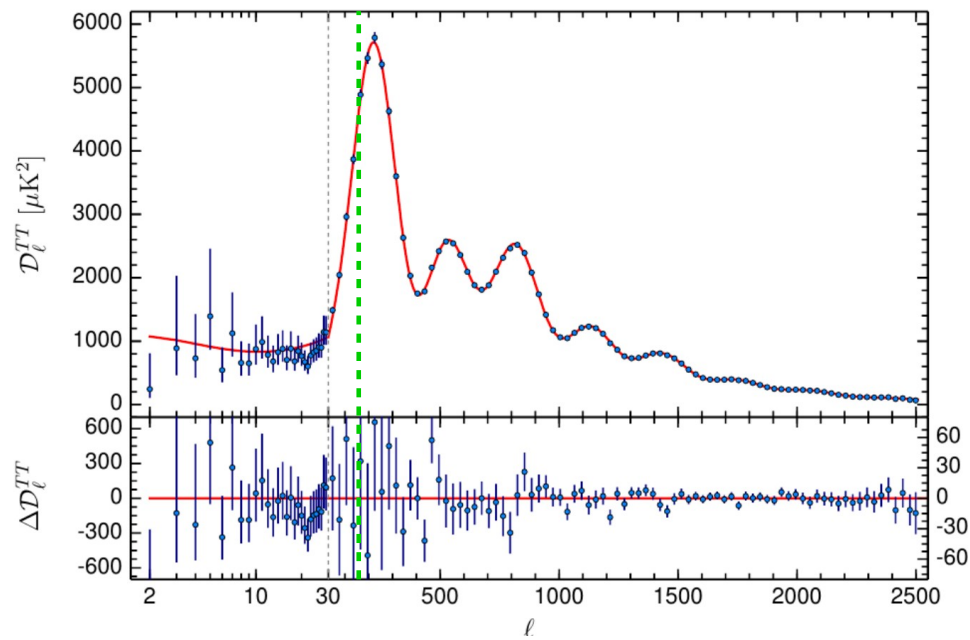
$$\begin{aligned}
 \langle \delta T_0^2(\mathbf{n}) \rangle &= \langle P_l(1) = 1 \rangle = \\
 &= T_0^2 \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l \approx \langle \text{большие } l \rangle \approx \\
 &\approx T_0^2 \int_0^{\infty} \frac{l+1/2}{2\pi} C_l l \frac{1}{l} dl \cong \int_0^{\infty} T_0^2 \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l d(\ln l) \quad (12.45)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{D}_l \equiv T_0^2 \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l} \quad (12.46)$$



$$\mathcal{D}_l^{TT} \equiv \mathcal{D}_l$$





Структура углового спектра анизотропии температуры СМВ – качественно

- Адиабатические моды, вошедшие под горизонт после рекомбинации никогда не осциллировали и на момент рекомбинации пребывали в константной моде

⇒

На масштабах больше горизонта событий на момент рекомбинации ожидается спектр флуктуаций, близкий плоскому спектру Гаррисона-Зельдовича.

- Моды, вошедшие под горизонт до рекомбинации, осциллировали с фиксированной начальной фазой, причем частота пропорциональна k

⇒

к поверхности последнего рассеяния придут с разными фазами и будет картина осцилляций в зависимости от l

- Граница между режимами:

Видимый размер горизонта рекомбинации 1.1° (стандартная линейка)

⇒

$l \approx 160 \pm$ некоторая переходная область.

- При больших k имеет место затухание осцилляций

⇒

Должны быть механизмы затухания, и они есть (см. далее).

Механизмы генерации анизотропии температуры СМВ

Поверхность последнего рассеяния имеет конечную толщину (продолжительность), но считаем ее равной нулю –

приближение мгновенного отщепления фотонов.

• Вопрос: Как влияют возмущения метрики на частоту фотонов при распространении от места излучения до места приема?

• Решим уравнения движения для фотонов и проследим за 0-компонентой импульса, которая связана с частотой.

Плоская метрика с возмущениями

$$ds^2 = a^2 \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (12.47)$$

По причине конформной инвариантности ЭМ поля (см. (4.23) и далее) геодезические фотонов можно вычислять в конформноплоской метрике с возмущениями $\gamma_{\mu\nu}$.

Уравнение геодезической в конформной метрике $\gamma_{\mu\nu}$:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 \quad (12.48)$$

λ – произвольный параметр, $\gamma_{\nu\rho}^\mu$ – связности в конформной метрике.

Касательный вектор («импульс»)

$$P^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \Rightarrow \quad (12.49)$$

$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} + \gamma_{\nu\rho}^\mu P^\nu P^\rho = 0 \quad (12.50)$$

Получим уравнения для P^μ как функций конформного времени (избавимся от λ).

$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} = \frac{d\eta}{d\lambda} \frac{dP^\mu}{d\eta} = \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{dP^\mu}{d\eta} = P^0 \frac{dP^\mu}{d\eta} \Rightarrow \quad (12.51)$$

$$P^0 \frac{dP^\mu}{d\eta} + \gamma_{\nu\rho}^\mu P^\nu P^\rho = 0 \Rightarrow \quad (12.52)$$

$$\frac{dP^\mu}{d\eta} + \gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{P^\nu}{P^0} \frac{P^\rho}{P^0} P^0 = 0 \Rightarrow \quad (12.53)$$

0-компонента:

$$\boxed{\frac{dP^0}{d\eta} + \gamma_{\nu\rho}^0 \frac{P^\nu}{P^0} \frac{P^\rho}{P^0} P^0 = 0} \quad (12.54)$$

1. Скалярные возмущения метрики, Ньютонова калибровка

(10.9), (10.16):

$$h_{00} = 2\Phi, \quad h_{ij} = -2\Phi\delta_{ij} \quad (12.55)$$

Элементарно считаются ★:

$$\gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}h'_{00}, \quad \gamma_{0i}^0 = \frac{1}{2}\partial_i h_{00}, \quad \gamma_{ij}^0 = -\frac{1}{2}h'_{ij} \Rightarrow \quad (12.56)$$

$$\gamma_{00}^0 = \Phi', \quad \gamma_{0i}^0 = \partial_i \Phi, \quad \gamma_{ij}^0 = -\Phi'\delta_{ij} \quad (12.57)$$

Из (12.54) ★

$$\frac{dP^0}{d\eta} + 2P^0 \frac{P^i}{P^0} \partial_i \Phi = 0 \quad (12.58)$$

$P^i/P^0 = n^i$ – единичный вектор вдоль направления движения (почему? ★) \Rightarrow

$$\frac{dP^0}{d\eta} = -2P_0 \mathbf{n} \nabla \Phi = 2\Phi' P^0 - 2(\Phi' + \mathbf{n} \nabla \Phi) P^0 \quad (12.59)$$

$$(\Phi' + \mathbf{n} \nabla \Phi) = \frac{d\Phi(\eta, \mathbf{x})}{d\eta} \quad (12.60)$$

$$\frac{dP^0}{d\eta} = 2 \left(\Phi' - \frac{d\Phi}{d\eta} \right) \cdot P^0 \quad (12.61)$$

Общее решение:

$$\ln P^0(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} 2 \left(\Phi' - \frac{d\Phi}{d\eta} \right) d\eta \quad (12.62)$$

η_0 – некоторая константа (не нужна).

Как изменится от η' до η'' :

$$\ln \left(\frac{P^0(\eta'')}{P^0(\eta')} \right) = \int_{\eta'}^{\eta''} 2 \left(\Phi' - \frac{d\Phi}{d\eta} \right) d\eta \quad (12.63)$$

$$\ln \left(\frac{P^0(\eta'')}{P^0(\eta')} \right) \cong \frac{P^0(\eta'')}{P^0(\eta')} - 1 = \frac{P^0(\eta'') - P^0(\eta')}{P^0(\eta')} \Rightarrow \quad (12.64)$$

$$\frac{P^0(\eta'') - P^0(\eta')}{P^0(\eta')} = 2 \int_{\eta'}^{\eta''} \Phi' d\eta - 2[\Phi(\eta'') - \Phi(\eta')] \quad (12.65)$$

Как изменяется P^0 нашли.

Связь частоты с P^0

Фотон испущен элементом среды с (конформной) скоростью U^μ , конформной частотой Ω в системе покоя среды.

Работаем в конформно-Ньютоновой системе координат, $\gamma_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$

Для скалярных возмущений в линейном порядке

$$U^0 = 1 - \Phi, \quad U^i = v^i \quad (12.66)$$

$$U_0 = 1 + \Phi, \quad U_i = -v^i \quad (12.67)$$

[ср. (9.57), (9.58) для возмущения скоростей.]

Можно локально выбрать координаты так, что будет $\tilde{\gamma}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, а в качестве λ взять время в этой с.к.

Тогда:

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \tilde{P}^0 \\ \tilde{U}_\mu &= (1, 0, 0, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Omega = \tilde{U}_0 \tilde{P}^0 \Rightarrow \quad (12.68)$$

Общековариантное выражение для частоты (скаляр: частота в той системе, где среда, испустившая фотон, неподвижна):

$$\Omega = U_\mu P^\mu \quad (12.69)$$

Подставляем (12.67) в (12.69)

$$\begin{aligned} \Omega &= (1 + \Phi)P^0 - v_i P^i = \left\langle n^i = \frac{P^i}{P^0} \Rightarrow P^i = n^i P^0 \right\rangle = \\ &= (1 + \Phi)P^0 - v_i n^i P^0 = (1 + \Phi - \mathbf{v}\mathbf{n})P^0 \quad (12.70) \end{aligned}$$

$$\boxed{\Omega(\eta') = [1 + \Phi(\eta') - \mathbf{nv}(\eta')]P^0(\eta')} \quad (12.71)$$

Совершенно аналогичным образом, для приема фотона в момент η'' наблюдателем со скоростью $\mathbf{v}(\eta'')$

$$\Omega(\eta'') = [1 + \Phi(\eta'') - \mathbf{nv}(\eta'')]P^0(\eta'') \quad (12.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Omega(\mathbf{n}, \eta'') - \Omega(\mathbf{n}, \eta')}{\Omega(\mathbf{n}, \eta')} &\cong \backslash \text{до первого порядка} \backslash \cong \\ &\cong \frac{P^0(\eta'') - P^0(\eta')}{P^0(\eta')} + \Phi(\eta'') - \Phi(\eta') + \mathbf{nv}(\eta') - \mathbf{nv}(\eta'') = \\ &= \backslash (12.65) \backslash = \\ &= 2 \int_{\eta'}^{\eta''} \Phi' d\eta + \Phi(\eta') - \Phi(\eta'') + \mathbf{nv}(\eta') - \mathbf{nv}(\eta'') \end{aligned} \quad (12.73)$$

- Сдвиг конформной частоты пропорционален самой частоте \Rightarrow
- Форма спектра не меняется \Rightarrow
- Наблюдается планковский спектр, с температурой (пропорциональна частоте), зависящей от направления

В момент рекомбинации были флуктуации температуры, обусловленные флуктуацией плотности $B\gamma$ -среды:

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 \Rightarrow \quad (12.74)$$

$$\delta_\gamma = \frac{\delta\rho_\gamma}{\rho_\gamma} = \frac{4\delta T}{T} = \frac{4\delta\omega}{\omega} \Rightarrow \frac{\delta T}{T} = \frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{1}{4}\delta_\gamma \quad (12.75)$$

К этой величине величине добавится (12.73).

Окончательно:

$$\frac{\delta T}{T}(\eta_0) = \frac{1}{4}\delta_\gamma(\eta_r) + [\Phi(\eta_r) - \Phi(\eta_0)] + \quad (12.76)$$

$$+ 2 \int_{\eta_r}^{\eta_0} \Phi' d\eta + \quad (12.77)$$

$$+ \mathbf{nv}(\eta_r) - \mathbf{nv}(\eta_0) \quad (12.78)$$

- (12.76) – эффект Сакса-Вольфа (флуктуация температуры + флуктуация гравитационного потенциала)
- (12.77) – интегральный эффект Сакса-Вольфа (фотон падает в один потенциал, а выбирается из другого) – следствие нелинейной эволюции возмущений, есть корреляции с крупными структурами – скоплениями галактик
- (12.78) – эффект Доплера

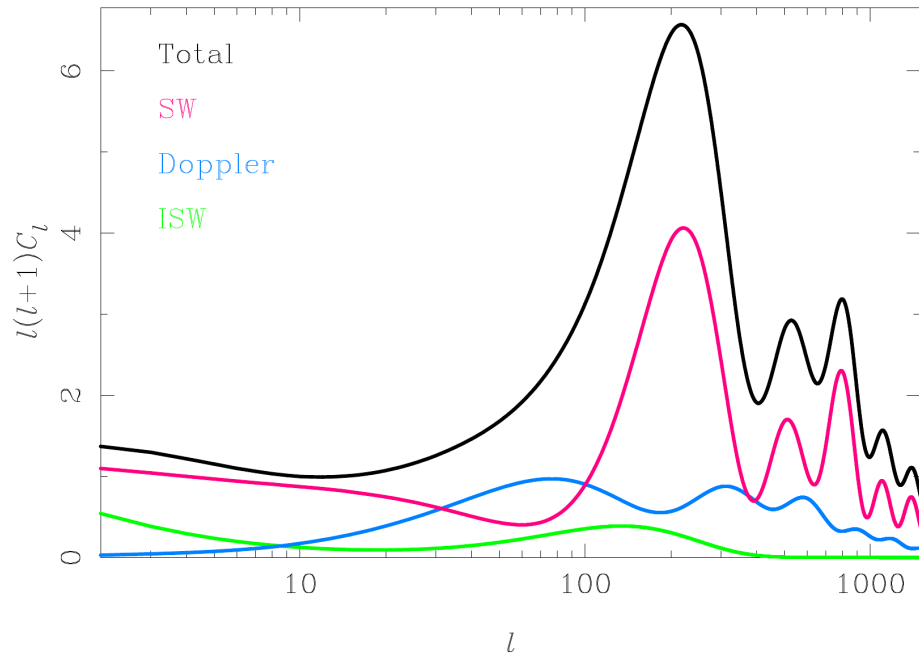
Вклад $\mathbf{nv}(\eta_0)$ (диполь) вычитается, вклад $\Phi(\eta_0)$ одинаков для всех направлений (монополь):

$$\frac{\delta T}{T}(\mathbf{n}, \eta_0) = \frac{1}{4}\delta_\gamma(\eta_r) + \Phi(\eta_r) + \quad (12.79)$$

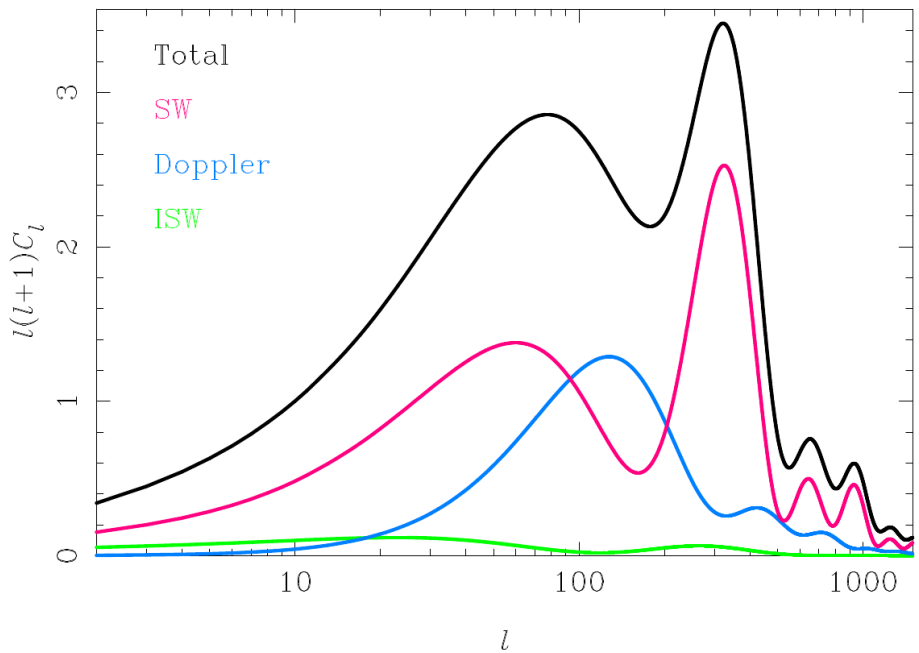
$$+ 2 \int_{\eta_r}^{\eta_0} \Phi' d\eta + \quad (12.80)$$

$$+ \mathbf{nv}(\eta_r) \quad (12.81)$$

Адиабатические моды:

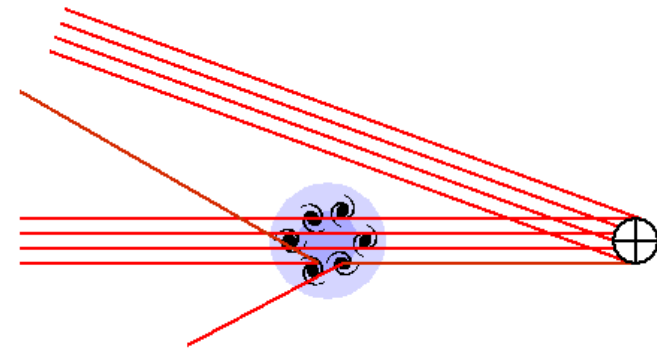


Моды постоянной кривизны:



Затухание, демпфирование и другие более тонкие эффекты:

- Конечная толщина последней поверхности рассеяния \Rightarrow размывание анизотропии на малых масштабах.
- Рассеяние в эпоху реионизации \Rightarrow понижение контраста при всех масштабах.
- Эффект Силка (затухание Силка) – немонолитность среды $B\gamma$ вблизи поверхности рассеяния, транспортировка фотонов без изменения энергии \Rightarrow затухание осцилляций на малых масштабах.
- Линзирование – смазывает картинку на малых масштабах.
- Эффект Сюняева-Зельдовича (подогрев излучения быстрыми электронами).



Лекция 13

Механизмы генерации анизотропии СМВ: Тензорные возмущения метрики. А плоская ли Вселенная? Поляризация реликтового излучения.

Механизмы генерации анизотропии СМВ.

2. Тензорные возмущения метрики

Легко считается:

$$\gamma_{ij}^0 = -h'_{ij}/2 \Rightarrow \quad (13.1)$$

Из общего уравнения для P^0 (12.54):

$$\frac{dP^0}{d\eta} + \gamma_{\nu\rho}^0 \frac{P^\nu}{P^0} \frac{P^\rho}{P^0} P^0 = \frac{dP^0}{d\eta} - \frac{h'_{ij}}{2} n^i n^j P^0 = 0 \Rightarrow \quad (13.2)$$

$$\frac{P^0(\eta'') - P^0(\eta')}{P^0(\eta')} = \frac{1}{2} \int_{\eta'}^{\eta''} n^i h'_{ij} n^j d\eta \quad (13.3)$$

С тензорными модами не связаны вариации скорости среды, т.е. надо считать $U^0 = 1, U^i = 0 \Rightarrow$

Измеряемая частота

$$\Omega(\eta'') = P^0(\eta'') \Rightarrow \frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{\delta T}{T} = \frac{\delta P^0}{P^0} \Rightarrow \quad (13.4)$$

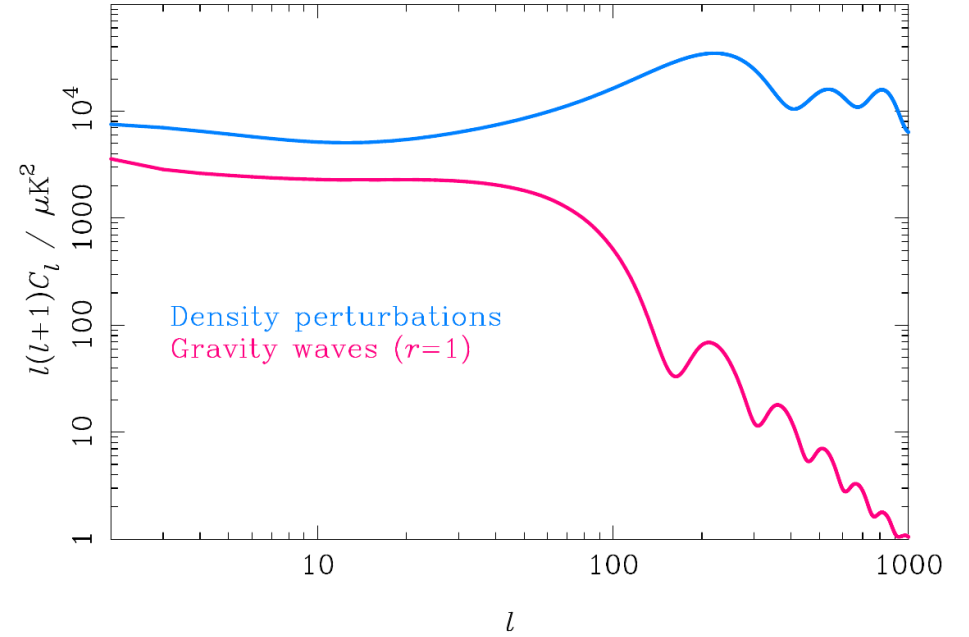
$$\frac{\delta T}{T}(\mathbf{n}, \eta_0) = \frac{1}{2} \int_{\eta_r}^{\eta_0} n^i h_{ij}^{TT'} n^j d\eta \quad (13.5)$$

– тензорный вариант интегрального эффекта Сакса-Вольфа.

Тензорные моды после входа под горизонт падают как $1/a \Rightarrow$

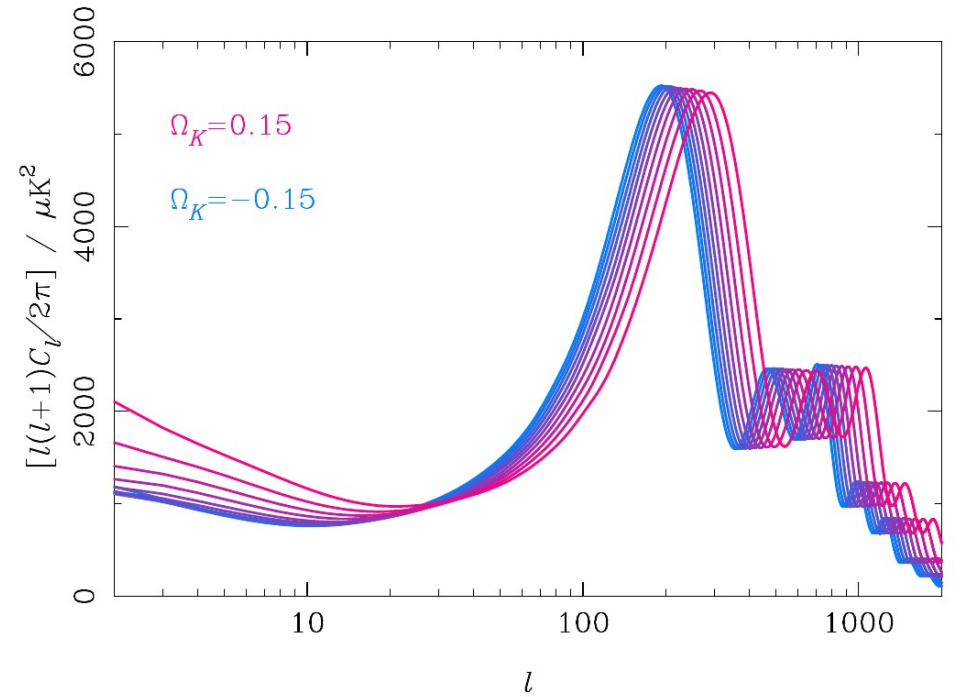
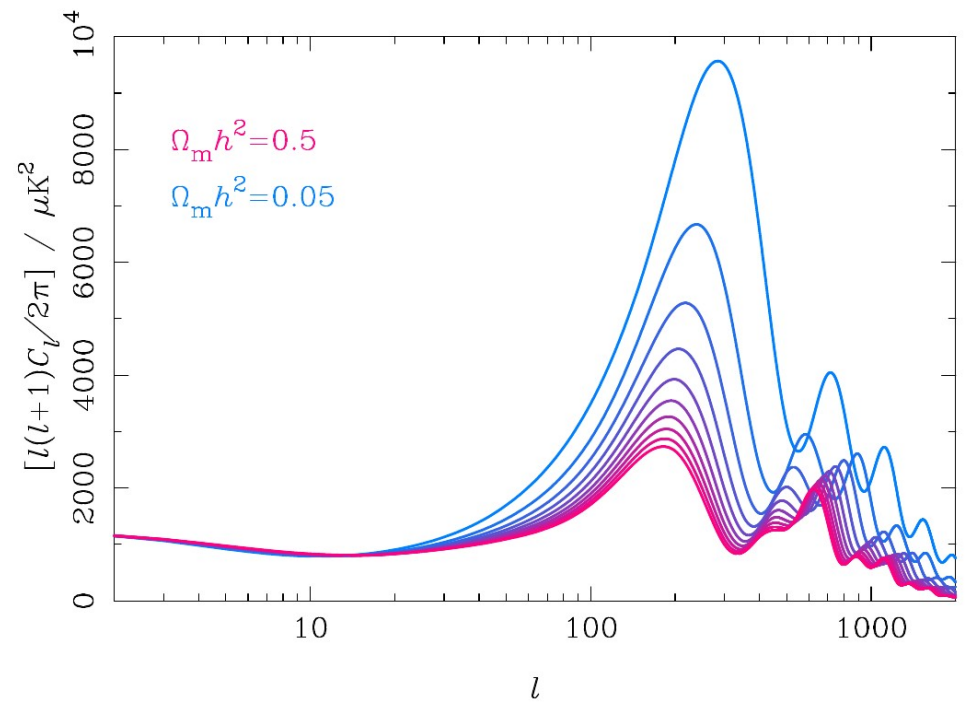
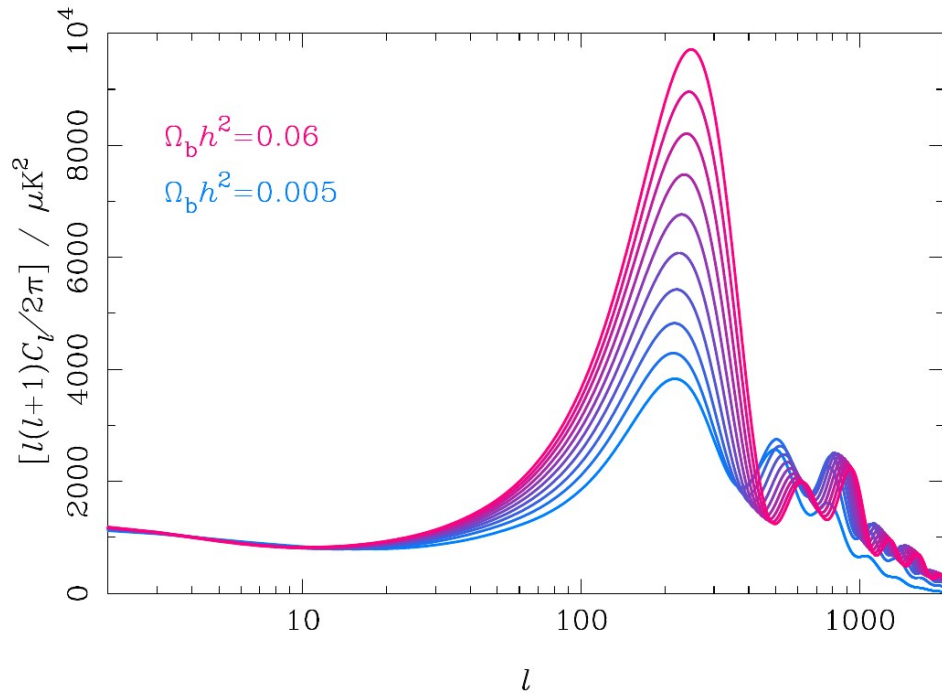
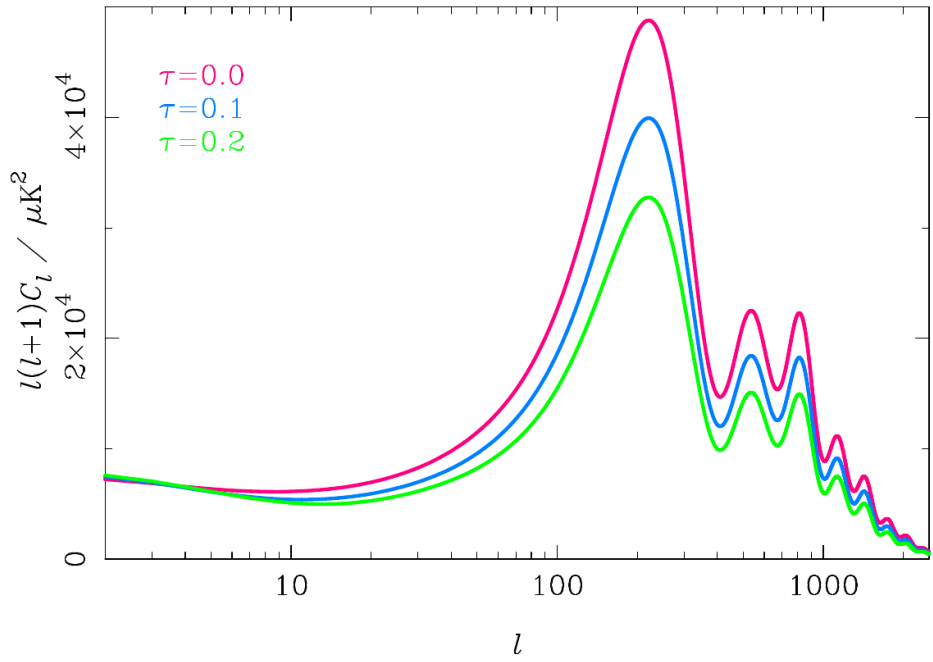
Ожидается вклад только мод, поздно вошедших под горизонт \Rightarrow

Большие масштабы неоднородностей



Тензорные моды проще обнаружить по вкладу в поляризацию СМВ (см. далее)

Зависимость анизотропии от космологических параметров



Линзирование углового масштаба акустических пиков!

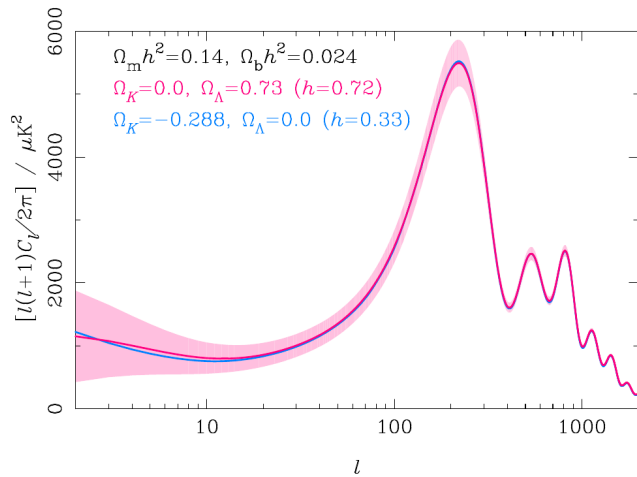
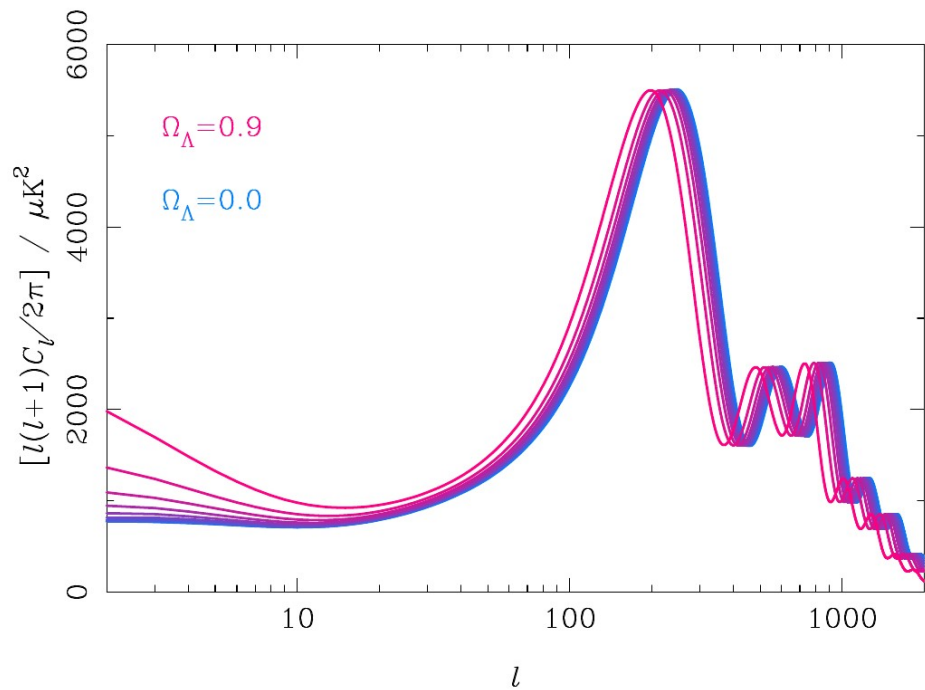
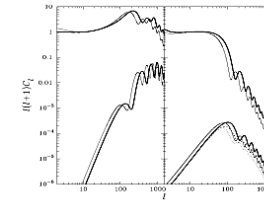


Fig. 11. The geometric degeneracy. A scale-invariant adiabatic Λ CDM model with $\Omega_b h^2 = 0.024$, $\Omega_m h^2 = 0.14$ and $\Omega_\Lambda = 0.73$ and $\Omega_K = 0$ (close to the WMAP best-fit values [12]) produces an almost identical spectrum to a closed model $\Omega_K = -0.288$ with vanishing cosmological constant. However, the Hubble constants are very different – $h = 0.72$ in the flat model and 0.33 in the closed model – and so the latter is easily ruled out by external constraints. The shaded region shows the 1σ cosmic variance errors $\Delta C_l/C_l = \sqrt{2/(2l+1)}$ on the power spectrum.

Открытый код **CAMB** для вычисления спектра мощности анизотропии СМБ: camb.info



Code for Anisotropies in the Microwave Background

by [Antony Lewis](#) and [Anthony Challinor](#)

Get help: [Google](#) Custom Search


Features:

- Support for closed, open and flat models
- Scalar, vector and tensor modes including polarization
- Output C_l , matter transfer functions, matter power spectrum and σ_8
- Fast computation to $\sim 0.3\text{-}0.1\%$ accuracy, with controllable accuracy level
- Relatively structured and easily extendable Fortran 90 code
- Efficient support for massive neutrinos
- Absolute computations from correctly normalized initial power spectra
- Computation of lensed CMB power spectra and lensing potential power spectrum
- Internally parallelized for fast execution on multi-processor machines
- Use CAMB with [CosmoMC](#) for Monte-Carlo parameter estimation
- Constant equation of state [quintessence](#) (or variable [PPE](#))
- Support for general correlated adiabatic/isocurvature initial conditions
- Accurate full-sky calculation of lensed power spectra ([astro-ph/0502425](#))
- Integrated interface to [HALOFIT](#) for non-linear fitting
- support for arbitrary neutrino mass splittings
- For 21cm, lensing and number count power spectra see this [extension](#)
- For perturbed recombination and effect on small-scale baryons see this [extension](#)
- Calculation of local primordial and CMB lensing bispectra
- **NEW:** Easy-to-use [Python wrapper](#)

Download the [Fortran 90 source code and python wrapper](#).

See the [ReadMe](#) file for documentation, [CosmoCoffee](#) for support, and the [BibTeX](#) file for references.

https://lambda.gsfc.nasa.gov/toolbox/tb_camb_form.cfm



National Aeronautics and Space Administration
Goddard Space Flight Center
Sciences and Exploration

Follow @NASA_LAMBDA
ABOUT LAMBDA

Home
Data
Tools
Papers
Education
Links
News

LAMBDA - Tools

Tools
Footprint
CAMB
WMAPViewer
Conversions
Calculators

CAMB Web Interface

Most of the [configuration documentation](#) is provided in the sample parameter file provided with the application.

Supports the April 2014 Release

This form uses JavaScript to enable certain layout features, and it uses Cascading Style Sheets to control the layout of all the form components. If either of these features are not supported or enabled by your browser, this form will NOT display correctly.

Descriptive information for the CAMB parameters can be found at: <http://cosmologist.info/notes/CAMB.pdf>

Actions to Perform

Scalar C_l's
 Vector C_l's
 Tensor C_l's

Do Lensing
 Transfer Functions

Linear
 Non-linear Matter Power (HALOFIT)
 Non-linear CMB Lensing (HALOFIT)
 Non-linear Matter Power and CMB Lensing (HALOFIT)

Sky Map Output

- Vector C_l's are incompatible with Scalar and Tensor C_l's. The Transfer functions require Scalar and/or Tensor C_l's.
- The HEALpix synfast program is used to generate maps from the resultant spectra. The random number seed governs the phase of the a_{lm}'s generated by synfast. The default of zero causes synfast to generate a new see from the system time with each run. Specifying a fixed nonzero value will return fixed phases with successive runs.

Maximum Multipoles and k*eta

Scalar

 l_{max}

Tensor

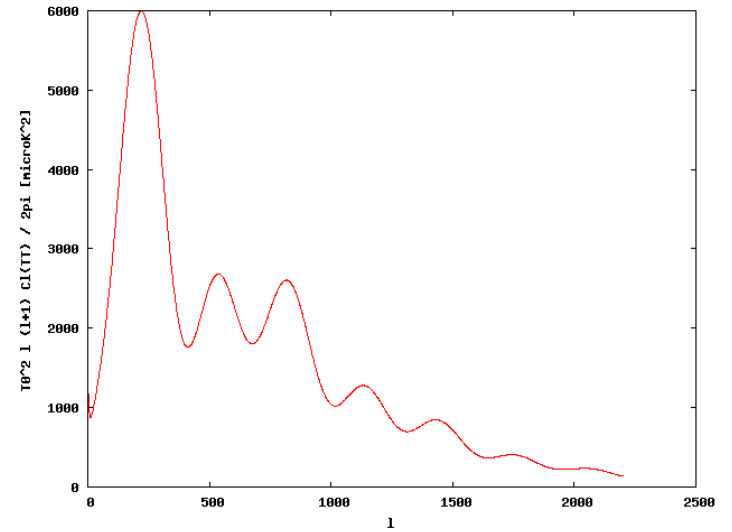
 l_{max}

Files

Log/Output [camb_84296825.log](#)
 Scalar Output [camb_84296825_scalcls.dat](#)
 Lensed Output [camb_84296825_lensedcls.dat](#)
 FITS Output [camb_84296825_scalcls.fits](#)

Scalar Modes Plots

C_l^{TT} vs. l



Плоская ли Вселенная?

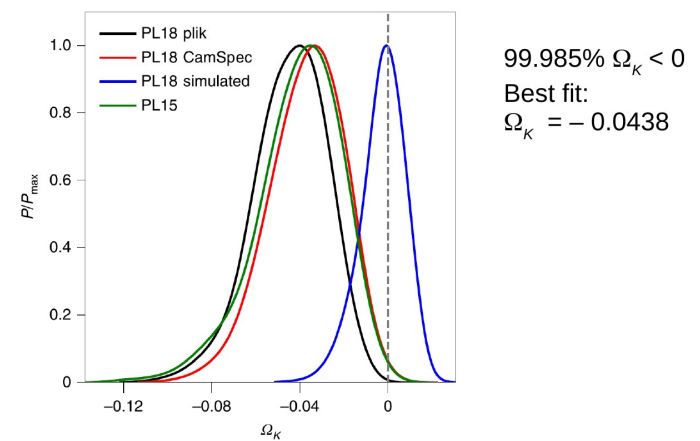
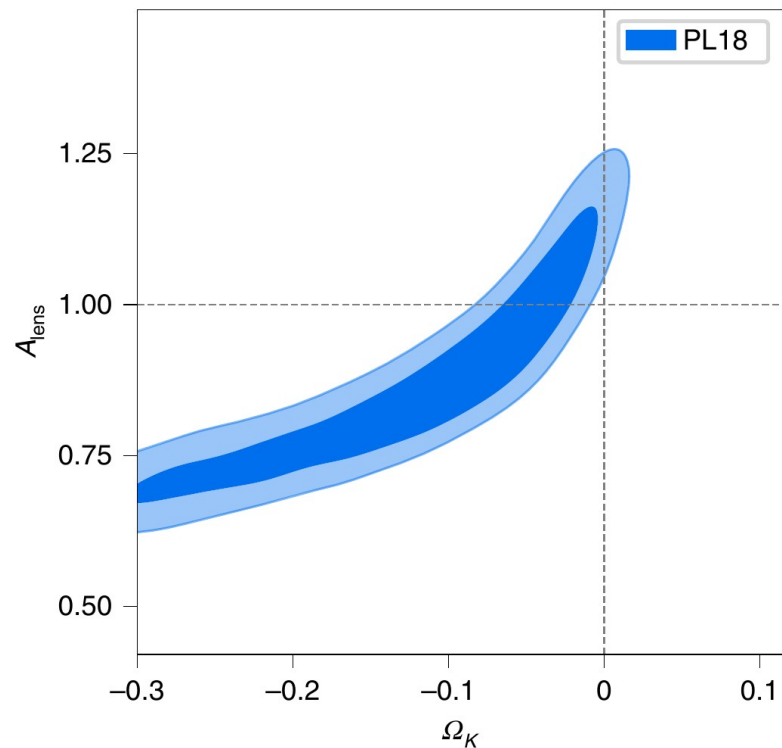
4 ноября 2019 г., Nature astronomy



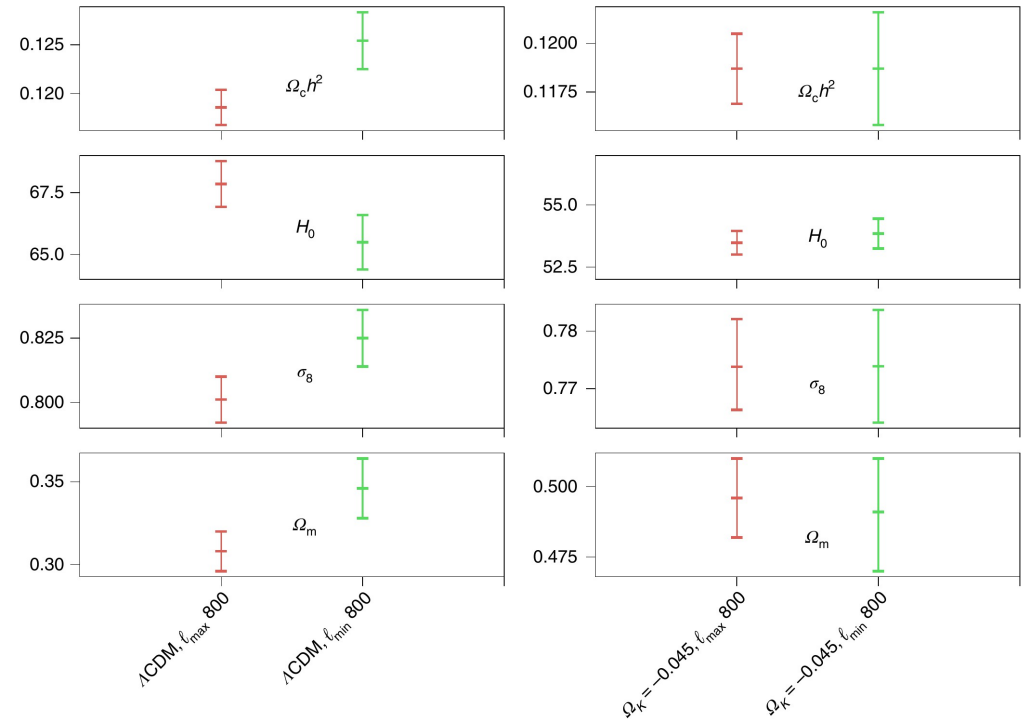
Planck evidence for a closed Universe and a possible crisis for cosmology

Eleonora Di Valentino¹, Alessandro Melchiorri^{2*} and Joseph Silk^{3,4,5}

The recent Planck Legacy 2018 release has confirmed the presence of an enhanced lensing amplitude in cosmic microwave background power spectra compared with that predicted in the standard Λ cold dark matter model, where Λ is the cosmological constant. A closed Universe can provide a physical explanation for this effect, with the Planck cosmic microwave background spectra now preferring a positive curvature at more than the 99% confidence level. Here, we further investigate the evidence for a closed Universe from Planck, showing that positive curvature naturally explains the anomalous lensing amplitude, and demonstrating that it also removes a well-known tension in the Planck dataset concerning the values of cosmological parameters derived at different angular scales. We show that since the Planck power spectra prefer a closed Universe, discordances higher than generally estimated arise for most of the local cosmological observables, including baryon acoustic oscillations. The assumption of a flat Universe could therefore mask a cosmological crisis where disparate observed properties of the Universe appear to be mutually inconsistent. Future measurements are needed to clarify whether the observed discordances are due to undetected systematics, or to new physics or simply are a statistical fluctuation.



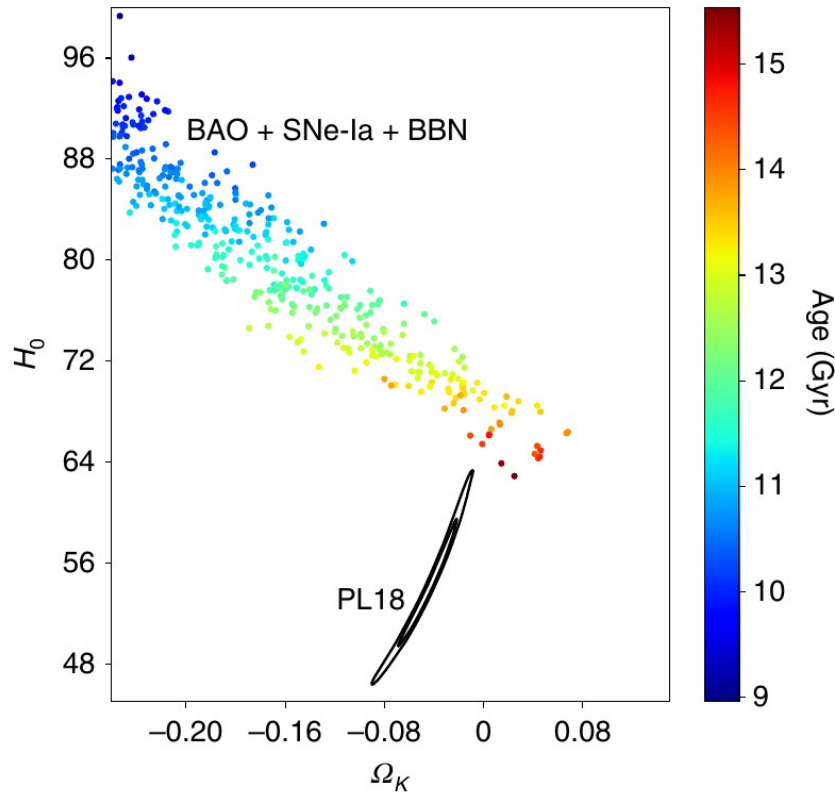
Космологические параметры, определенные по разным углам:



$$\Omega_c \equiv \Omega_{CDM}$$

σ_8 – современный контраст неоднородности плотности материи на масштабе $8h^{-1}$ Мпк (стандартная величина по историческим причинам)

Данные обсерватории Planck плохо согласуются с результатами других космологических наблюдений



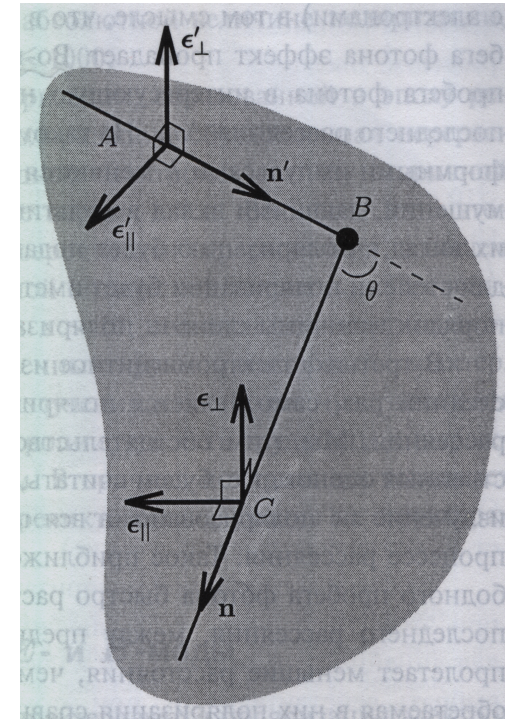
BAO – Baryon Acoustic Oscillations

BBN – Big Bang Nucleosynthesis

Варианты объяснения результатов Planck:

1. Новая физика
2. Систематика Planck
3. Статистическая флуктуация $\sim 3\sigma$

Поляризация реликтового излучения



Томсоновское рассеяние:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3\sigma_T}{8\pi} \cos^2(\epsilon', \epsilon) \quad (13.6)$$

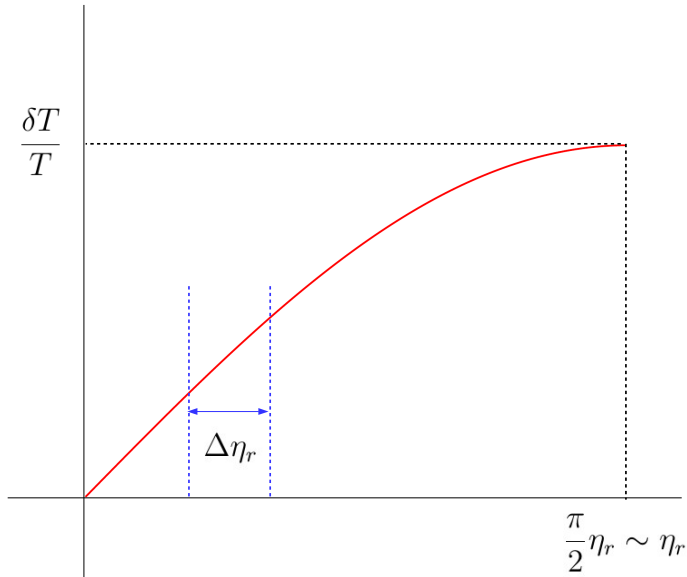
- Если с направления \mathbf{n}' приходит неполяризованное излучение, то в направлении \mathbf{n} излучение будет частично линейно поляризовано перпендикулярно плоскости $(\mathbf{n}', \mathbf{n})$.

\Rightarrow

- Если излучение, приходящее в точку B изотропно, то рассеяное излучение в направлении \mathbf{n} будет частично поляризовано.

- Поток фотонов вблизи поверхности последнего рассеяния анизотропен \Rightarrow последнее рассеянное излучение частично поляризовано.

Масштаб величины поляризации



d – длина пробега фотонов, $\lambda/4$ – масштаб длины неоднородностей

$d \ll \lambda/4 \Rightarrow$ поляризации нет.

$d \gg \lambda \Rightarrow$ поляризации нет (эффект Силка)

Вблизи первого акустического пика, $l \sim 150$

$$k\eta_r \sim 1 \Rightarrow k \sim \frac{1}{\eta_r} \quad (\text{см. (10.30)–(10.32)}) \quad (13.7)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \sim 2\pi\eta_r \quad (13.8)$$

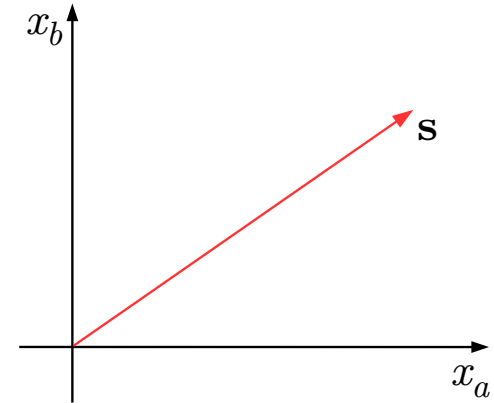
$$\frac{\lambda}{4} \sim \frac{\pi}{2}\eta_r \sim \eta_r \quad (13.9)$$

Пробег фотонов вблизи рекомбинации масштаба толщины поверхности последнего рассеяния $\Delta\eta_r \sim 0.1\eta_r \Rightarrow$

$$\mathcal{P} \sim \frac{\Delta\eta_r}{\eta_r} \frac{\delta T}{T} \sim 0.1 \cdot 5 \cdot 10^{-5} \sim 5 \cdot 10^{-6} \sim 10^{-5} \quad (13.10)$$

Тензор поляризации.

1. Поляризация узкого пучка



• Поляризация – не вектор:

- Проекция вектора на ось меняется от нуля до максимального значения
- Интенсивность света, проходящего через поляриметр, не обращается в нуль.
- Поляризация не имеет направления

• Поляризация – 2-тензор

$$I(\mathbf{s}) = \langle |\mathbf{E} \cdot \mathbf{s}|^2 \rangle = \langle (E_a s_a)(E_b s_b)^* \rangle = s_a \langle E_a E_b^* \rangle s_b \quad (13.11)$$

$$I_{ab} = \langle E_a E_b^* \rangle \quad (13.12)$$

$$I = \langle |E_a|^2 \rangle + \langle |E_b|^2 \rangle \quad (13.13)$$

Тензор поляризации:

$$P_{ab} = \frac{I_{ab}}{I} \quad (13.14)$$

- Для линейно поляризованного света \mathbf{E} – действительный вектор $\Rightarrow P$ действительный, симметричный, со следом 1 \Rightarrow всего 2 независимых параметра
- Неполяризованное излучение

$$P_{ab} = \frac{\delta_{ab}}{2} \Rightarrow \det P = \frac{1}{4} \quad (13.15)$$

- Полностью поляризованное излучение

$$P_{ab} = \frac{E_a E_b}{E^2} \Rightarrow \det P = 0 \quad (\mathbf{E} - \text{фикс. вектор}) \quad (13.16)$$

$$P = |\mathbf{E}\rangle \otimes \langle \mathbf{E}| \equiv |\mathbf{E}\rangle \langle \mathbf{E}| \quad (13.17)$$

$$|\mathbf{E}\rangle = \begin{pmatrix} E_a \\ E_b \end{pmatrix}, \langle \mathbf{E}| = (E_a^*, E_b^*) \equiv (E_a, E_b) \quad (13.18)$$

- Степень поляризации

$$\mathcal{P} = \sqrt{1 - 4 \det P_{ab}}; \quad 0 \leq \mathcal{P} \leq 1 \quad (13.19)$$

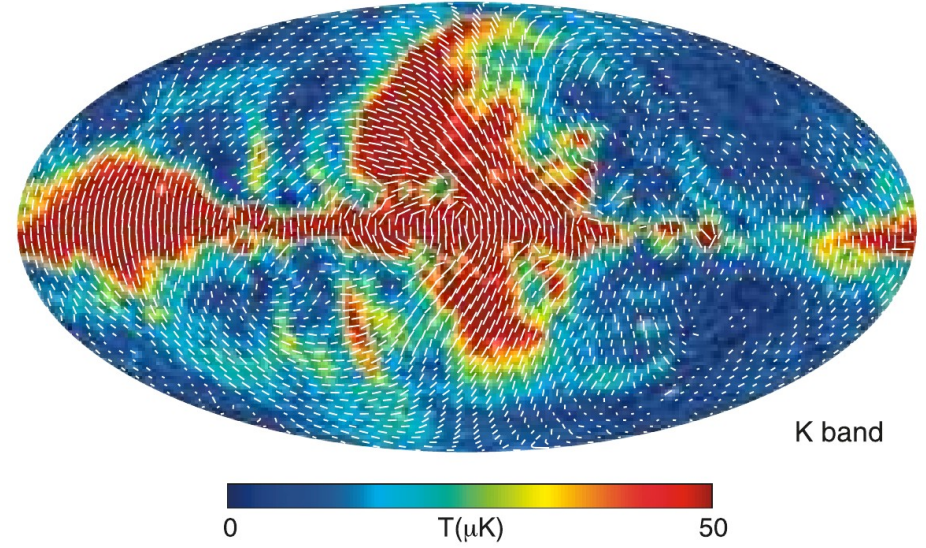
Пусть $\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}$ – нормированные собственные векторы P_{ab} . Тогда

$$\begin{aligned} P &= \lambda_p |\mathbf{s}^{(1)}\rangle \langle \mathbf{s}^{(1)}| + (1 - \lambda_p) |\mathbf{s}^{(2)}\rangle \langle \mathbf{s}^{(2)}| = \\ &= \text{\textbackslash пусть } \lambda_p < 1/2 \text{\textbackslash} = \\ &= \lambda_p |\mathbf{s}^{(1)}\rangle \langle \mathbf{s}^{(1)}| + \lambda_p |\mathbf{s}^{(2)}\rangle \langle \mathbf{s}^{(2)}| - \\ &- \lambda_p |\mathbf{s}^{(2)}\rangle \langle \mathbf{s}^{(2)}| + (1 - \lambda_p) |\mathbf{s}^{(2)}\rangle \langle \mathbf{s}^{(2)}| = \\ &= \lambda_p \hat{1} + (1 - 2\lambda_p) |\mathbf{s}^{(2)}\rangle \langle \mathbf{s}^{(2)}| \Rightarrow \end{aligned} \quad (13.20)$$

$$P_{ab} = \lambda_p \delta_{ab} + (1 - 2\lambda_p) s_a^{(2)} s_b^{(2)} = \frac{I_{ab}}{I} \Rightarrow \quad (13.21)$$

$$I_{ab} \equiv \frac{1}{2} \delta_{ab} I^{(np)} + E_a^{(p)} E_b^{(p)} \quad (13.22)$$

Можно нарисовать поле вектора \mathbf{E}



$$\mathcal{P}_{ab} \equiv P_{ab} - \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (13.23)$$

Легко показать ★:

$$\det \mathcal{P}_{ab} = \det P_{ab} - \frac{1}{4} \Rightarrow \mathcal{P} = \sqrt{-4 \det \mathcal{P}_{ab}} \quad (13.24)$$

Тензор \mathcal{P}_{ab} симметричный, бесследовый \Rightarrow два параметра.

Для неполяризованного излучения $\mathcal{P}_{ab} = 0$

2. Поле поляризации на единичной сфере

Обобщение (13.23):

$$\mathcal{P}_{ab} = P_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} \quad (13.25)$$

где g_{ab} метрический 2-тензор на единичной сфере (координаты любые, можно (θ, φ)).

Заданный на сфере симметричный бесследовый тензор можно представить через скалярный и псевдоскалярный «потенциалы»:

$$\mathcal{P}_{ab} = \{\nabla_a \nabla_b\} \mathcal{P}_E - \{E_a^c \nabla_b \nabla_c\} \mathcal{P}_B \quad (13.26)$$

где ∇_a и E_{ab} – ковариантная производная и антисимметричный тензор на сфере (см. (2.52)):

$$E_{ab} = \sqrt{-g} \varepsilon_{ab} \quad (13.27)$$

$\{\dots\}$ означает выделение симметричной и бесследовой части:

$$\{\nabla_a \nabla_b\} = \frac{1}{2}(\nabla_a \nabla_b + \nabla_b \nabla_a - g_{ab} \Delta) \quad (13.28)$$

$$\{E_a^c \nabla_b \nabla_c\} = \frac{1}{2}(E_a^c \nabla_b \nabla_c + E_b^c \nabla_a \nabla_c) \quad (13.29)$$

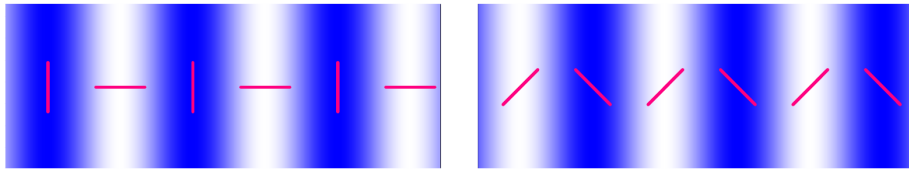
Обратное преобразование:

$$-\Delta(\Delta + 2)\mathcal{P}_E = 2\{\nabla^a \nabla^b\} \mathcal{P}_{ab} \quad (13.30)$$

$$-\Delta(\Delta + 2)\mathcal{P}_B = 2\{E_c^a \nabla^c \nabla^b\} \mathcal{P}_{ab} \quad (13.31)$$

Pure E mode

Pure B mode



$\nabla^a \mathcal{P}_{ab}$ – чистый градиент (как \mathbf{E}), если $\mathcal{P}_B = 0$,
 $\nabla^a \mathcal{P}_{ab}$ – чисто вихревой (как \mathbf{B}), если $\mathcal{P}_E = 0$.

Оригинальные статьи:

astro-ph/9609132
 astro-ph/9609169
 astro-ph/9611125

Разложение \mathcal{P}_E и \mathcal{P}_B :

$$\mathcal{P}_E = \sqrt{2} \sum_{lm} \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} a_{lm}^E Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (13.32)$$

$$\mathcal{P}_B = \sqrt{2} \sum_{lm} \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} a_{lm}^B Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (13.33)$$

$$(13.34)$$

(нормировка из соображений удобства).

Коэффициенты a_{lm}^E и a_{lm}^B вычисляются по результатам наблюдений:

$$a_{lm}^E = - \int d\mathbf{n} \left[Y_{lm}^{(E)ab}(\mathbf{n}) \right]^* \mathcal{P}_{ab}(\mathbf{n}) \quad (13.35)$$

$$a_{lm}^B = - \int d\mathbf{n} \left[Y_{lm}^{(B)ab}(\mathbf{n}) \right]^* \mathcal{P}_{ab}(\mathbf{n}) \quad (13.36)$$

где

$$Y_{lm,ab}^{(E)} = \sqrt{\frac{2(l-2)!}{(l+2)!}} \left(\nabla_a \nabla_b Y_{lm} - \frac{1}{2} g_{ab} \nabla^c \nabla_c Y_{lm} \right) \quad (13.37)$$

$$Y_{lm,ab}^{(B)} = \sqrt{\frac{(l-2)!}{2(l+2)!}} (\nabla_a \nabla_c Y_{lm} E_b^c + \nabla_c \nabla_b Y_{lm} E_a^c) \quad (13.38)$$

Разные компоненты анизотропии (E, B) могут коррелировать между собой и все они могут коррелировать с температурой.

Поэтому определяется набор корреляторов

$$C_l^{XY} = \frac{1}{2l+1} \sum_m \langle a_{lm}^X a_{lm}^{Y*} \rangle, \quad (13.39)$$

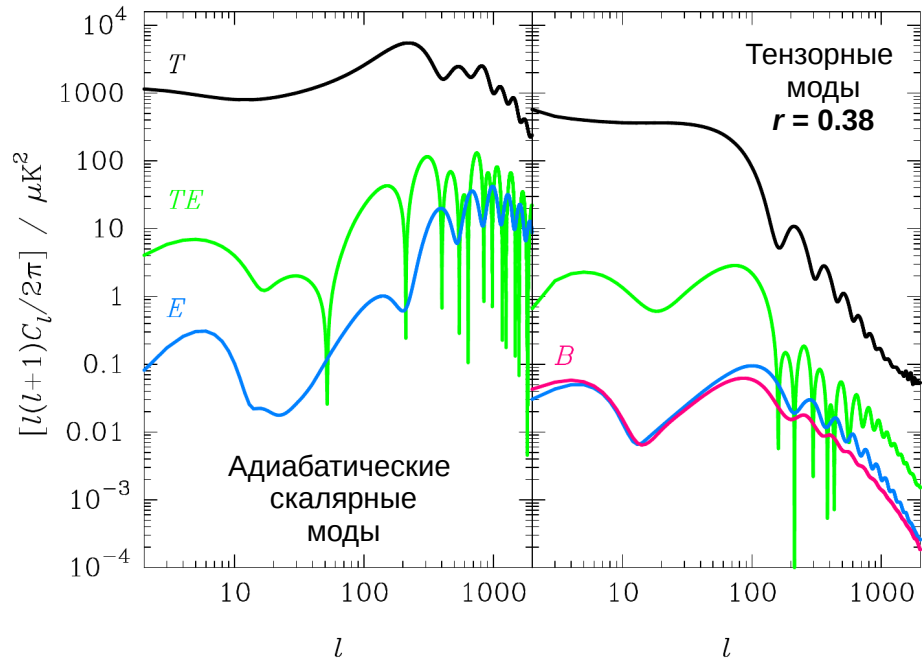
где $X, Y = T, E, B$.

В силу симметрии по четности $C^{TB} \equiv 0, C^{EB} \equiv 0$.

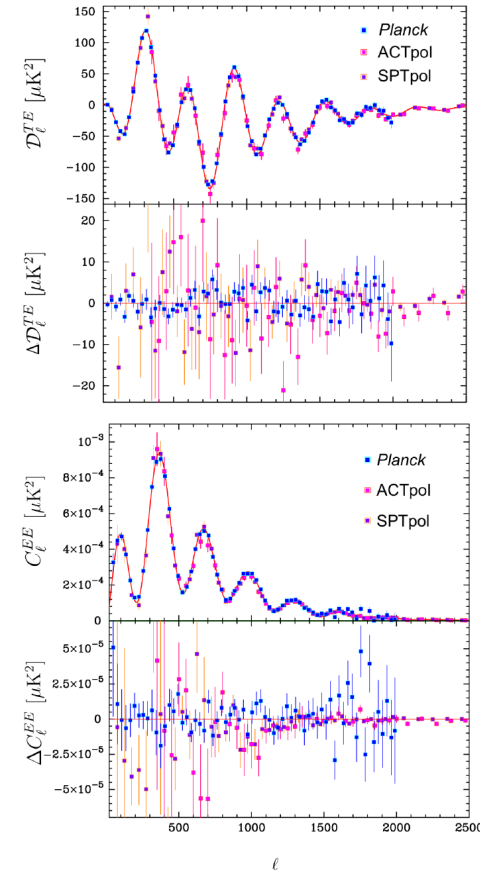
Остаются нетривиальные корреляторы:

$$C_l^{TT} \equiv C_l, C_l^{TE}, C_l^{EE}, C^{BB}.$$

- Космологические скалярные моды дают вклад только в E -моду поляризации.
 - Тензорные моды дают вклад и в E -моду, и в B -моду
- ⇒
- Обнаружение B -моды поляризации (вблизи $l \sim 100$) есть способ обнаружения тензорных мод и измерения тензорно-скалярного отношения r



Экспериментальные ТЕ- и ЕЕ-спектры мощности поляризации (PLANCK-2018)



Проблема фонов:

- Рассеяние на свободных электронах реионизации
- Слабое гравитационное линзирование (дает B -моду)
- Фарадеевское вращение (плазма + магнитное поле)
- Рассеяние на пыли (дает B -моду)

Последние результаты для B -моды:
arXiv:1807.06209, p.39: $r < 0.058$ (95%)

Лекция 14

Инфляционная космология. Модели инфляции.

Инфляционная космология

Проблемы, неразрешимые в космологии горячего Большого взрыва

1. *Наличие сингулярности метрики.*

Начало эволюции с квановой флуктуации?

2. *Проблема горизонта.*

Видимая вселенная содержит $\sim 3 \times 10^4$ областей, которые были причинно связаны на момент рекомбинации (но не связаны друг с другом).

Почему температуры одинаковы с точностью лучше 10^{-4} ?

Еще хуже обстоит дело с горизонтами в планковское время:

$$\rho_\gamma = 2 \frac{\pi^2}{30} T^4; \quad \rho_\gamma \propto \frac{1}{a^4} \Rightarrow T \propto \frac{1}{a} \quad (14.1)$$

Наш горизонт в планковскую эпоху:

$$\begin{aligned} l_H^0(t_{Pl}) &= l_H(t_0) \times \frac{a_{Pl}}{a_0} = l_H(t_0) \times \frac{T_0}{T_{Pl}} = \\ &= 46 \text{ млрд. св. лет} \times 2 \cdot 10^{-32} \sim 3 \times 10^{30} l_{Pl} \quad (14.2) \end{aligned}$$

В видимой вселенной (вероятно) $\sim 10^{90}$ причинно связанных областей на момент квантового рождения (если оно совпадало с началом Горячего Большого взрыва!).

Но Вселенная однородна. Почему?

3. Проблема плоскостности

$\Omega_K(t)$ – относительная плотность кривизны, зависящая от времени:

$$\Omega_K(t) = \frac{\Omega_K^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^2}{\Omega_M^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{rad}^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_K^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^2} \quad (14.3)$$

$$\frac{\Omega_K(t_1)}{\Omega_K(t_2)} = \frac{a_2^2}{a_1^2} \times \frac{\Omega_M^0 \left(\frac{a_0}{a_2}\right)^3 + \Omega_{rad}^0 \left(\frac{a_0}{a_2}\right)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_K^0 \left(\frac{a_0}{a_2}\right)^2}{\Omega_M^0 \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^3 + \Omega_{rad}^0 \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_K^0 \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^2} \quad (14.4)$$

$$t_1 = t_{Pl}, \quad t_2 = t_0 \Rightarrow$$

$$\frac{\Omega_K(t_{Pl})}{\Omega_K^0} \cong \left(\frac{a_{Pl}}{a_0}\right)^2 \frac{1}{\Omega_{rad}^0} = \left(\frac{T_{Pl}}{T_0}\right)^2 \frac{1}{\Omega_{rad}^0} \sim 10^{-60} \quad (14.5)$$

$$\Omega_K(t_{Pl}) \sim 10^{-60} \Omega_K^0 \Rightarrow \quad (14.6)$$

$$\Rightarrow |\Omega_K(t_{Pl})| \lesssim 10^{-63} \div 10^{-61} \quad (14.7)$$

(ожидается $|\Omega_K^0| \lesssim 0.001 \div 0.1$)

В момент Большого взрыва Вселенная нереально плоская. Почему?

4. Проблема энтропии

В момент квантового рождения ожидается энтропия ~ 0 .

Энтропия видимой вселенной $\sim 10^{88}$ (число фотонов).

(Энтропия видимого горизонта $\sim 10^{120}$)

Расширяется адиабатически – откуда столько энтропии?

5. Проблема первичных возмущений

Откуда первичные возмущения и почему масштаб $\delta\rho/\rho \sim 5 \cdot 10^{-5}$, почему спектр близок к плоскому?

6. Проблема монополей

Если во Вселенной были температуры больше 10^{16} ГэВ, должны были интенсивно рождаться GUT-магнитные монополи. Где они?

7. Проблема тонкой подгонки фундаментальных констант.

Эти вопросы решаются в инфляционной космологии.

Идея инфляции (качественно)

После Горячего Большого взрыва

$$\ddot{a} < 0 \quad (14.8)$$

Инфляция, по определению – расширение вселенной с

$$\ddot{a} > 0 \quad (14.9)$$

Вводится новая шкала времени, в которой инфляция начинается в момент t_{Pl} , а до того было неизвестно что (эпоха квантовой гравитации). Предполагается:

- Имеет место от $t \sim t_{Pl}$ до t_e (e значит end)
- В момент t_e инфляция сменяется горячей стадией
- (Приближенно) предполагается, что горячая стадия наступает мгновенно после окончания инфляции и наследует $H(t_e)$
- В начале горячей (РД!) стадии

$$H = \frac{T^2}{M_{Pl}^*} \Rightarrow T_{reh} = \sqrt{M_{Pl}^* H(t_e)} \quad (14.10)$$

Важная величина:

$$aH = a \frac{\dot{a}}{a} = \dot{a} \quad (14.11)$$

$$\ddot{a} < 0 \Rightarrow aH \text{ убывает, горячая стадия} \quad (14.12)$$

$$\ddot{a} > 0 \Rightarrow aH \text{ возрастает, инфляция} \quad (14.13)$$

Решение проблемы плоскостности

Уравнение Фрийдмана с кривизной:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2} \quad (14.14)$$

$$\frac{8\pi G}{3} \left[\rho + \Lambda - \frac{3}{8\pi G} \frac{\varkappa}{a^2} \right] = H^2 \quad (14.15)$$

$$\frac{8\pi G}{3} \rho_c(t) = H^2(t) \Rightarrow \rho_c(t) = \frac{3}{8\pi G} H^2(t) \quad (14.16)$$

$$\rho_K(t) = -\frac{3}{8\pi G} \frac{\varkappa}{a^2} \quad (14.17)$$

$$\Omega_K(t) \equiv \frac{\rho_K(t)}{\rho_c(t)} = \frac{1}{a^2(t)H^2(t)} \quad (14.18)$$

Хотим, чтобы начальная (на момент «квантового рождения» Вселенной) кривизна была не очень мала:

$$\Omega_K(t_{Pl}) \gtrsim \Omega_K(t_0) \Leftrightarrow \frac{\Omega_K(t_0)}{\Omega_K(t_{Pl})} \lesssim 1 \Leftrightarrow \quad (14.19)$$

$$\frac{[a(t_{Pl})H(t_{Pl})]^2}{(a_0H_0)^2} \lesssim 1 \Leftrightarrow \frac{a(t_{Pl})H(t_{Pl})}{a_0H_0} \lesssim 1 \Leftrightarrow \quad (14.20)$$

$$\frac{a(t_{Pl})H(t_{Pl})}{a(t_e)H(t_e)} \frac{a(t_e)H(t_e)}{a_0H_0} \lesssim 1 \Leftrightarrow \quad (14.21)$$

$$\frac{a(t_e)H(t_e)}{a(t_{Pl})H(t_{Pl})} \gtrsim \frac{a(t_e)H(t_e)}{a_0H_0} \quad (14.22)$$

Этого всегда можно добиться, если $a(t)H(t) = \dot{a}(t)$ растет достаточно быстро от t_{Pl} до t_e

Решение проблемы горизонта

Оценим размер области, которая была причинно связана на момент t_e , в настоящее время.

Горизонт t_e :

$$l_{H,e} = a(t_e) \int_{t_{Pl}}^{t_e} \frac{dt}{a(t)} \quad (14.23)$$

$$\begin{aligned} l_{H,e}(t_0) &= \frac{a_0}{a(t_e)} l_{H,e} = \frac{a_0}{a(t_e)} a(t_e) \int_{t_{Pl}}^{t_e} \frac{dt}{a} = a_0 \int_{t_{Pl}}^{t_e} \frac{dt}{a} = \\ &= \int da = \dot{a} dt \Rightarrow dt = \frac{da}{\dot{a}} = \\ &= a_0 \int_{a(t_{Pl})}^{a(t_e)} \frac{da}{a\dot{a}} = a_0 \int_{a(t_{Pl})}^{a(t_e)} \frac{da}{a^2 H} \end{aligned} \quad (14.24)$$

$a^2 H$ – быстро растет, так как aH растет;

Будем предполагать, что H меняется относительно медленно (т.е. рост a близок экспоненциальному);

Интеграл набирается на нижнем пределе:

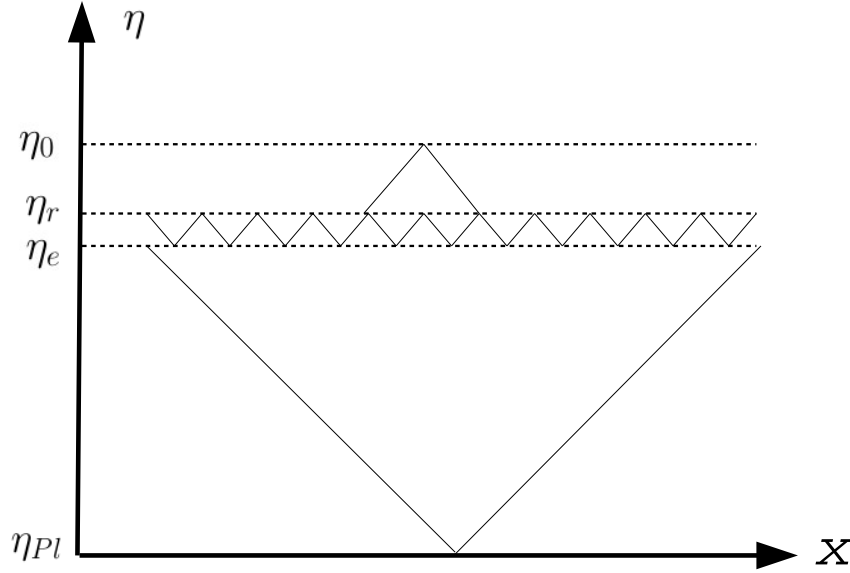
$$a_0 \int_{a(t_{Pl})}^{a(t_e)} \frac{da}{a^2 H} \sim \frac{a_0}{H(t_{Pl})} \int_{a(t_{Pl})}^{a(t_e)} \frac{da}{a^2} \sim \frac{a_0}{a(t_{Pl})H(t_{Pl})} \quad (14.25)$$

Сравним с горизонтом сейчас, если считать его от момента Большого взрыва = разогрева:

$$\frac{l_{H,e}(t_0)}{l_{H,0}} \simeq \frac{a_0}{a(t_{Pl})H(t_{Pl})} \times H_0 = \frac{a_0 H_0}{a(t_{Pl})H(t_{Pl})} \quad (14.26)$$

$$\frac{a_0 H_0}{a(t_{Pl})H(t_{Pl})} > 1 \Rightarrow \frac{l_{H,e}(t_0)}{l_{H,0}} > 1 \quad (14.27)$$

То же самое, что условие на кривизну (14.20) \Rightarrow проблема плоскостности и проблема горизонта решаются одновременно!



Оценка необходимой длительности инфляции
(14.22):

$$\frac{a(t_e)H(t_e)}{a(t_{Pl})H(t_{Pl})} \gtrsim \frac{a(t_e)H(t_e)}{a_0 H_0}$$

Из (14.22):

$$\frac{a(t_e)}{a(t_{Pl})} \gtrsim \frac{a(t_e)}{a_0} \frac{H(t_e)}{H_0} \frac{H(t_{Pl})}{H(t_e)} = \frac{T_0}{T_{reh}} \frac{H(t_{Pl})}{H_0} \quad (14.28)$$

Число e -фолдингов:

$$N_e^{(tot)} \equiv \ln \frac{a(t_e)}{a(t_{Pl})} \quad (14.29)$$

$$N_e^{(tot)} > \ln \frac{T_0}{H_0} + \ln \frac{H(t_{Pl})}{T_{reh}} \simeq \ln \frac{T_0}{H_0} + \ln \frac{M_{Pl}}{T_{reh}} \quad (14.30)$$

$$\frac{T_0}{H_0} \sim 10^{29}; \quad \ln 10^{29} \approx 67 \Rightarrow \quad (14.31)$$

$$N_e^{(tot)} > 67 + \ln \frac{M_{Pl}}{T_{reh}} \quad (14.32)$$

Для $T_{reh} = M_{Pl} \div 1 \text{ TeV}$

$$N_e^{(min)} \simeq 70 \div 100 \quad (14.33)$$

Каково минимальное время инфляции, в секундах?

Если инфляция приблизительно экспоненциальна, то

$$N_e^{tot} \sim H_{infl} \Delta t_{infl} \quad (14.34)$$

$$H_{infl} \sim H(t_e) = \frac{T_{reh}^2}{M_{Pl}^*} \quad [\text{см. (14.10)}] \quad (14.35)$$

$$\frac{T_{reh}^2}{M_{Pl}^*} \Delta t_{infl}^{min} = 70 \div 100 \Rightarrow \quad (14.36)$$

$$t_{infl}^{min} = M_{Pl}^* \frac{70 \div 100}{(M_{Pl} \div 1 \text{ TeV})^2} = 10^{-42} \div 10^{-9} \text{ сек} \quad (14.37)$$

Общие замечания

1. Эта оценка $N_e^{(min)}$ немного завышена из-за предположения о мгновенности разогрева. Принятое значение $N_e^{(min)} \simeq 60$.
2. Скорее всего $N_e^{(tot)} \gg N_e^{(min)} \Rightarrow \Omega_K \ll 0.001$.

3. Проблема энтропии решается разогревом в момент t_e (как – см. ниже)
4. Проблема начальных возмущений решается за счет квантовых флуктуаций поля инфлатона (см. ниже).
5. Проблема монополей.
 - Если $T_{reh} < M_{GUT}$, то монополи в горячей фазе никогда не рождались.
 - Если монополи рождались до инфляции, то инфляция сделала их плотность пренебрежимо малой.

Модели инфляции

Де-Ситтеровская вакуумная инфляция

- Какая материя нужна, чтобы получить инфляцию?
- Простейший вариант уже известен: плотность вакуума, Λ -член:

$$T_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \Rightarrow \rho = \Lambda, \quad p = -\Lambda = -\rho \quad (14.38)$$

$$a(t) = \text{const} \times e^{H_{vac}t} \quad (14.39)$$

$$H_{vac} = \sqrt{\frac{8\pi}{3} \frac{\Lambda}{M_{Pl}^2}} \quad (14.40)$$

- Проблема: Инфляция не кончается (Роджер Пенроуз не согласен).
- Надо придумать что-то похожее на Λ -член, но не Λ -член, и чтобы инфляция естественным образом кончалась.

Скалярное поле

- В некоторых случаях ведет себя очень похоже на Λ -член, но инфляция кончается естественным способом и может закончиться разогревом – инфлатон.
- Рассматривается теория вещественного скалярного поля φ с действием (для минимальной связи):

$$S_\varphi = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right] \quad (14.41)$$

Полное действие (без Λ -члена):

$$S = S_g + S_\varphi = \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(g, \varphi) \quad (14.42)$$

$\delta S = 0$ – общий принцип действия.

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta S_g + \delta S_\varphi = \\ &= \int d^4x \frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \int d^4x \left(\frac{\delta S_\varphi}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\delta S_\varphi}{\delta \varphi} \delta \varphi \right) = \\ &= \int d^4x \left(\frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta S_\varphi}{\delta g_{\mu\nu}} \right) \delta g_{\mu\nu} + \int d^4x \frac{\delta S_\varphi}{\delta \varphi} \delta \varphi \end{aligned} \quad (14.43)$$

$\delta g_{\mu\nu}$ и $\delta \varphi$ варьируются независимо, поэтому

$$\begin{cases} \frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta S_\varphi}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \rightarrow \text{Уравнения Эйнштейна} \\ \frac{\delta S_\varphi}{\delta \varphi} = 0 \rightarrow \text{Уравнения поля} \end{cases} \quad (14.44)$$

Требуется найти явный вид $\frac{\delta S_\varphi}{\delta\varphi}$.

$$\begin{aligned}\delta S_\varphi|_\varphi &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu\varphi \partial_\nu\varphi) - \delta(V(\varphi)) \right] = \\ &= \backslash \text{все считается просто } \star \backslash = \\ &= - \int d^4x \left[\partial_\mu(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu\varphi) + \sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial\varphi} \right] \delta\varphi \Rightarrow\end{aligned}\quad (14.45)$$

$$\frac{\delta S_\varphi}{\delta\varphi} = - \left[\partial_\mu(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu\varphi) + \sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial\varphi} \right] \quad (14.46)$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu\varphi) = -\frac{\partial V}{\partial\varphi}} \quad (14.47)$$

Однородная и изотропная космология

Работаем в плоской метрике

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\mathbf{x}^2 \quad (14.48)$$

Рассматриваем только однородные поля φ

$$\partial_i\varphi = 0; \quad i \geq 1 \quad (14.49)$$

Тогда

$$g = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & -a^2 & & \\ & & -a^2 & \\ & & & -a^2 \end{vmatrix} = -a^6 \Rightarrow \sqrt{-g} = a^3 \quad (14.50)$$

В уравнении остается только 0-компонента:

$$\frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial t} \left(a^3 g^{00} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) = -\frac{\partial V}{\partial\varphi} \Rightarrow \quad (14.51)$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0} \quad (14.52)$$

Скалярное поле как идеальная жидкость

ТЭИ однородного скалярного поля:

$$\delta S_\varphi|_g = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \Rightarrow \quad (14.53)$$

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi \partial_\nu\varphi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}(g, \varphi) \quad (14.54)$$

(см. (2.111))

В локально-лоренцевой системе отсчета, где $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

$$T_{00} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \quad (14.55)$$

$$T_{ij} = \left[\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \right] \delta_{ij} \quad (14.56)$$

Это похоже на идеальную жидкость с плотностью и давлением:

$$\rho(\varphi) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \quad (14.57)$$

$$p(\varphi) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \quad (14.58)$$

Если $\dot{\varphi}$ мало, то жидкость очень похожа на вакуум $\rho \approx -p$!

Размерности

$$T_{00} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \quad (14.59)$$

$$T_{ij} = \left[\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \right] \delta_{ij} \quad (14.60)$$

$$\rho(\varphi) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \quad (14.61)$$

$$p(\varphi) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \quad (14.62)$$

$$\begin{aligned} [V] = \text{GeV}^4 &\Rightarrow [\dot{\varphi}]^2 = \text{GeV}^4 \Rightarrow [\dot{\varphi}] = \text{GeV}^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow [\varphi] = \text{GeV}; \quad V \sim g\varphi^n \Rightarrow [g] = \text{GeV}^{4-n} \end{aligned} \quad (14.63)$$

Если $\dot{\varphi}$ мало (*медленное скатывание*), то ТЭИ скалярного поля очень похож на ТЭИ Λ -члена:

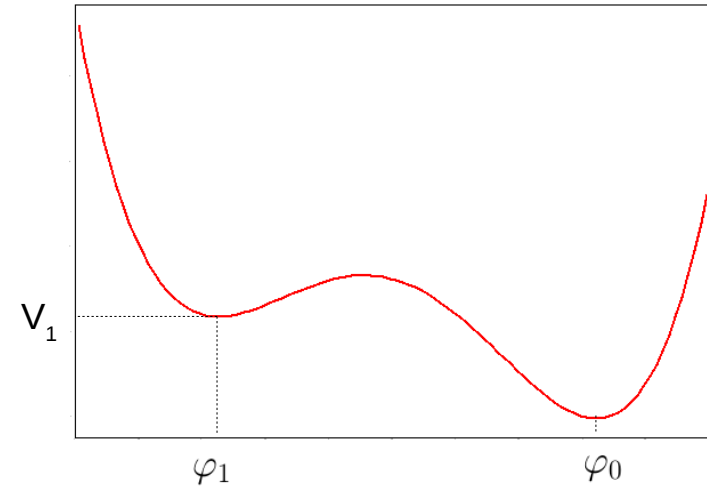
$$T \approx \begin{pmatrix} V(\varphi) & & & \\ & -V(\varphi) & & \\ & & -V(\varphi) & \\ & & & -V(\varphi) \end{pmatrix} \quad (14.64)$$

Если кроме поля φ («инфлатон») другой материи нет и поле меняется медленно, получим экспоненциальное расширение – инфляцию.

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \quad (14.65)$$

За счет чего можно получить медленное скатывание?

- Первая идея – сценарий Гута (Alan Guth), «старая инфляция» (1980)



Пока φ сидит в минимуме φ_1 , $\dot{\varphi} = 0$ точно, $p = -\rho$ точно.

φ_1 – ложный вакуум, φ_0 – истинный вакуум.

- Поле φ локально квантово туннелирует из φ_1 в φ_0 с образованием пузырей истинного вакуума \Rightarrow механизм остановки инфляции.
- Горячая материя образуется при столкновении стенок пузырей.
- Проблема: оказалось, что из-за инфляции пузыри никогда не сталкиваются \Rightarrow сценарий не работает.

Основные режимы для уравнения скалярного поля

$$(14.65) : \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \quad (14.66)$$

Уравнение (14.65) похоже на уравнение осциллятора с трением.

Отсюда два основных режима для решений:

- Режим быстрого скатывания \rightarrow осцилляции
- Режим медленного скатывания \rightarrow инфляция

1. Режим быстрого скатывания

$$H\dot{\varphi} \ll \ddot{\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \quad (14.67)$$

– осцилляции вблизи минимума $V(\varphi)$

Пример: потенциал вблизи минимума квадратичен:

$$V(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2 \quad (14.68)$$

Учтем явно малый член с $\dot{\varphi}$. Из (14.65):

$$\ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} + m^2\varphi = 0 \quad (14.69)$$

Уравнение гармонического осциллятора с зависящим от времени коэффициентом затухания.

$$\varphi(t) = \frac{1}{a^{3/2}} \chi(t) \quad (14.70)$$

$$\ddot{\chi} + \left[m^2 - \frac{3}{2} \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] \chi = 0 \quad (14.71)$$

Для степенных и экспоненциальных $a(t)$ имеет место:

$$\ddot{a} \sim \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} \sim \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H^2 \quad (14.72)$$

Потребуем $m^2 \gg H^2$ (иначе не будет быстрого скатывания). Тогда

$$\ddot{\chi} + m^2\chi = 0 \Rightarrow \quad (14.73)$$

$$\chi(t) = \chi_* \cos(mt + \beta) \Rightarrow \quad (14.74)$$

$$\varphi(t) = \frac{\chi_*}{a^{3/2}(t)} \cos(mt + \beta) \quad (14.75)$$

– осцилляции с затуханием.

2. Режим медленного скатывания

- «Первое условие медленного скатывания»

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi) \quad (14.76)$$

– на самом деле условие вакуумоподобности:

$$p(\varphi) = -\rho(\varphi) + \dot{\varphi}^2 \approx -\rho(\varphi) \quad (14.77)$$

При доминировании $V(\varphi)$ получаем инфляцию.

- Медленное скатывание за счет «вязкости»

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \quad (14.78)$$

Трение велико, если

$$\ddot{\varphi} \ll 3H\dot{\varphi} \Rightarrow \frac{\ddot{\varphi}}{3H\dot{\varphi}} \ll 1 \quad (14.79)$$

Имеют место два условия:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2V(\varphi)} \ll 1 - \text{из ТЭИ} \quad (14.80)$$

$$\frac{\ddot{\varphi}}{3H\dot{\varphi}} \ll 1 - \text{из ур. движения} \quad (14.81)$$

- Если выполнены оба условия, то имеется *квази-экспоненциальное* расширение Вселенной и уравнения сильно упрощаются:

Действительно, исходим из полной системы:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \\ H^2 = \frac{8\pi}{3M_{Pl}^2} \left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \right) \end{cases} \quad (14.82)$$

При выполнении условий (14.80), (14.81) приводятся к виду:

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{3H}V'(\varphi) \quad (14.83)$$

$$H = \frac{1}{M_{Pl}} \left(\frac{8\pi}{3}V(\varphi) \right)^{1/2} \quad (14.84)$$

Из (14.84):

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{M_{Pl}} \left(\frac{8\pi}{3}V \right)^{1/2} \Rightarrow \quad (14.85)$$

$$a(t) = a_i \exp \left\{ \left(\frac{8\pi}{3M_{Pl}^2} \right)^{1/2} \int_{t_i}^t [V(\varphi(t))]^{1/2} dt \right\} \quad (14.86)$$

Расширение близко к экспоненциальному в том смысле, что изменение H за хаббловское время много меньше H :

$$\dot{H} \frac{1}{H} \ll H \Rightarrow \frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1 \quad (14.87)$$

Из (14.84):

$$\dot{H} = \frac{1}{2M_{Pl}} \left(\frac{8\pi}{3V} \right)^{1/2} V'(\varphi)\dot{\varphi} \quad (14.88)$$

Из (14.84) и (14.88):

$$\begin{aligned} \frac{\dot{H}}{H} &= \frac{1}{2} \frac{V'}{V} \dot{\varphi} = \backslash(14.83)\backslash = -\frac{3}{2} \frac{\dot{\varphi}^2}{V} H \Rightarrow \\ &\left| \frac{\dot{H}}{H^2} \right| = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varphi}^2}{V} \ll 1 \end{aligned} \quad (14.89)$$

Из (14.80) следует, что это и правда так при медленном скатывании.

Лекция 15

Модели инфляции. Вечная хаотическая инфляция. Мультиверс.
Иерархия и типы мультиверсов.

Условия медленного скатывания в виде условий на потенциал скалярного поля.

Условия медленного скатывания:

$$(14.80): \quad \frac{\dot{\varphi}^2}{2V(\varphi)} \ll 1 \text{ — из ТЭИ}$$

$$(14.81): \quad \frac{\ddot{\varphi}}{3H\dot{\varphi}} \ll 1 \text{ — из ур. движения}$$

Условия (14.80) и (14.81) переформулируем в виде условий на потенциал V .

(14.84) подставляем в (14.83), получаем

$$\dot{\varphi} = -\frac{M_{Pl}}{(24\pi)^{1/2}} \frac{V'}{V^{1/2}} \quad (15.1)$$

Подставляем это $\dot{\varphi}$ в (14.80):

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2V(\varphi)} = \frac{M_{Pl}^2}{48\pi} \left(\frac{V'}{V}\right)^2 \ll 1 \quad (15.2)$$

Теперь используем (14.81).

Из (15.1):

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= -\frac{M_{Pl}}{(24\pi)^{1/2}} \left(\frac{V''}{V^{1/2}} - \frac{1}{2} \frac{V'^2}{V^{3/2}} \right) \dot{\varphi} = \\ &= \left((14.84) \Rightarrow V^{1/2} = HM_{Pl} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/2} \right) = \\ &= -\frac{M_{Pl}^2}{8\pi} \left[\frac{V''}{V} - \frac{1}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \right] H\dot{\varphi} \quad (15.3) \end{aligned}$$

(15.2) и (15.3) подставляем в (14.81):

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{\varphi}}{3H\dot{\varphi}} &= -\frac{M_{Pl}^2}{24\pi} \frac{V''}{V} + \frac{M_{Pl}^2}{48\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left| \frac{M_{Pl}^2}{24\pi} \frac{V''}{V} \right| \ll 1 \quad (15.4) \end{aligned}$$

(15.2) и (15.4) – два условия на потенциалы, которые следуют из двух условий (14.80) и (14.81)

Два параметра медленного скатывания:

$$\varepsilon = \frac{M_{Pl}^2}{16\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1 \quad (15.5)$$

$$\eta = \frac{M_{Pl}^2}{8\pi} \frac{V''}{V} \ll 1 \quad (15.6)$$

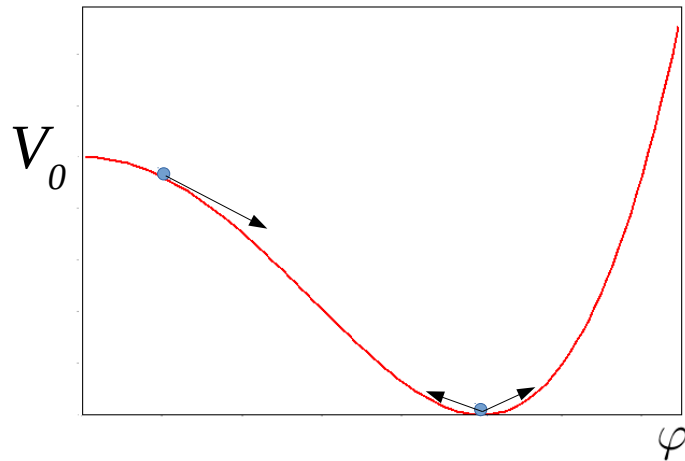
Условие (естественного!) медленного скатывания:

$$\varepsilon \ll 1, \quad \eta \ll 1 \quad (15.7)$$

Связь с условиями (14.80), (14.81):

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2V} = \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{\ddot{\varphi}}{3H\dot{\varphi}} = \frac{1}{3}(\varepsilon - \eta) \quad (15.8)$$

ε, η действительно однозначно связаны с (14.80), (14.81), но выражаются исключительно через V .



- Хиггс-подобный потенциал
- Поле застревает вблизи нуля, запускает инфляцию, когда скатывается вниз инфляция прекращается, осцилляции рождают частицы \Rightarrow горячий взрыв \Rightarrow решение проблемы энтропии.

Подробный пример (популярная модель):

Поле вблизи нуля

$$V(\varphi) = V_0 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \quad (\lambda - \text{безразмерно!}) \quad (15.9)$$

$$\varepsilon = \frac{M_{Pl}^2}{16\pi} \frac{\lambda^2 \varphi^6}{V_0^2} \quad (15.10)$$

$$\eta = -\frac{M_{Pl}^2}{8\pi} \frac{3\lambda\varphi^2}{V_0} \quad (15.11)$$

Малое поле φ обеспечивает медленное скатывание. Почему начальное поле может быть мало?

- $\varphi = 0$ получается естественным образом, если в начальной горячей (возможно неоднородной) Вселенной эффективный потенциал имеет минимум в нуле.
- Начальная горячая Вселенная расширяется, и потенциал переходит в 0-температурный, запуская инфляцию.

Специальный случай: медленное скатывание заканчивается при небольшом значении поля (за счет выхода на крутой участок)

$$\lambda\varphi_e^4 \ll V_0 \quad (15.12)$$

(противоположный случай напоминает другой сценарий – хаотической инфляции)

При выполнении (15.12):

$$\varepsilon = \frac{M_{Pl}^2}{16\pi} \frac{\lambda\varphi^2}{V_0} \times \frac{\lambda\varphi^4}{V_0} \ll |\eta| \quad (15.13)$$

поэтому конец инфляции определяется условием $|\eta| \sim 1$:

$$|\eta_e| = \frac{M_{Pl}^2}{8\pi} \frac{3\lambda\varphi_e^2}{V_0} \sim 1 \Rightarrow \quad (15.14)$$

$$\varphi_e^2 \sim \frac{V_0}{3\lambda} \frac{8\pi}{M_{Pl}^2} \Rightarrow \quad (15.15)$$

$$\lambda\varphi_e^4 \ll V_0 \Rightarrow \lambda \left(\frac{V_0}{3\lambda} \frac{8\pi}{M_{Pl}^2} \right)^2 \ll V_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_0}{M_{Pl}^4} \ll \left(\frac{3}{8\pi} \right)^2 \lambda \Rightarrow V_0 \ll \left(\frac{3}{8\pi} \right)^2 \lambda M_{Pl}^4 \quad (15.16)$$

– это условия сценария новой инфляции при малых полях.

- Правильный масштаб флуктуаций получается при $\lambda \sim 10^{-13}$.
- Поля планковского масштаба не нужны!

Температура разогрева

Предполагая, что почти вся плотность энергии $\sim V_0$ переходит в тепло:

$$g_* T_{reh}^4 \lesssim V_0 \ll \left(\frac{3}{8\pi} \right)^2 \lambda M_{Pl}^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{reh} \ll \left[\frac{\left(\frac{3}{8\pi} \right)^2 \lambda}{g_*} \right]^{1/4} M_{Pl} \sim 10^{-3} M_{Pl} \quad (15.17)$$

– без подгонки параметров температура не слишком высока.

Число e-фолдингов, для начала инфляции с поля φ

$$N_e(\varphi) = \ln \frac{a_e}{a(\varphi)} \quad (15.18)$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = H(t) \Rightarrow d \ln a = H(t) dt \Rightarrow N_e(\varphi) = \int_{t_\varphi}^{t_e} H(t) dt \quad (15.19)$$

Из уравнений медленного скатывания (14.83), (14.84)

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{3H} V'(\varphi) \quad (15.20)$$

$$H = \frac{1}{M_{Pl}} \left(\frac{8\pi}{3} V(\varphi) \right)^{1/2} \quad (15.21)$$

получаем

$$N_e(\varphi) =$$

$$= \left\langle \varphi \text{ как часы : } t \rightarrow \varphi(t), d\varphi = \dot{\varphi} dt, dt = \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} \right\rangle =$$

$$= \int_{\varphi}^{\varphi_e} H(\varphi) \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = \left\langle (15.20), (15.21) \star \right\rangle =$$

$$= \frac{8\pi}{M_{Pl}^2} \int_{\varphi_e}^{\varphi} \frac{V}{V'} d\varphi \quad (15.22)$$

$$N_e(\varphi) = \frac{8\pi}{M_{Pl}^2} \int_{\varphi_e}^{\varphi} \frac{V}{V'} d\varphi \quad (15.23)$$

Для «новой инфляции»:

$$N_e(\varphi) = \frac{8\pi}{M_{Pl}^2} \left[\varphi^2 \frac{V_0}{2\lambda} \frac{1}{\varphi^4} \Big|_{\varphi_e}^{\varphi} - \frac{1}{4} \frac{\varphi^2}{2} \Big|_{\varphi_e}^{\varphi} \right] =$$

$$= \left\langle \lambda\varphi_e^4 \ll V_0 \Rightarrow \frac{1}{4} \frac{\varphi^2}{2} \Big|_{\varphi_e}^{\varphi} \rightarrow 0 \right\rangle \simeq \frac{4\pi}{M_{Pl}^2} \frac{V_0}{\lambda} \frac{1}{\varphi^2} \quad (15.24)$$

$$N_e(\varphi) = \frac{4\pi}{M_{Pl}^2} \frac{V_0}{\lambda} \frac{1}{\varphi^2} \quad (15.25)$$

$$N_e^{(tot)} = \frac{4\pi V_0}{\lambda M_{Pl}^2 \varphi_i^2} \quad (15.26)$$

Как оценить порядок?

На протяжении инфляции (из (14.84) или (15.21))

$$H = \frac{1}{M_{Pl}} \left(\frac{8\pi V}{3} \right)^{1/2} \approx \frac{1}{M_{Pl}} \left(\frac{8\pi V_0}{3} \right)^{1/2} \quad (15.27)$$

– меняется мало.

Если φ_i имеет порядок квантовой флуктуации φ :

$$\varphi_i \sim \delta\varphi \sim H \quad (15.28)$$

тогда в (15.26)

$$\varphi_i^2 \sim \frac{1}{M_{Pl}^2} \frac{8\pi V_0}{3} \quad (15.29)$$

Подставляем и получаем

$$N_e^{(tot)} \approx \frac{3}{2\lambda} \sim 10^{13} \quad (15.30)$$

а нужно всего $N_e^{(tot)} \sim 60 \div 100$.

Вселенная раздувается в $\sim 10^{10^{13}}$ раз – «инфляционно большое число».

Видимая Вселенная – крошечный кусочек инфляционного пузыря.

● Проблема сценария «новой инфляции» – противояснественное значение $\lambda \sim 10^{-13}$ – очень мало, и не появляется естественным образом в GUT.

Сценарий хаотической инфляции Андрея Линде
Натуральная инфляция, инфляция в сильном поле

Насколько сильно условия (15.5), (15.6)

$$\varepsilon = \frac{M_{Pl}^2}{16\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1 \quad (15.31)$$

$$\eta = \frac{M_{Pl}^2}{8\pi} \frac{V''}{V} \ll 1 \quad (15.32)$$

ограничивают вид потенциала?

Рассмотрим потенциалы

$$V = g\varphi^n \quad (15.33)$$

$$\frac{V'}{V} = \frac{n}{\varphi} \quad (15.34)$$

$$\varepsilon = \frac{M_{Pl}^2}{16\pi} \frac{n^2}{\varphi} \ll 1 \Rightarrow \varphi \gg M_{Pl} \frac{n}{4\pi} \quad (15.35)$$

$$\frac{V''}{V} = \frac{n(n-1)}{\varphi} \quad (15.36)$$

$$\eta = \frac{M_{Pl}^2}{8\pi} \frac{n(n-1)}{\varphi^2} \ll 1 \Rightarrow \varphi \gg M_{Pl} \sqrt{\frac{n(n-1)}{8\pi}} \quad (15.37)$$

● При не слишком больших n режим медленного скатывания автоматически реализуется для

$$\varphi \gg M_{Pl} \quad (15.38)$$

Не противоречит ли такое значение поля условиям применимости классической гравитации?

Условие классичности:

$$V(\varphi) \ll M_{Pl}^4 \quad (15.39)$$

$$V(\varphi) = g\varphi^n \ll M_{Pl}^4 \Rightarrow \varphi \ll \left(\frac{M_{Pl}^4}{g}\right)^{1/n} \quad (15.40)$$

Нужно обеспечить:

$$M_{Pl} \ll \varphi \ll \left(\frac{M_{Pl}^4}{g}\right)^{1/n} \quad (15.41)$$

Это можно получить за счет малой постоянной g (в планковских единицах)
[что согласуется с получением реалистичных амплитуд начальных возмущений и не вызывает отторжения в КТП]

Примеры

$$V_2(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2 \quad (15.42)$$

$$\left(\frac{M_{Pl}^4}{m^2/2}\right)^{1/2} \gg M_{Pl} \Rightarrow m \ll M_{Pl} \quad (15.43)$$

$$V_4(\varphi) = \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \quad (15.44)$$

$$\left(\frac{M_{Pl}^4}{\lambda/4}\right)^{1/4} \gg M_{Pl} \Rightarrow \lambda \ll 1 \quad (15.45)$$

Начало инфляции

- Хаотические начальные условия:

Вселенная неоднородна на всех масштабах вплоть до планковского – радиусы кривизны $\sim M_{Pl}^{-1} = l_{Pl}$, $\rho \sim M_{Pl}^4$.

- Имеется инфлатон со степенным потенциалом. Естественными условиями для него являются

$$V = g\varphi^n \sim M_{Pl}^4 \Rightarrow \varphi \sim \left(\frac{M_{Pl}^4}{g}\right)^{1/n} \quad (15.46)$$

- Поле сильно неоднородно, поэтому также

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \sim M_{Pl}^4 \quad (15.47)$$

- Вклад кривизны в уравнение «Фридмана» существенен.
- Вклады кривизны и кинетического члена (15.47) при расширении падают как $1/a^2$, но $V(\varphi)$ меняется медленно («медленное скатывание»).
- В результате случайной «квантовой» флуктуации может возникнуть область чуть больше l_{Pl} , где градиентные члены и вклад кривизны меньше $V(\varphi)$. Она попадает в режим медленного скатывания и начинает раздуваться.
- Инфляция продолжается, пока не нарушается условие $M_{Pl} \ll \varphi$, после чего поле переходит в режим осцилляций и приводит к рождению частиц (разогрев). Нужно взаимодействие φ с другими полями.

Ограничение на начальную температуру.

Вся энергия поля переходит в тепло:

$$\rho \sim g_* T^4 \lesssim V(\varphi \sim M_{Pl}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{reh} \lesssim T_{max} \sim \left[\frac{V(\varphi \sim M_{Pl})}{g_*} \right]^{1/4} \quad (15.48)$$

Из $V(\varphi) \ll M_{Pl}^4$ (классичность) следует, что $T_{reh} \ll M_{Pl}$

Сценарий хаотической инфляции, кратко:

- Предельно ранняя Вселенная заполнена полем инфлатона планковской плотности, что плохо описывается классической физикой и даже наличие гладкого пространства-времени проблематично.
- Некоторые кластеры планковского размера раздуваются за счет инфляции в «инфляционные пузыри», и то, что мы наблюдаем малая часть одного из пузырей.

Сколько e -фолдингов дает хаотическая инфляция

$N_e(\varphi)$ из (15.23):

$$N_e(\varphi) = \frac{8\pi}{M_{Pl}^2} \int_{\varphi_e}^{\varphi} \frac{V}{V'} d\varphi \quad (15.49)$$

Для $V = g\varphi^n$

$$\int_{\varphi_e}^{\varphi} \frac{V}{V'} d\varphi = \frac{1}{2n} (\varphi^2 - \varphi_e^2) = \backslash \varphi \gg \varphi_e \backslash \simeq \frac{1}{2n} \varphi^2$$

$$(15.50)$$

$$N_e(\varphi) = \frac{4\pi}{n} \frac{\varphi^2}{M_{Pl}^2} \quad (15.51)$$

Считаем, что в начале инфляции $V(\varphi_i) \sim M_{Pl}^4 \Rightarrow$

$$g\varphi_i^n \sim M_{Pl}^4 \Rightarrow \varphi_i \sim \frac{1}{g^{1/n}} M_{Pl}^{4/n} \Rightarrow \quad (15.52)$$

$$N_e^{(tot)} = N_e(\varphi_i) = \frac{4\pi}{n} \left(\frac{M_{Pl}^{4-n}}{g} \right)^{2/n} \quad (15.53)$$

Примеры

$$n = 2; g = \frac{m^2}{2} \Rightarrow N_e^{(tot)} = 4\pi \frac{M_{Pl}^2}{m^2} \quad (15.54)$$

$$n = 4; g = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow N_e^{(tot)} = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} \quad (15.55)$$

$\delta\rho/\rho \sim 5 \cdot 10^{-5} \Rightarrow$

$$n = 2: m \sim 10^{-6} M_{Pl} \Rightarrow N_e^{(tot)} \sim 10^{13} \quad (15.56)$$

$$n = 4: \lambda \sim 10^{-13} \Rightarrow N_e^{(tot)} \sim 10^7 \quad (15.57)$$

Планковский масштаб растягивается инфляцией в $10^{10^{13}}$ или в 10^{10^7} раз \Rightarrow кривизна нулевая.

Как получить положительную кривизну?

A.D. Linde, arXiv:astro-ph/0303245

$$\Omega_K \sim -0.1 \Rightarrow N_e \approx 60 \pm \sim 1\% \Rightarrow \delta\rho/\rho \sim 1$$

$$V(\varphi) = \frac{m^2\varphi^2}{2} \exp\left(\frac{\varphi}{CM_{Pl}}\right); P \sim \exp\left(-\frac{3M_{Pl}^4}{8V(\varphi)}\right) \quad (15.58)$$

$$\frac{M_{Pl}}{2} \lesssim \varphi \lesssim CM_{Pl} \Rightarrow \varphi_{in} = CM_{Pl} \text{ везде!} \quad (15.59)$$

Вселенная гладкая уже в начале инфляции.

Модель Старобинского (1979)

Модель не содержит дополнительных полей, но учитывает квантовые поправки к лагранжиану Гильберта-Эйнштейна:

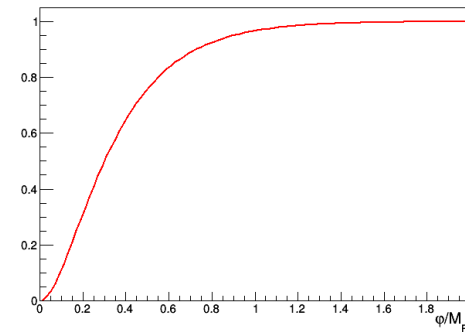
$$S = -\frac{M_{Pl}^2}{16\pi} \int dx^4 \sqrt{-g} \left(R - \frac{R^2}{6M^2} \right) \quad (15.60)$$

M имеет размерность массы, свободный параметр.

Можно показать, что любая теория $f(R)$ эквивалентна обычной теории Эйнштейна со скалярным полем с некоторым потенциалом $V(\varphi)$.

Для теории (15.60):

$$V(\varphi) = \frac{3M^2M_{Pl}^2}{32\pi^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}} \frac{\varphi}{M_{Pl}}\right) \right]^2 \quad (15.61)$$



- Модель Старобинского эквивалентна модели хаотической инфляции с инфлатонным полем (15.61)
- «Натуральная инфляция» $V(\varphi) = (m^2/2)\varphi^2$ закрыта низким значением скалярно-тензорного отношения $r < 0.07$, но модель Старобинского предсказывает $r \sim 0.001$. [arXiv:1502.02114, arXiv:1807.06211].

Генерация космологических возмущений

- Скалярные возмущения: *усиленные инфляцией* вакуумные флуктуации поля инфлатона.
- Тензорные возмущения: *усиленные инфляцией* вакуумные флуктуации гравитационного поля (метрики).

Количественная теория дает:

- Скалярно/тензорное отношение r
- Спектральные индексы скалярных и тензорных мод возмущений

Инфляционное усиление квантовых флуктуаций поля инфлатона

- Квантовые флуктуации поля инфлатона φ являются гауссовым случайным полем.
- Разложение среднего квадрата отклонения по импульсам (длинам волн), расходящийся интеграл:

$$\langle \varphi^2 \rangle = \langle 0 | \varphi^2(x) | 0 \rangle = \int_0^\infty \frac{dq}{\sqrt{q^2 + m^2}} \frac{q^2}{8\pi^2} \approx \int_0^\infty \frac{q^2}{8\pi^2} \frac{dq}{q} \quad (15.62)$$

- Спектр мощности квантовых флуктуаций

$$\mathcal{P}_\varphi(q) = \frac{q^2}{8\pi^2} \quad (15.63)$$

- Амплитуда квантовых флуктуаций, по определению

$$\delta\varphi(q) \equiv \sqrt{\mathcal{P}_\varphi(q)} \Rightarrow \delta\varphi(q) = \frac{q}{2\sqrt{2}\pi} \quad (15.64)$$

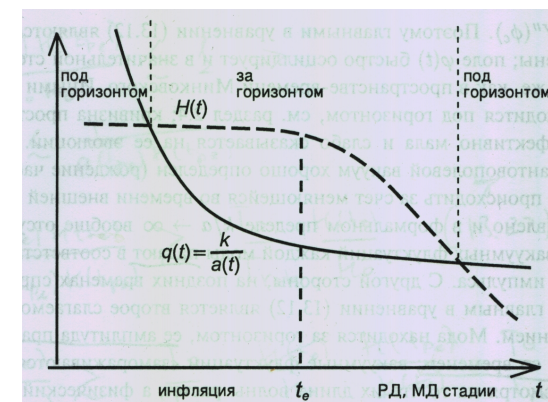
- На фазе горячего взрыва: Расширение с замедлением. Горизонт событий растет быстрее масштабного фактора. \Rightarrow константные моды входят под горизонт, и начинают осциллировать.

- На фазе инфляции – обратная картина: Расширение с ускорением. Масштабный фактор растет быстрее горизонта. \Rightarrow короткие вакуумные флуктуации выходят за горизонт и замораживаются \Rightarrow

- Фиксируется большая амплитуда коротких флуктуаций.

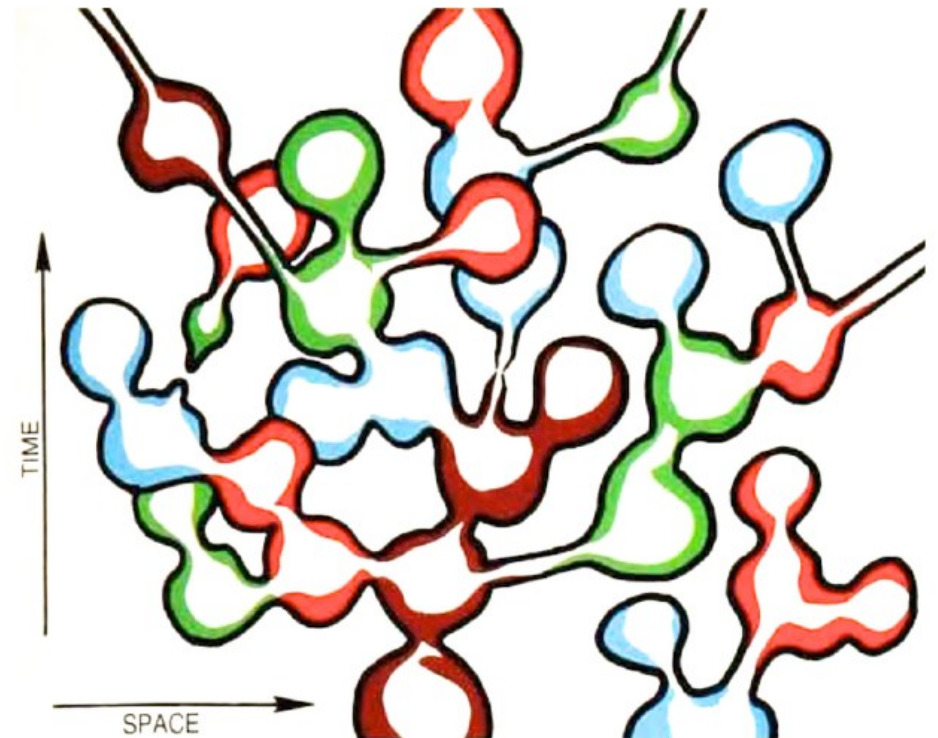
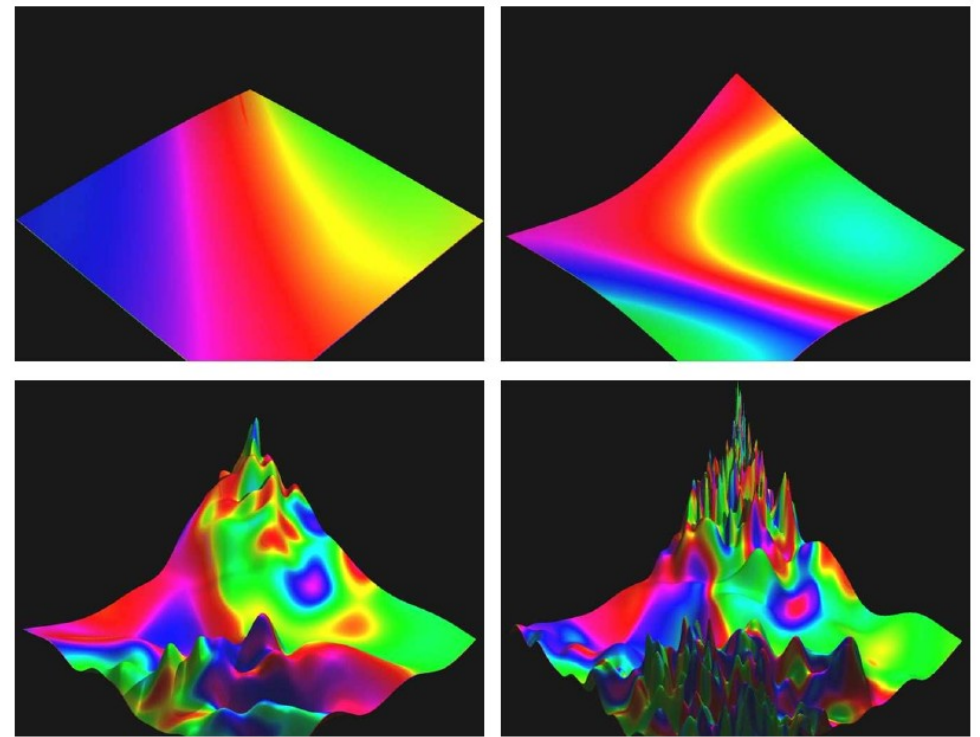
- При фиксированной амплитуде длина волны резко увеличивается,
 - амплитуда для этой волны становится много больше, чем предписывается формулой (15.64) –
 - это есть механизм усиления вакуумных флуктуаций за счет инфляции.

- Эти усиленные флуктуации есть те константные моды, которые дают начальные условия для эволюции возмущений на горячей стадии.



Вечная инфляция и Мультиверс

- Инфляция идет, моды квантовых флуктуаций на стадии инфляции выходят за горизонт и замораживаются.
- В масштабе горизонта ДеСиттера устанавливаются новые значения почти однородного поля инфлатона.
- Вся область инфляции оказывается разбита на под-области со своими полями инфлатона \Rightarrow Вселенная в целом сильно неоднородна.
- В некоторых областях инфлатон велик, и там усиливается раздувание.
- В некоторых областях инфлатон мал, там инфляция завершается горячим взрывом.
- Там, где инфляция продолжается (инфлатон велик), новые квантовые возмущения выходят за горизонт и т.д.
... \Rightarrow рекурсия \Rightarrow Вечная инфляция
- Разные области представляют собой независимые «локальные» вселенные. На стадии горячего взрыва могут быть по-разному нарушены симметрии, тогда в разных вселенных будет разная физика.
- Теория хаотической инфляции естественно приводит к существованию ансамблей вселенных, чего требует формализм теории космологических возмущений.
- Еще одна загадка решается: тонкая подгонка фундаментальных констант. Слабый антропный принцип.



Мультивёрс(ы) (~ По Максy Тегмарку)

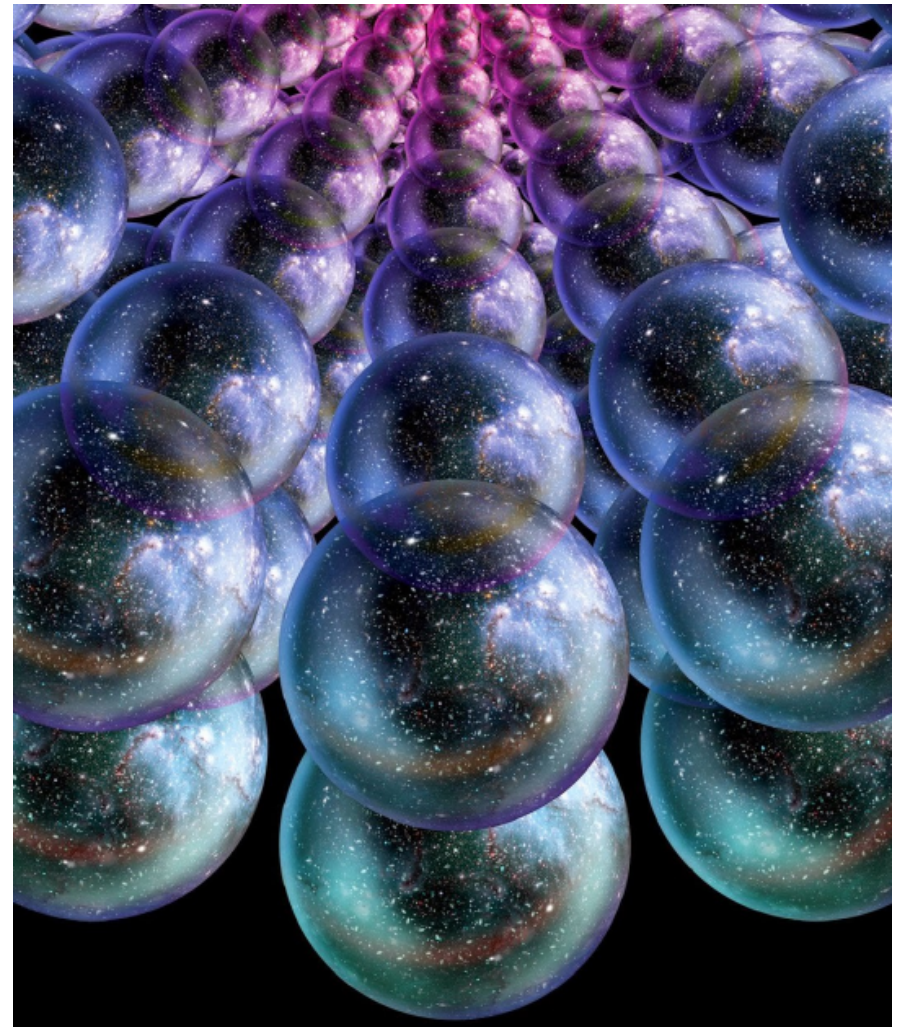


Мультивёрс 1-го уровня

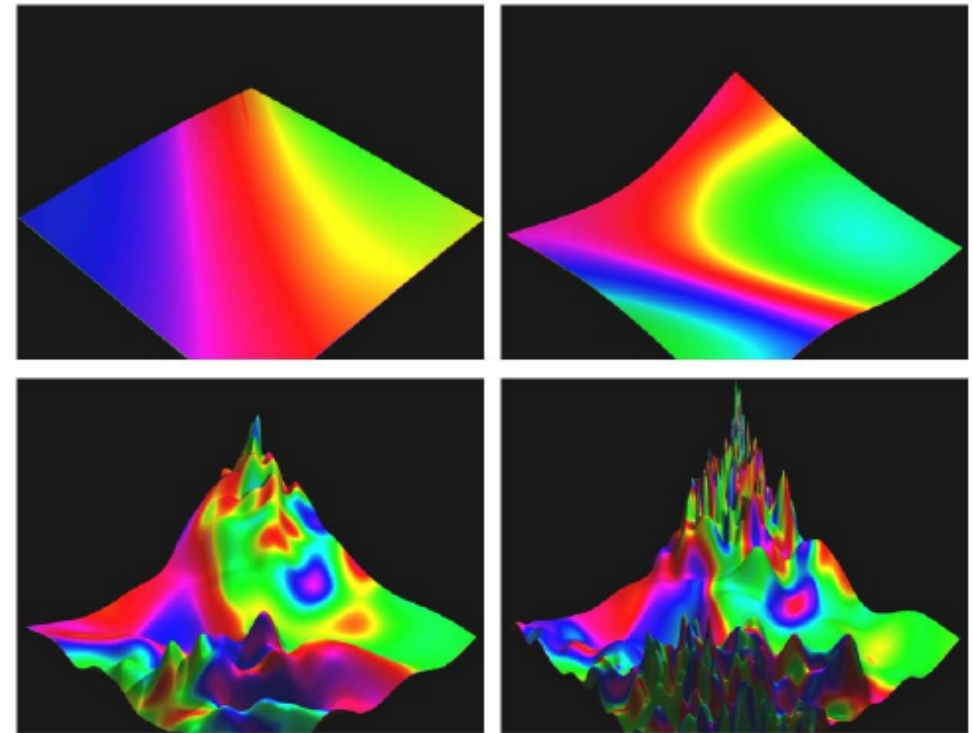
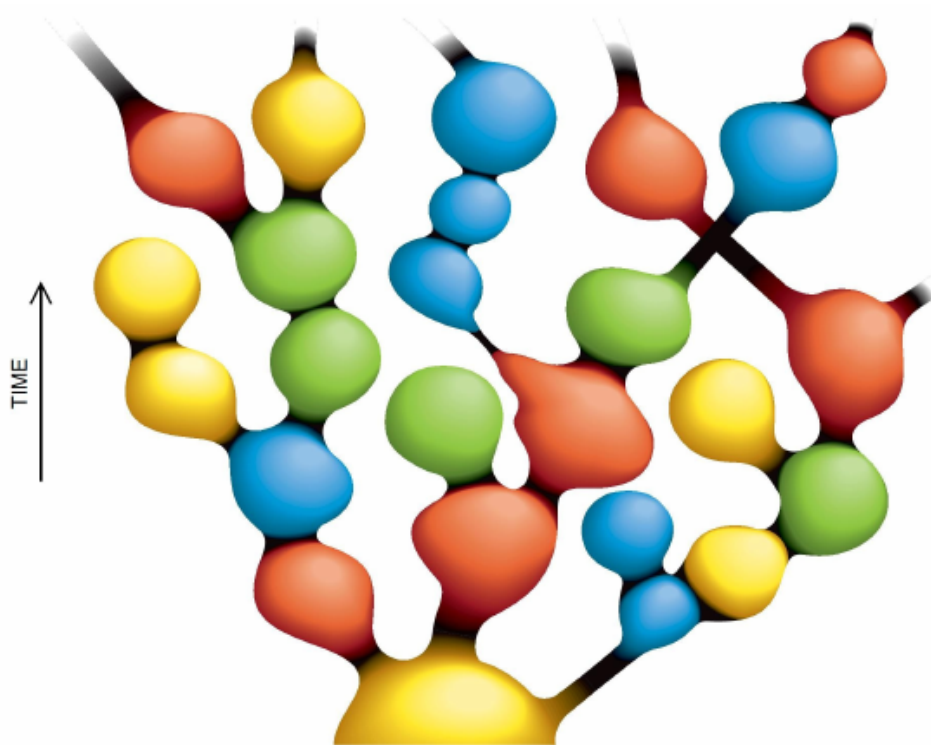
Наблюдаемая нами часть Вселенной (Метагалактика) - лишь крошечная часть нашей «локальной вселенной» - пузыря инфляционной космологии.

Существует невообразимо огромное число других метагалактик, которые не могут быть с нами причинно связаны.

Где-то в мультивёрсе 1-го уровня есть точная копия Солнечной системы и неизмеримо больше не очень точных копий.



Мультивёрс 2-го уровня - хаотическая вечная инфляция



Разные локальные пузыри инфляции – локальные вселенные – могут содержать разную физику.

Проблема тонкой подгонки параметров – малое изменение фундаментальных констант ведет к «взрывному нарушению» стабильности структур.

Слабый антропный принцип: мы наблюдаем тонкую настройку параметров потому, что в тех вселенных, где ее нет, нет и наблюдателей (Андрей Линде)

Мультивёрс 3-го уровня - многомировая Вселенная Эверетта (исторически первая физическая модель мультивселенной, 1957)

Квантовая механика =

= уравнение Шредингера + коллапс волновой функции при наблюдении

Что такое коллапс волновой функции – непонятно.

Хью Эверетт:

Никакого коллапса волновой функции нет, все, включая Вселенную, описывается только уравнением Шредингера (или его обобщением), коллапс волновой функции и случайность, связанная с коллапсом – иллюзия наблюдателя, погруженного в квантовую Вселенную.

К многомировой интерпретации квантовой механики. Клонирование прибора, сознания и вселенной

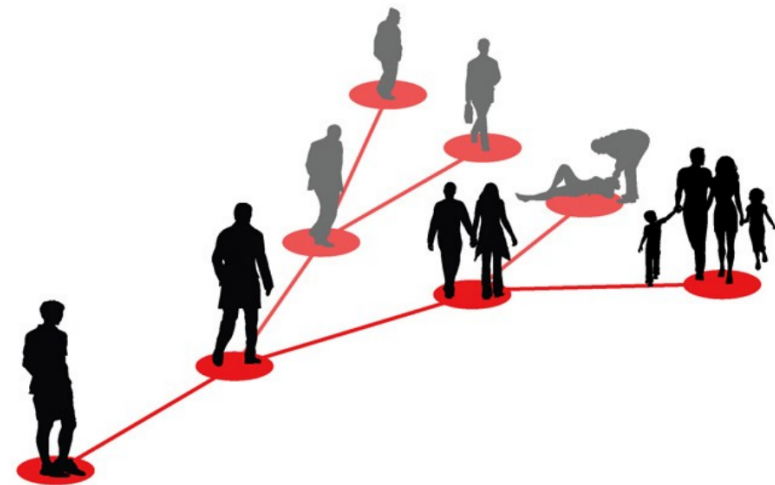
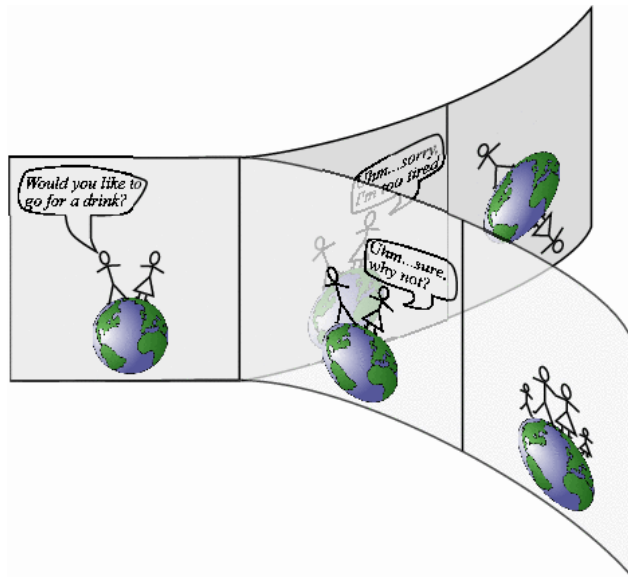
$|\uparrow\rangle$ – спин вверх
 $|\downarrow\rangle$ – спин вниз

$$|\uparrow\rangle|D_0\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle|D_\uparrow\rangle; \quad |\downarrow\rangle|D_0\rangle \rightarrow |\downarrow\rangle|D_\downarrow\rangle$$

$$(a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle)|D_0\rangle \rightarrow a|\uparrow\rangle|D_\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle|D_\downarrow\rangle$$

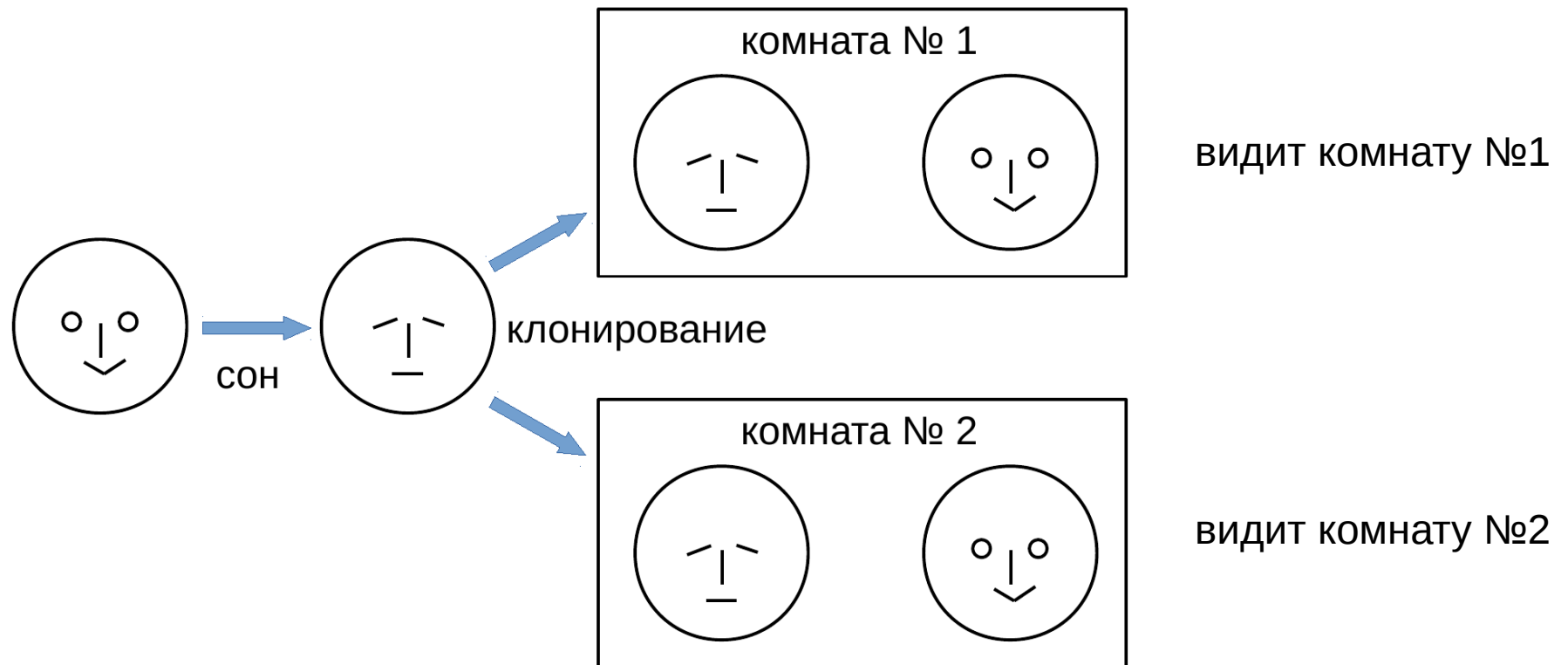
$$(a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle)|D_0\rangle|M_0\rangle \rightarrow a|\uparrow\rangle|D_\uparrow\rangle|M_\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle|D_\downarrow\rangle|M_\downarrow\rangle$$

$$(a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle)|D_0\rangle|M_0\rangle|U_0\rangle \rightarrow a|\uparrow\rangle|D_\uparrow\rangle|M_\uparrow\rangle|U_\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle|D_\downarrow\rangle|M_\downarrow\rangle|U_\downarrow\rangle$$



Как клонирование сознания порождает иллюзию случайности

Мысленный эксперимент Макса Тегмарка - клонирование



Случайности нет, но каждый из клонов субъективно воспринимает случайный результат 1 или 2

Если человеческое сознание заменить на ИИ, то эксперимент будет не мысленный, а вполне реальный.

Не безумие ли предполагать, что вся Вселенная находится в квантовом состоянии, описываемом единственной волновой функцией?

Анизотропия микроволнового фона описывается квантовыми флуктуациями масштаба видимой части вселенной и правильно предсказывается в предположении, что все поле инфлатона – единый квантовый объект

Квантовая теория на уровне всей видимой Вселенной дает предсказания, подтверждаемые экспериментом

Вся совокупность квантовых миров многомировой интерпретации Эверетта - Мультивёрс 3-го уровня.

В каком смысле вселенные Мультиверса существуют при том, что все они прямо недоступны наблюдению?

Другие вселенные входят в теорию, которая дает правильные предсказания для эксперимента, и без этих объектов работать не может.

Мультивёрс 4-го уровня - математический Мультивёрс Макса Тегмарка

Природа математики

Каков триллионный знак десятичного разложения $\sqrt{2}$?

Кто бы ни считал, ответ будет один и тот же, так как этот объект объективно существовал еще до того, как его кто-то взялся считать.

Мир математических форм существует объективно.

Мир математических форм – часть реальности, а не выдумка

Природа элементарных объектов физики

Либо при описании элементарных объектов физики будет иметь место регрессия в бесконечность (это плохо)

Либо регрессия оборвется, и тогда самые элементарные объекты будут иметь чисто математическое внешнее описание.

На этом уровне различие между математикой и физикой исчезает.

Гипотеза: Наблюдаемый нами мир **есть** математическая структура.

Вопрос: почему именно такая математическая структура, которая предписывает именно те законы природы, которые мы наблюдаем? Чем она выделена?

Ответ (Тегмарк): В принципе, она ничем не выделена; все непротиворечивые математические структуры есть реальные вселенные.

Имеет место математическая демократия → все непротиворечивые математические структуры образуют Мультиверс 4-го уровня, наша частная математическая структура есть один из объектов математического Мультиверса.

Наша математическая структура отличается тем, что допускает внутри себя существование Само Сознательной Субструктуры (ССС).

Возможность существования СССР определяет «тонкую настройку» нашей (математической) Вселенной на наше существование – вариант слабого антропного принципа.

Единственный постулат «теории всего»:

Все непротиворечивые математические структуры существуют физически.

Следствие:

В принципе это означает, что Вселенная абсолютно познаваема: надо только включить воображение и двигаться по пути этого познания.