

Лекция 5

Временная шкала трех основных эпох Вселенной и функция $z(t)$.
Угловой размер, стандартные линейки и стандартные сирены.
Термодинамика Вселенной.

От радиационно-доминированной стадии к стадии холодной материи

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_c \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{rad} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \right] \quad (5.1)$$

$$\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \sim \Omega_{rad} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \Rightarrow a_{eq} \quad (5.2)$$

$$\frac{a_0}{a_{eq}} \sim \frac{\Omega_M}{\Omega_{rad}} \sim \frac{0.3}{10^{-4}} = 1 + z_{eq} \Rightarrow \quad (5.3)$$

$$\boxed{z_{eq} \approx 3 \cdot 10^3} \quad (5.4)$$

$$\frac{T_{eq}}{T_0} = 1 + z_{eq} \Rightarrow T_{eq} = T_0(1 + z_{eq}) \approx 10^4 \text{ K} \sim 1 \text{ эВ} \quad (5.5)$$

Как найти время t_{eq} ?

– Не совсем просто, через температуру.

$$\boxed{M_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = \frac{1}{\sqrt{G}} \Rightarrow G = \frac{1}{M_{Pl}^2}} \quad (5.6)$$

$$[G] = [\Gamma \text{эВ}]^{-2} = [M]^{-2} \quad (5.7)$$

$$M_{Pl} = 1.6 \cdot 10^{19} \text{ ГэВ} = 2.2 \cdot 10^{-5} \text{ г} \quad (5.8)$$

«Закон Стефана-Больцмана» для фотонов и нейтрино (других УР частиц нет):

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 \quad (5.9)$$

g_* – эффективное число степеней свободы (стат. вес) фотонов и нейтрино:

$$g_* = 2 + \frac{21}{4} \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} \approx 3.36 \text{ (получим потом)} \quad (5.10)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \quad (5.11)$$

$$T = (1 + z)T_0 \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} H_{eq} &= \sqrt{\frac{8\pi}{3} G\rho} = \sqrt{\frac{8\pi}{3} G \frac{\pi^2}{30} g_* T^4} = T^2 \sqrt{\frac{8\pi^3}{90} g_* \frac{1}{M_{Pl}^2}} \\ &= \frac{T^2}{M_{Pl}^*} = \frac{[(1 + z_{eq})T_0]^2}{M_{Pl}^*} \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\boxed{M_{Pl}^* = \frac{M_{Pl}}{\sqrt{\frac{8\pi^3}{90} g_*}}} \quad (5.14)$$

На радиационно-доминированной стадии

$$t_{eq} = \frac{1}{2H_{eq}} = \frac{1}{2} \frac{M_{Pl}^*}{[(1 + z_{eq})T_0]^2} \approx 85000 \text{ лет} \quad (5.15)$$

От доминирования материи к фазе ДеСиттера – от замедления к ускорению

Ищем точку перегиба $a(t)$:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_c \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_\Lambda \right] \quad (5.16)$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_c \left(\Omega_M \frac{a_0^3}{a} + \Omega_\Lambda a^2 \right) \quad (5.17)$$

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi}{3}G\rho_c \left(-\Omega_M \frac{a_0^3}{a^2}\dot{a} + 2a\dot{a}\Omega_\Lambda \right) \quad (5.18)$$

$$\ddot{a} = 0 \Rightarrow \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 = \frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_M} \quad (5.19)$$

$$z = \frac{a_0}{a} - 1 = \sqrt[3]{\frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_M}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 0.69}{0.31}} - 1 = 0.65 \quad (5.20)$$

$t = ?$

Решение для $\Omega_M, \Omega_\Lambda \neq 0, \Omega_{curv} = \Omega_{rad} = 0$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_\Lambda \right], \quad \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1 \quad (5.21)$$

Проверяется подстановкой:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} \left[\text{sh} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 t \right) \right]^{2/3} \quad (5.22)$$

$$\frac{a_0}{a(t)} = z + 1 = \frac{(\Omega_\Lambda/\Omega_M)^{1/3}}{\left[\text{sh} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 t \right) \right]^{2/3}} \Rightarrow \quad (5.23)$$

$$t = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \text{arsh} \left[\left(\frac{1}{z+1} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}} \right] \quad (5.24)$$

Возраст Вселенной

$$z = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \text{arsh} \left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}} \right) \quad (5.25)$$

$$\Omega_\Lambda = 0.691, \quad \Omega_M = 0.309, \quad h = 0.678 \Rightarrow$$

$$t_0 = 13.80 \cdot 10^9 \text{ лет} \quad (5.26)$$

Возраст перехода от замедления к ускорению

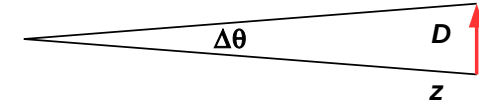
$$z + 1 = 1.65 \Rightarrow t = 7.61 \cdot 10^9 \text{ лет} \quad (5.27)$$

$$t_0 - t = 6.2 \cdot 10^9 \text{ лет} \quad (5.28)$$

Красное смещение - возраст

z	t	t0-t
0.01	13.66	0.1433
0.01259	13.62	0.18
0.01585	13.57	0.2261
0.01995	13.51	0.2838
0.02512	13.44	0.3559
0.03162	13.35	0.446
0.03981	13.24	0.5582
0.05012	13.1	0.6975
0.0631	12.93	0.8701
0.07943	12.72	1.083
0.1	12.46	1.344
0.1259	12.14	1.661
0.1585	11.75	2.045
0.1995	11.29	2.504
0.2512	10.75	3.047
0.3162	10.12	3.677
0.3981	9.401	4.397
0.5012	8.597	5.201
0.631	7.724	6.075
0.7943	6.803	6.996
1	5.865	7.934
1.259	4.946	8.853
1.585	4.08	9.719
1.995	3.294	10.5
2.512	2.608	11.19
3.162	2.028	11.77
3.981	1.552	12.25
5.012	1.172	12.63
6.31	0.875	12.92
7.943	0.6468	13.15
10	0.4743	13.32

Тест углового размера и стандартные линейки



Стандартные линейки $\Rightarrow \Delta\theta(z) \rightarrow \Omega_M, \Omega_\Lambda, \Omega_{curv}$.

Стандартные линейки существуют – акустические пики.

1. Плоское пространство

$$ds^2 = a^2(t)(d\eta^2 - dx^2) \quad (5.29)$$

В конформных координатах все как в плоской статике:

$$\Delta\theta = \frac{D_{conf}}{x(z)} \quad (5.30)$$

$$D = D_{conf}a(t) \Rightarrow D_{conf} = \frac{D}{a(t)} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{D}{a(t)x(z)} = \frac{a_0}{a(t)} \frac{D}{a_0x(z)} = \frac{z+1}{x(z)} \frac{D}{a_0} = \\ &= \backslash a_0x(z) = r(z), (4.76) \backslash = DH_0 \frac{z+1}{\int_0^z [\Omega_M(z+1)^3 + \Omega_\Lambda]^{-1/2} dz} \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\Delta\theta(z) = DH_0 \frac{z+1}{\int_0^z [\Omega_M(z+1)^3 + \Omega_\Lambda]^{-1/2} dz} \quad (5.33)$$

Как себя ведет $\Delta\theta(z)$?

- $z \ll 1$

$$\Delta\theta(z) \cong DH_0 \sqrt{\Omega_M + \Omega_\Lambda} \frac{1}{z} = DH_0 \frac{1}{rH_0} = \frac{D}{r} \quad (5.34)$$

– убывает, как и ожидается.

- $z \gg 1$

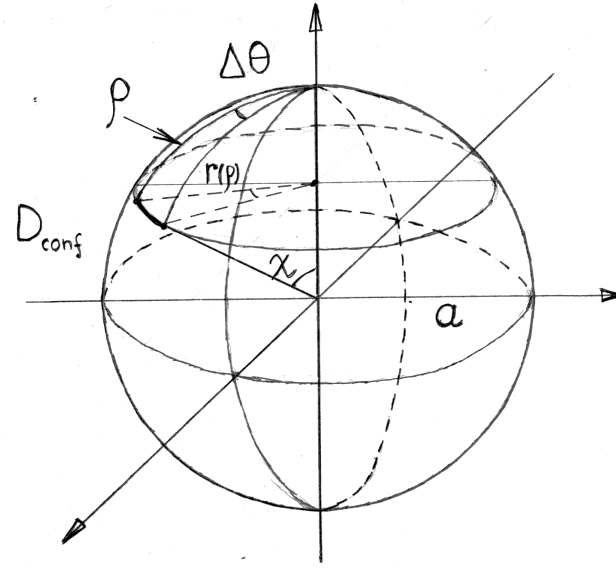
$$\begin{aligned} \int_0^z [\Omega_M(z+1)^3 + \Omega_\Lambda]^{-1/2} dz &\cong \int_0^z [\Omega_M(z+1)^3]^{-1/2} dz = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\Omega_M}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{z+1}} \right) \Rightarrow \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\Delta\theta(z) \cong 2DH_0 \sqrt{\Omega_M} \frac{z+1}{1 - \frac{1}{\sqrt{z+1}}} \approx 2DH_0 \sqrt{\Omega_M} (z+1) \quad (5.36)$$

- 1) Угловой размер растет с ростом расстояния!
- 2) Если известны D и z , то определяется Ω_M !

- При $z \sim 2$ угловой размер достигает минимума (ищется численно).

2. 3-сфера



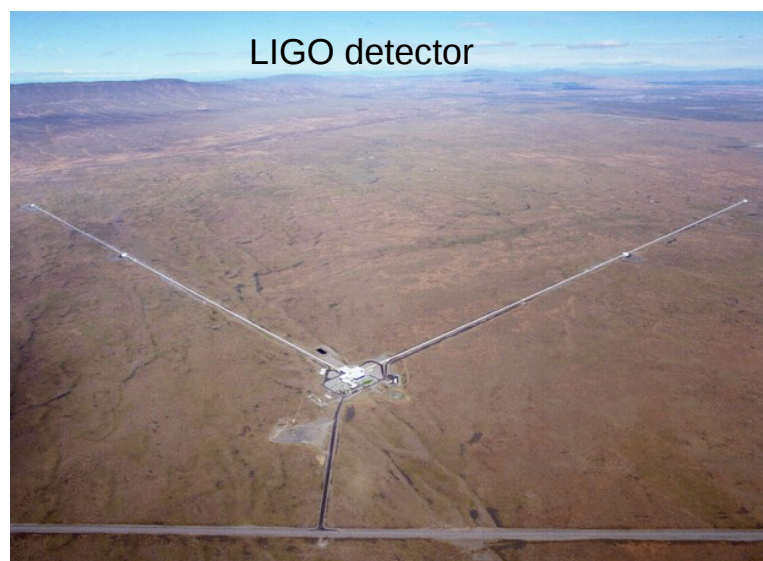
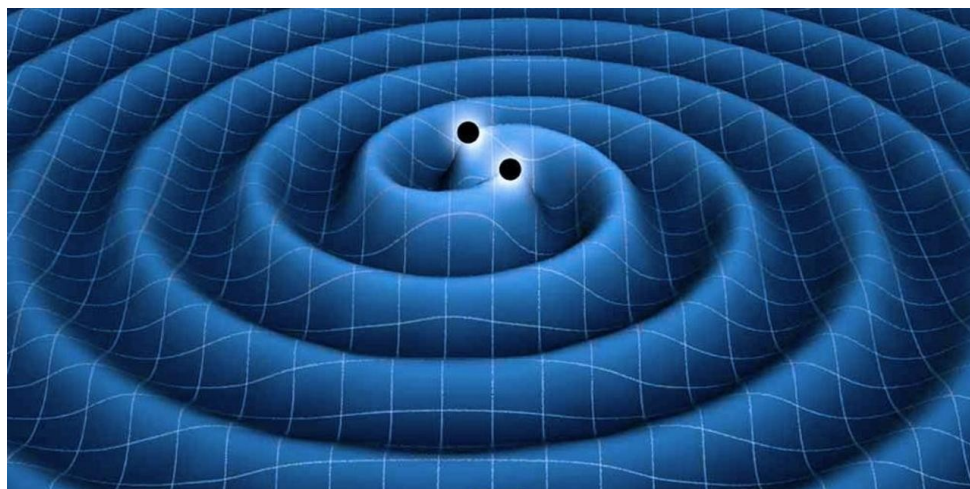
$$D_{conf} = \frac{D}{a} = \frac{a \sin \chi \Delta\theta}{a} = \sin \chi \Delta\theta \Rightarrow \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{D_{conf}}{\sin \chi} = \frac{D}{a(t) \sin \chi} = \frac{a_0}{a(t)} \frac{D}{a_0 \sin \chi} = \frac{D(z+1)}{a_0 \sin \chi} = \\ &= \frac{D}{a_0 \sin \left[\int_0^z \frac{dz}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv}(1+z)^2}} \right]} \end{aligned} \quad (5.38)$$

3. 3-псевдосфера

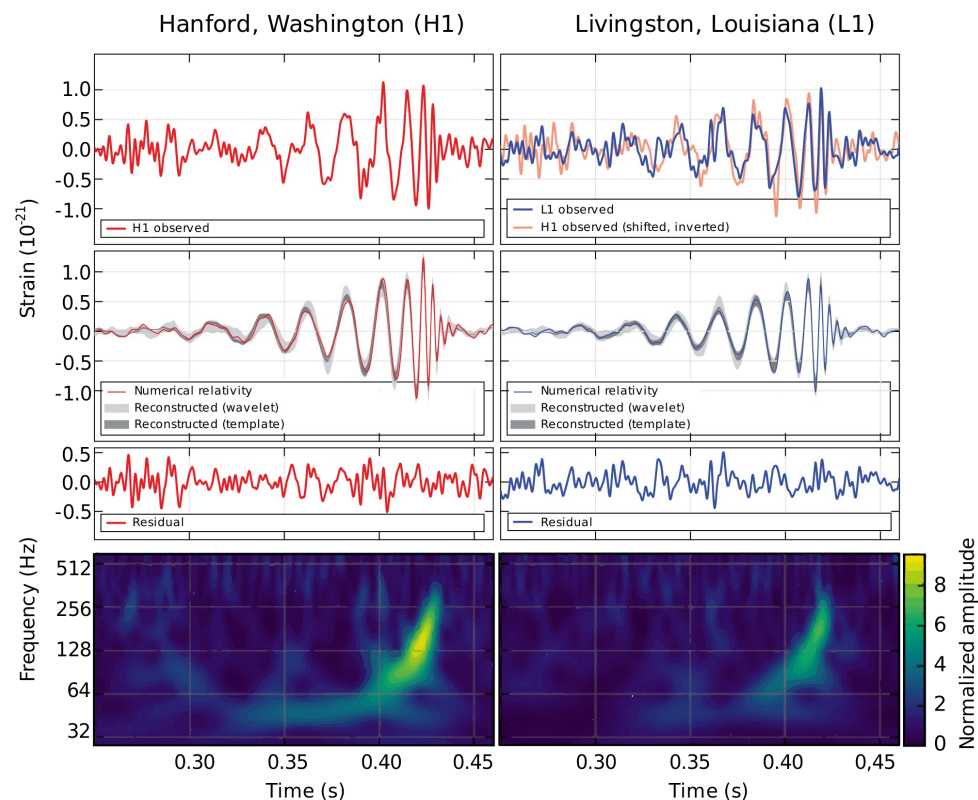
$$\Delta\theta = \frac{D}{a_0 \text{sh} \left[\int_0^z \frac{dz}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv}(1+z)^2}} \right]} \quad (5.39)$$

«Стандартные сирены» - гравитационные сигналы от слияния черных дыр и нейтронных звезд (gravitational wave standard sirens)



Регистрируются наземными детекторами гравитационных волн с расстояний $z \sim 0.1$.

Увеличение чувствительности антенн в будущем увеличит расстояние.



По профилю гравитационного всплеска с хорошей точностью восстанавливаются массы черных дыр и их моменты \Rightarrow абсолютная энергетика всплеска.

По замедлению колебаний восстанавливается z .

Абсолютная энергетика всплеска + z + наблюдаемая амплитуда = «стандартная сирена».

Термодинамика (горячей) Вселенной

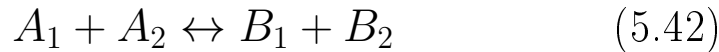
Химический потенциал в равновесии

$$dE = -PdV + TdS + \sum_i \mu_i dN_i = 0 \quad (5.40)$$

Термодинамическое **И** химическое равновесие:
Превращение частиц много быстрее расширения Вселенной:

$$dV = dS = 0 \Rightarrow \sum_i \mu_i dN_i = 0 \quad (5.41)$$

Пример реакции в равновесии:



Предположим малый выход из химического равновесия, $dN \neq 0$:

$$\begin{aligned} \mu_{A_1} dN + \mu_{A_2} dN - \mu_{B_1} dN - \mu_{B_2} dN &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu_{A_1} + \mu_{A_2} &= \mu_{B_1} + \mu_{B_2} \end{aligned} \quad (5.43)$$

В общем случае:

$$\begin{aligned} A_1 + \dots + A_n \leftrightarrow B_1 + \dots + B_m \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu_{A_1} + \dots + \mu_{A_n} &= \mu_{B_1} + \dots + \mu_{B_m} \end{aligned} \quad (5.44)$$

Полезные следствия:

$$e + e \leftrightarrow e + e + \gamma + \dots + \gamma \Rightarrow \mu_\gamma = 0 \quad (5.45)$$

$$b + \bar{b} = 2\gamma \Rightarrow \mu_b = -\mu_{\bar{b}} \quad (5.46)$$

Распределения Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна в импульсном представлении (идеальные газы)

Обычная запись распределений ФД и БЭ идеального газа:

$$N_i = \frac{g_i}{e^{(E_i - \mu)/T} \pm 1}; \quad \begin{array}{l} +\text{ФД} \\ -\text{БЭ} \end{array} \quad (5.47)$$

- N_i – число частиц в энергетическом ящике номер i с энергией E_i
- g_i – число минимальных ячеек фазового пространства одной частицы в этом ящике (стат. вес ящика).

Рассматриваем объем V с однородным газом частиц. Энергетический ящик $d\Gamma = d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{p}$ вблизи энергии E .

Тогда

$$g_i = \frac{d\Gamma}{a} g \quad (5.48)$$

- a – объем минимальной ячейки фазового пространства частицы
- g – статистический вес (количество) внутренних состояний частицы (спин, спиральность)

$$dN = \frac{g}{a} \frac{d\Gamma}{e^{(E - \mu)/T} \pm 1} \quad (5.49)$$

Из кв.мех.:

$$a = h^3 = (2\pi)^3 \hbar^3 \equiv (2\pi)^3 \quad (5.50)$$

Распределение однородно внутри $V \Rightarrow$ нет зависимости от координат и в $d\Gamma$ можно включить весь V :

$$d\Gamma = V d^3\mathbf{p} \Rightarrow \quad (5.51)$$

$$dN = \frac{1}{(2\pi)^3} g \frac{V d^3 \mathbf{p}}{e^{[E(\mathbf{p})-\mu]/T} \pm 1} \quad (5.52)$$

Можно переписать как плотность распределения импульса:

$$\frac{1}{V} \frac{dN}{d^3 \mathbf{p}} \equiv f(\mathbf{p}) = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{[E(\mathbf{p})-\mu]/T} \pm 1} \quad (5.53)$$

Нормировка:

$$\int f(\mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} = n - \text{число частиц в 1 объеме} \quad (5.54)$$

Как выражаются n, ρ, p через $f(E)$?

Для частиц типа $i \rightarrow f_i(\mathbf{p})$

$$E_i(\mathbf{p}) = \sqrt{p_i^2 + m_i^2} \Rightarrow E_i dE_i = p_i dp_i \quad (5.55)$$

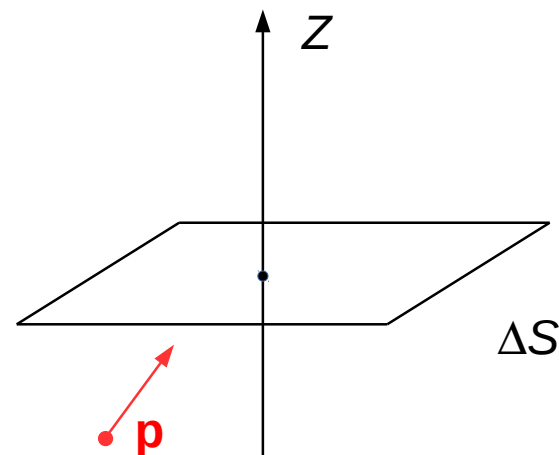
Интегрируя по углам – плотность числа частиц через распределение по энергии:

$$\begin{aligned} n_i &= \int f_i(\mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} = \int f_i(p) 4\pi p^2 dp = \\ &= 4\pi \int f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E dE \end{aligned} \quad (5.56)$$

Плотность энергии

$$\rho_i = \int f_i(\mathbf{p}) E(\mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} = 4\pi \int f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E^2 dE \quad (5.57)$$

Давление



Количество частиц с импульсом в $d^3 \mathbf{p}$ около \mathbf{p} , налетающих с одной стороны за Δt :

$$\Delta n_i = v_z f_i(\mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} \Delta S \Delta t \quad (5.58)$$

$$p_z = \frac{mv_z}{\sqrt{1-v^2}}; \quad E = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}; \Rightarrow v_z = \frac{p_z}{E} \quad (5.59)$$

От одной частицы площадка получает импульс $\Delta p_z = 2p_z \Rightarrow$

Давление есть переданный импульс через единицу площади в единицу времени:

$$\begin{aligned} p_i &= \int_{p_z > 0} 2p_z \frac{p_z}{E} f_i(\mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} = \int p_z^2 = \frac{1}{3} p^2, 2 \rightarrow 1 \int = \\ &= \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{E(p)} f_i(p) = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty f_i(E) (E^2 - m_i)^{3/2} dE \end{aligned} \quad (5.60)$$

Основные формулы:

$$f(E) = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1} \quad (5.61)$$

$$n_i = 4\pi \int_0^\infty f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E dE \quad (5.62)$$

$$\rho_i = 4\pi \int_0^\infty f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E^2 dE \quad (5.63)$$

$$p_i = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty f_i(E) (E^2 - m_i^2)^{3/2} dE \quad (5.64)$$

Ультррелятивистские частицы: $T \gg m_i, \mu_i = 0$

Из (5.57):

$$\begin{aligned} \rho_i &= 4\pi \int_0^\infty \frac{g_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{E/T} \pm 1} E^3 dE = \\ &= \frac{g_i}{2\pi^2} T^4 \int_0^\infty \frac{z^3}{e^z \pm 1} dz \quad (5.65) \end{aligned}$$

Табличные интегралы:

$$\int_0^\infty \frac{z^{2n-1}}{e^z + 1} dz = \frac{2^{2n-1} - 1}{2n} \pi^{2n} B_n \quad (5.66)$$

$$\int_0^\infty \frac{z^{2n-1}}{e^z - 1} dz = \frac{(2\pi)^{2n}}{4n} B_n \quad (5.67)$$

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42} \quad (5.68)$$

$n = 2 \Rightarrow$

$$\int_0^\infty \frac{z^3}{e^z + 1} dz = \frac{7}{4} \pi^4 \frac{1}{30} \quad (5.69)$$

$$\int_0^\infty \frac{z^3}{e^z - 1} dz = 2\pi^4 \frac{1}{30} \quad (5.70)$$

Объемная формула Стефана-Больцмана для УР-частиц типа i :

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{7}{8} g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 & \text{— Ферми-Дирак} \\ g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 & \text{— Бозе-Эйнштейн} \end{cases} \quad (5.71)$$

Если все УР частицы имеют температуру T , то

$$\rho = g_* \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad (5.72)$$

$$g_* = \sum_{\text{бозоны}} g_i + \frac{7}{8} \sum_{\text{фермионы}} g_i \quad (5.73)$$

g_* – эффективное число степеней свободы (стат.вес).

Давление

Из (5.64):

$$p_i = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{g_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{E/T} \pm 1} E^3 dE = \frac{\rho_i}{3} \quad (\text{см. (5.65)}) \quad (5.74)$$

Для УР вещества всегда $p = \rho/3$.

Плотность числа частиц

$$n_i = 4\pi \int \frac{g_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{E/T} \pm 1} E^2 dE = \frac{g_i}{2\pi^2} T^3 \int_0^\infty \frac{z^2}{e^z \pm 1} dz \quad (5.75)$$

Табличные интегралы:

$$\int_0^\infty \frac{z^{x-1}}{e^z + 1} = (1 - 2^{1-x}) \Gamma(x) \zeta(x) \quad (5.76)$$

$$\int_0^\infty \frac{z^{x-1}}{e^z - 1} = \Gamma(x) \zeta(x) \quad (5.77)$$

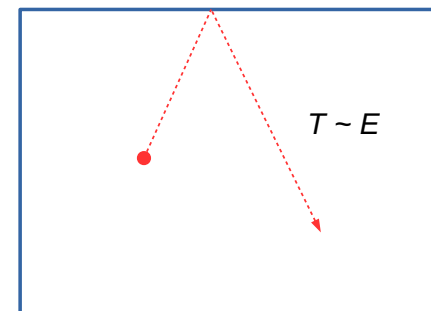
x	$\zeta(x)$	
3	1.202	
5	1.037	
3/2	2.612	
5/2	1.341	

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)! \\ \Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi} \\ \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \end{aligned} \quad (5.79)$$

$x = 3 \Rightarrow$

$$n_i = \begin{cases} g_i \frac{3\zeta(3)}{4\pi^2} T^3 & \text{– Ферми-Дирак} \\ g_i \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 & \text{– Бозе-Эйнштейн} \end{cases} \quad (5.80)$$

Частица в ящике: частица одна, а температура сколь угодно высокая? Где ошибка?



А есть ли тепловое (химическое) равновесие?

Характерное время расширения:

$$1/t_H \sim H(t) \quad (5.81)$$

Электромагнитное взаимодействие:

$$\sigma \propto \alpha^2 \Rightarrow 1/t_{em} \sim \alpha^2 T \quad (5.82)$$

Из (5.13):

$$H(T) = \frac{T^2}{M_{Pl}^*}; \quad M_{Pl}^* = M_{Pl} \sqrt{\frac{90}{8\pi^3 g_*}} = \frac{1}{1.66\sqrt{g_*}} M_{Pl} \quad (5.83)$$

Нужно:

$$t_{em} \ll t_H \Rightarrow 1/t_{em} \gg H(t) \quad (5.84)$$

$$\alpha^2 T \gg \frac{T^2}{M_{Pl}^*} \Rightarrow T \ll \alpha^2 M_{Pl}^* \sim 10^{14} \text{ ГэВ} \quad (5.85)$$

Тепловое равновесие для ЭМ взаимодействия хорошо работает для $T \lesssim 10^{12} \text{ ГэВ}$

$$f(E) = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1}$$

$$n_i = 4\pi \int_0^\infty f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E dE$$

$$\rho_i = 4\pi \int_0^\infty f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E^2 dE$$

$$p_i = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty f_i(E) (E^2 - m_i^2)^{3/2} dE$$

Нерелятивистский газ
(распределение Больцмана)

$$m_i \gg T, \quad m_i - \mu_i \gg T \Rightarrow e^{(E-\mu_i)/T} \gg 1 \quad (5.86)$$

$$f_B(p) = g_i \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-[E(p)-\mu_i]/T} \quad (5.87)$$

$$f_B(p) = g_i \frac{1}{(2\pi)^3} e^{(\mu_i - m_i)/T} e^{-p^2/(2m_i T)} \quad (5.88)$$

$$\begin{aligned} n_i &= \int f_B(\mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} = \int_0^\infty f_B(p) 4\pi p^2 dp = \\ &= 4\pi \frac{g_i}{(2\pi)^3} e^{(\mu_i - m_i)/T} \int_0^\infty p^2 e^{-p^2/(2m_i T)} dp = \\ &= \left\langle \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/4 \right\rangle = \\ &= g_i e^{(\mu_i - m_i)/T} \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \end{aligned} \quad (5.89)$$

Больцмановский газ:

$$n_i = g_i e^{(\mu_i - m_i)/T} \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \quad (5.90)$$

$$\rho_i = m_i n_i + \frac{3}{2} n_i T \quad (5.91)$$

$$p = \frac{1}{3} n \langle \mathbf{v} \mathbf{p} \rangle \Rightarrow \left\langle E_k = \frac{3}{2} T \right\rangle \Rightarrow p_i = n_i T \ll \rho_i \quad (5.92)$$

Энтропия во Вселенной

$$dE = TdS - pdV + \sum_i \mu_i dN_i \quad (5.93)$$

Будем считать dE в расчете на 1 тип частиц.
Для плотностей:

$$\rho = \frac{E}{V}, \quad n = \frac{N}{V}, \quad s = \frac{S}{V} \quad (5.94)$$

$$dE = \rho dV + V d\rho \quad (5.95)$$

$$dN = n dV + V dn \quad (5.96)$$

$$dS = s dV + V ds \quad (5.97)$$

Из (5.93), (5.95)–(5.97):

$$(Ts - p - \rho + \mu n)dV + (Tds - d\rho + \mu dn)V = 0 \quad (5.98)$$

Запишем I начало только с локальными величинами.

Применяем (5.98) к области постоянного (единичного) объема внутри системы. $dV = 0 \Rightarrow$

$$d\rho = Tds + \mu dn \quad (5.99)$$

Это соотношение между локальными величинами выполняется всегда (в равновесии).

Подставляем (5.99) в (5.98) и применяем к произвольной системе переменного объема:

$$\boxed{s = \frac{p + \rho - \mu n}{T}} \quad (5.100)$$

УР газ, μ мало

$$s_i = \frac{p_i + \rho_i}{T} \quad (5.101)$$

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{7}{8}g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 & - \text{ФД} \\ g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 & - \text{БЭ} \end{cases}; \quad p_i = \frac{1}{3}\rho_i \quad (5.102)$$

$$\boxed{s_i = \frac{4\rho_i}{3T} = \begin{cases} \frac{7}{8}g_i \frac{4\pi^2}{90} T^3 & - \text{ФД} \\ g_i \frac{4\pi^2}{90} T^3 & - \text{БЭ} \end{cases}} \quad (5.103)$$

$$n_i = \begin{cases} g_i \frac{3\zeta(3)}{4\pi^2} T^3 & - \text{Ферми-Дирак} \\ g_i \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 & - \text{Бозе-Эйнштейн} \end{cases} \quad (5.104)$$

$$\boxed{s_i \sim n_i} \quad (5.105)$$

Полная плотность энтропии УР газа

$$s = g_* \frac{4\pi^2}{90} T^3 \quad (5.106)$$

Нерелятивистский газ

$$\rho_i = m_i n_i + \frac{3}{2} n_i T \quad (5.107)$$

$$p_i = n_i T \quad (5.108)$$

$$s_i = \frac{p_i + \rho_i - \mu_i n_i}{T} \Rightarrow \quad (5.109)$$

$$s_i = \left(\frac{5}{2} + \frac{m_i - \mu_i}{T} \right) n_i \quad (5.110)$$

Из

$$n_i = g_i e^{(\mu_i - m_i)/T} \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \quad (5.111)$$

получаем

$$\frac{m_i - \mu_i}{T} = \ln \left[\frac{g_i}{n_i} \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \right] \Rightarrow \quad (5.112)$$

$$s_i = n_i \left(\frac{5}{2} + \ln \left[\frac{g_i}{n_i} \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \right] \right) \quad (5.113)$$

При $T \lesssim 0.5$ МэВ электроны и адроны – нерелятивистские.

Сейчас $n_e \sim n_B \sim 10^{-9} n_\gamma$.

\ln в (5.113) $\approx 60(\star) \Rightarrow s_B \ll s_\gamma$ и

$$s \sim s_\gamma \sim n_\gamma \quad (5.114)$$

Из (5.110) и (5.113) $\Rightarrow \mu_i \sim m_i$.