Лекция 9

Разложение возмущений по спиральностям. Линеаризованные уравнения для возмущений. Моды за горизонтом и моды под горизонтом. Эволюция векторных и тензорных мод.

Разложение возмущений по спиральностям: скалярные, векторные, тензорные моды

Так как все уравнения пишутся в линейном порядке по возмущениям, то разные компоненты Фурье можно изучать отдельно:

$$h_{\mu\nu}(\eta, \mathbf{x}) = \int d^3k\, e^{i\mathbf{kx}} h_{\mu\nu}(\eta, \mathbf{k}) \tag{9.1}$$

и т.д. для $\delta\rho, \delta p, v_i$. Переход от компонент Фурье к пространственным величинам в уравнениях и обратно:

$$\partial_i \leftrightarrow ik_i \tag{9.2}$$

Мода Фурье – плоская волна – инвариантна относительно пространственных вращений вокруг вектора $\mathbf{k}$ – «малая группа $SO(2)$».

Тензорные индексы $(h_{ik}, v_i, \delta\rho)$ при вращениях вокруг $\mathbf{k}$ преобразуются друг через друга $\Rightarrow$ моды с определенной спиральностью (3 типа).

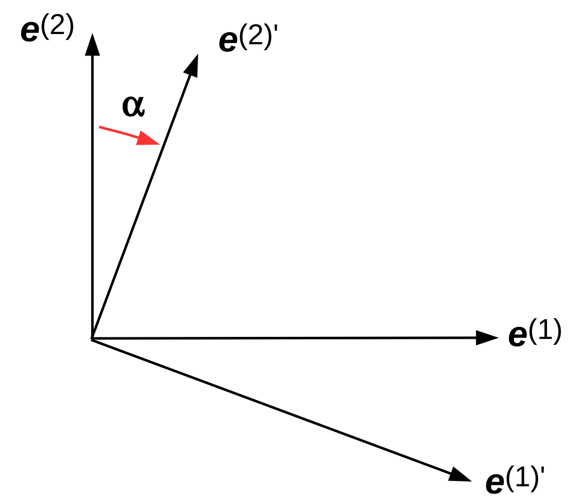
1. Скалярные моды (спиральность 0)

Объект при вращениях малой группы $SO(2)$ не преобразуется.
Типы скалярных мод (4 штуки)

- 3-скаляр $(\delta\rho, \delta p, \dots)$
- Вектор, $||\, \mathbf{k}$
- Тензор, $\propto k_i k_j$ (т.к. k_i, k_j не меняются)
- Тензор, $\propto \delta_{i,j}$

2. Векторные моды (спиральность 1)

Преобразуются как вектор, ортогональный $\mathbf{k}$



$\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{k}$ – правая тройка.
Поворот по Ч.С. на α

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(1)'} &= \mathbf{e}^{(1)} \cos\alpha - \mathbf{e}^{(2)} \sin\alpha \\ \mathbf{e}^{(2)'} &= \mathbf{e}^{(1)} \sin\alpha + \mathbf{e}^{(2)} \cos\alpha \end{aligned} \tag{9.3}$$

$$\mathbf{e}^{\pm} = \mathbf{e}^{(1)} \pm i\mathbf{e}^{(2)} \tag{9.4}$$

$$\mathbf{e}^{(+)'}(\alpha) = \mathbf{e}^{(1)'}(\alpha) + i\mathbf{e}^{(2)'}(\alpha) = e^{i\alpha}\mathbf{e}^{(+)} \tag{9.5}$$

$$\hat{L}_\alpha \mathbf{e}^{(+)'}(\alpha) = -i\frac{\partial}{\partial\alpha}(e^{i\alpha}\mathbf{e}^{(+)}) = +1\mathbf{e}^{(+)'}(\alpha) \tag{9.6}$$

– спиральность $+1$

$$\hat{L}_\alpha \mathbf{e}^{(-)'}(\alpha) = -1\mathbf{e}^{(-)'}(\alpha) \tag{9.7}$$

– спиральность -1

Поизвольный поперечный вектор является смесью спиральностей -1 и $+1$:

$$\mathbf{S} = \alpha_- \mathbf{e}^{(-)} + \alpha_+ \mathbf{e}^{(+)} \tag{9.8}$$

Единичную спиральность имеют (2 типа)

- Поперечные векторы
- Тензоры со структурой $k_i W_j^T$, где W_j^T – поперечный вектор, то есть $k_i W_i^T = 0$

(скалярные моды имеют спиральность 0,
т.к. они не зависят от поворота α)

3. Тензорные моды (спиральность 2), 1 тип

Рассмотрим симметричные, бесследовые, поперечные 3-мерные тензоры:

- $h_{ij} = h_{ji}$ – 3 условия
- $h_{ii} = 0$ – 1 условие
- $k_i h_{ij} = 0$ – поперечность, 3 условия

9 параметров, 7 условий, 2 – свободные $\Rightarrow$
Размерность $= 2$
Из $\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}$ построим два тензора:

$$e_{ij}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i^{(1)} e_j^{(1)} - e_i^{(2)} e_j^{(2)}) \tag{9.9}$$

$$e_{ij}^{(\times)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i^{(1)} e_j^{(2)} + e_i^{(2)} e_j^{(1)}) \tag{9.10}$$

(9.11)

– линейно независимы, симметричны, бесследовы, поперечны по определению.

$$e_{ij}^{(\pm 2)} = e_{ij}^{(+)} \pm i e_{ij}^{(\times)} \tag{9.12}$$

Элементарно проверяется:

$$e_{ij}^{(+2)\prime}(\alpha) = e^{+2i\alpha} e_{ij}^{(+2)\prime} \Rightarrow \hat{L}_\alpha e_{ij}^{(+2)\prime}(\alpha) = +2 e_{ij}^{(+2)\prime} \tag{9.13}$$

$$e_{ij}^{(-2)\prime}(\alpha) = e^{-2i\alpha} e_{ij}^{(-2)\prime} \Rightarrow \hat{L}_\alpha e_{ij}^{(-2)\prime}(\alpha) = -2 e_{ij}^{(-2)\prime} \tag{9.14}$$

– объекты со спиральностью ± 2.

• 4 типа скаляров (спиральность 0), 2 типа векторов (спиральность 1), 1 тип тезоров (спиральность 2) достаточно для разложения по ним всех величин, нужных для теории космологических возмущений (см. след. слайд).

• Дифференцирование компонент Фурье по x_j (умножение на ik_j) не меняет спиральности $\Rightarrow$

$\boxed{\text{Линеаризованные (и потому линейные) уравнения разбиваются на независимые компоненты для мод разной спиральности.}}$

Моды разной спиральности эволюционируют существенно по-разному!

Разложение h_{ij} и v_i по спиральностям

В калибровке $h_{0i} = 0$

$$h_{\mu\nu} = h_{00} \oplus h_{ij} \tag{9.15}$$

h_{00} не зависит от поворотов в плоскости (ij) $\Rightarrow$

$$h_{00} = 2\Phi - \text{скаляр} \tag{9.16}$$

h_{ij} есть комбинация всех возможных спиральностей:

$$\begin{array}{rcl|l} h_{ij}(\eta, \mathbf{k}) & = & -2\Psi\delta_{ij} - 2k_ik_jE & \text{спиральность } 0 \\ & & +i(k_iW_j^T + k_jW_i^T) & \text{спиральность } 1 \\ & & +h_{ij}^{TT} & \text{спиральность } 2 \end{array} \tag{9.17}$$

Ψ, E – скалярные моды (2 параметра)
W_j^T – векторные моды (2 параметра)
h_{ij}^{TT} – тензорные моды (2 параметра).

Всего 6 параметров, столько же независимых элементов в симметричной матрице h_{ij}

Разложение для скорости:

$$\begin{array}{rcl|l} v_i(\eta, \mathbf{k}) & = & ik_iv(\eta, \mathbf{k}) & \text{спиральность } 0 \\ & & +V_i^T(\eta, \mathbf{k}) & \text{спиральность } 1 \end{array} \tag{9.18}$$

v – скалярная мода (1 параметр)
V_i^T – векторные моды (2 параметра)

Всего 3 параметра, столько же независимых компонент вектора v_i

Если под $v(\eta, \mathbf{k})$ понимать всю компоненту Фурье, то

$$ik_iv(\eta, \mathbf{k}) = \partial_i v(\eta, \mathbf{k}) \tag{9.19}$$

поэтому $v(\eta, \mathbf{k})$ иногда называют потенциалом скорости.

Компоненты ТЭИ

Скаляр:

$$\boxed{\delta T_0^0 = \delta\rho} \tag{9.20}$$

Вектор и скаляр (см. (9.18)):

$$\boxed{\delta T_i^0 = -(\rho + p)v_i} \tag{9.21}$$

Скаляр:

$$\boxed{\delta T_j^i = -\delta_j^i \delta p} \tag{9.22}$$

<u>Тензорного вклада нет!</u>

Линеаризованные уравнения для возмущений

Ковариантное сохранение ТЭИ

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = \partial_\mu T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} T^\mu_\lambda = 0 \tag{9.23}$$

$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ считаются в метрике

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \tag{9.24}$$

в калибровке $h_{0i} = 0$ ★

$$\Gamma^0_{00} = \frac{a'}{a} + \frac{1}{2}h'_{00} \tag{9.25}$$

$$\Gamma^0_{0i} = \Gamma^i_{00} = \frac{1}{2}\partial_i h_{00} \tag{9.26}$$

$$\Gamma^i_{0j} = \frac{a'}{a}\delta_{ij} - \frac{1}{2}h'_{ij} \tag{9.27}$$

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{a'}{a}(1-h_{00})\delta_{ij} - \frac{a'}{a}h_{ij} - \frac{1}{2}h'_{ij} \tag{9.28}$$

$$\Gamma^i_{jk} = -\frac{1}{2}(\partial_j h_{ik} + \partial_k h_{ij} - \partial_i h_{jk}) \tag{9.29}$$

Подставляем в (9.23), используем выражения для δT, получаем два уравнения ★:

$$\delta\rho' + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho + \delta p) + (\rho + p)\left(\partial_i v_i - \frac{1}{2}h'\right) = 0 \tag{9.30}$$

$$\partial_i \delta p + (\rho+p)\left(4\frac{a'}{a}v_i + \frac{1}{2}\partial_i h_{00}\right) + [v_i(\rho+p)]' = 0 \tag{9.31}$$

где $h = h_{ii}$

Линеаризованные уравнения Эйнштейна

$$\delta G^\nu_\mu = 8\pi G \delta T^\mu_\nu \tag{9.32}$$

$$a^2\delta G^0_0 = -3h_{00}\left(\frac{a'}{a}\right)^2 - \frac{1}{2}\partial_i\partial_j h_{ij} + \frac{1}{2}\Delta h - \frac{a'}{a}h' \tag{9.33}$$

$$a^2\delta G^0_i = \frac{1}{2}\partial_i h' - \frac{1}{2}\partial_j h'_{ij} + \frac{a'}{a}\partial_i h_{00} \tag{9.34}$$

$$\begin{aligned} a^2\delta G^i_j = {}& \frac{1}{2}\partial_i\partial_k h_{jk} + \frac{1}{2}\partial_j\partial_k h_{ik} + \frac{1}{2}h''_{ij} - \frac{1}{2}\Delta h_{ij} + \\ & + \frac{1}{2}\partial_i\partial_j h_{00} - \frac{1}{2}\partial_i\partial_j h + \frac{a'}{a}h'_{ij} - \\ & - \delta^i_j \left[\frac{1}{2}h'' + \frac{1}{2}\Delta h_{00} + \frac{1}{2}\partial_l\partial_k h_{lk} - \frac{1}{2}\Delta h + \right. \\ & \left. + 2\frac{a''}{a}h_{00} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 h_{00} + \frac{a'}{a}(h'_{00} + h')\right] \end{aligned} \tag{9.35}$$

Тензорные моды (Для компонент Фурье!)

В выражениях для δT^μ_ν [идеальная жидкость] (8.124)–(8.128) тензорного вклада нет, поэтому уравнение для тензорных мод однородное ★:

$$\partial^2_\eta h^{TT}_{ij} + 2\frac{a'}{a}\partial_\eta h^{TT}_{ij} - \Delta h^{TT}_{ij} = 0 \tag{9.36}$$

Это уравнение для гравитационных волн в пр-ве Фридмана.
В статическом пределе Минковского $\eta \to t$, $a' = 0$ и уравнение переходит в обычное волновое уравнение

$$\partial^2_t h^{TT}_{ij} - \Delta h^{TT}_{ij} = 0 \tag{9.37}$$

Векторные моды

Векторные моды метрического тензора, скорости и ТЭИ

$$h_{ij} = i(k_i W_j^T + k_j W_i^T) = \partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T \qquad (9.38)$$

$$v_i = V_i^T; \quad ik_i V_i = \partial_i V_i = 0 \qquad (9.39)$$

$$\delta T_i^0 = -(\rho + p) v_i \qquad (9.40)$$

Линеаризованные уравнения Эйнштейна:

00-компонента удовлетворяется тождественно ★;

$0i$-компоненты

$$\boxed{\partial_\eta \Delta W_i^T = 16\pi G a^2 (\rho + p) V_i^T} \qquad (9.41)$$

ij-компоненты

$$\boxed{\partial_\eta^2 W_i^T + 2\frac{a'}{a}\partial_\eta W_i^T = 0} \qquad (9.42)$$

Откуда в $0i$-компоненте 3-я производная? Получим:

$$\delta G_i^0 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}\partial_i h' - \frac{1}{2}\partial_j h'_{ij} + \frac{a'}{a}\partial_i h_{00}\right) = 8\pi G \delta T_i^0 \qquad (9.43)$$

$$h_{00} \equiv 0 \Rightarrow \qquad (9.44)$$

$$\partial_j h'_{ij} - \partial_i h' = a^2 16\pi G (\rho + p) V_i^T \qquad (9.45)$$

$$\partial_j h'_{ij} = \partial_\eta \partial_j (\partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T) = \partial_\eta [\partial_j \partial_i W_j^T + \partial_j \partial_j W_i^T] = \\ = \partial_\eta \partial_j \partial_i W_j^T + \partial_\eta \Delta W_i^T \qquad (9.46)$$

$$\partial_j \partial_i W_j^T = -k_i k_j W_j^T = 0 \text{ (поперечность)} \qquad (9.47)$$

$$h = i2k_j W_j^T = 0 \text{ (поперечность)} \qquad (9.48)$$

$$\partial_\eta \Delta W_i^T = 16\pi G a^2 (\rho + p) V_i^T \qquad (9.49)$$

или

$$-k^2 \partial_\eta W_i^T = 16\pi G a^2 (\rho + p) V_i^T \qquad (9.50)$$

Из ковариантных сохранений нетривиально одно:

$$\boxed{\partial_\eta [(\rho + p) V_i^T] + 4\frac{a'}{a}(\rho + p) V_i^T = 0} \qquad (9.51)$$

Уравнение (9.42) является следствием (9.51) и (9.41).

Однородное уравнение (9.41) ($\rho = 0$) имеет решением любую функцию $\mathbf{x}$, не зависящую от η – это чистая калибровка.
Устраняется преобразованием (см. (8.102)):

$$\xi_i = W_i^T(\mathbf{x}), \ \xi_0 = 0 \qquad (9.52)$$

$$\tilde{h}_{ij} = h^{\mu\nu} - \partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu - 2\eta^{\mu\nu}\xi^\lambda \frac{\partial_\lambda a}{a} = \\ = \partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T - \partial_i W_j^T - \partial_j W_i^T - 2\eta_{ij} W_j^T \frac{\partial_j a}{a} = 0 \qquad (9.53)$$

Векторные моды грав. поля в отстутсвии источников не распространяются.

Скалярные моды,
конформная Ньютонова калибровка

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu - 2\eta^{\mu\nu}\xi^\lambda \frac{\partial_\lambda a}{a} \qquad (9.54)$$

Используем возможность остаточной калибровки, не нарушающей условия $h_{0i} = 0$ (см. (8.101)):

$$\partial_0 \xi_i + \partial_i \xi_0 = 0 \qquad (9.55)$$

Общий вид такой калибровки:

$$\xi_i = -\partial_i \sigma(\eta, \mathbf{x}),\ \ \xi_0 = \partial_\eta \sigma(\eta, \mathbf{x}) \qquad (9.56)$$

$$\tilde{h}_{ij} = h_{ij} - 2\partial_i \partial_j \sigma - 2\frac{a'}{a}\delta_{ij}\sigma' \qquad (9.57)$$

Общий вид скалярной моды h_{ij}:

$$h_{ij} = -2\Psi\delta_{ij} - 2k_i k_j E \qquad (9.58)$$

В координатном представлении

$$h_{ij} = -2\Psi\delta_{ij} + 2\partial_i \partial_j E \qquad (9.59)$$

$$\tilde{h}_{ij} = -2\Psi\delta_{ij} + 2\partial_i \partial_j E - 2\partial_i \partial_j \sigma - 2\frac{a'}{a}\delta_{ij}\sigma' \qquad (9.60)$$

Подбираем σ:

$$2\partial_i \partial_j \sigma + 2\frac{a'}{a}\delta_{ij}\sigma' = \partial_i \partial_j E \qquad (9.61)$$

Калибровка полностью фиксирована.
Для скалярных мод остается:

$$\begin{aligned} h_{00} &= 2\Phi && (9.62)\\ h_{ij} &= -2\Psi\delta_{ij} && (9.63)\\ v_i &= \partial_i v\ [\text{или } ik_i v] && (9.64) \end{aligned}$$

Метрика:

$$ds^2 = a^2(\eta)[(1+2\Phi)d\eta^2 - (1+2\Psi)dx^2] \qquad (9.65)$$

В Ньютоновом пределе Φ – гравитационный потенциал

Из (9.33)–(9.35) тензор Эйнштейна для скалярных мод:

$$\delta G^0_0 = \frac{2}{a^2}\left(-\Delta\Psi + 3\frac{a'}{a}\Psi' - 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi\right) \qquad (9.66)$$

$$\delta G^0_i = \frac{2}{a^2}\left(-\partial_i \Psi' + \frac{a'}{a}\partial_i \Phi\right) \qquad (9.67)$$

$$\begin{aligned} \delta G^i_j = {}& \frac{1}{a^2}\partial_i \partial_j(\Phi+\Psi) - \\ & - \frac{2}{a^2}\delta_{ij}\left[-\Psi'' + \frac{1}{2}\Delta(\Phi+\Psi) + \frac{a'}{a}(\Phi' - 2\Psi') + \right. \\ & \left. + \Phi\left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a}\right)\right] \qquad (9.68) \end{aligned}$$

В индексах (i, j) для скалярных мод

$$\delta T^i_j = -\delta^i_j \delta p \qquad (9.69)$$

Нет структуры $\partial_i \partial_j$, которая есть в $\delta G^i_j \Rightarrow$

$$\Phi + \Psi = 0 \Rightarrow \Psi = -\Phi \qquad (9.70)$$

Уравнения Эйнштейна для скалярных мод:

$$\Delta\Phi - 3\frac{a'}{a}\Phi' - 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = 4\pi G a^2 \delta\rho_{tot} \quad (9.71)$$

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi G a^2 [(\rho + p)v]_{tot} \quad (9.72)$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = 4\pi G a^2 \delta p_{tot} \quad (9.73)$$

Уравнения ковариантного сохранения
(λ – тип материи):

$$\delta\rho'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho_\lambda + \delta p_\lambda) + (\rho_\lambda + p_\lambda)(\Delta v_\lambda - 3\Phi') = 0 \quad (9.74)$$

$$[(\rho_\lambda + p_\lambda)v_\lambda]' + 4\frac{a'}{a}(\rho_\lambda + p_\lambda)v_\lambda + \delta p_\lambda + (\rho_\lambda + p_\lambda)\Phi = 0 \quad (9.75)$$

Не все уравнения (9.71)–(9.75) независимы.

Система не полна: нужны уравнения состояния:

$$p_\lambda = w_\lambda \rho_\lambda \quad (9.76)$$

и скорости звука

$$\delta p_\lambda = u_{s\lambda}^2 \delta p_\lambda \quad (9.77)$$

Вообще говоря, $w_\lambda \neq u_{s\lambda}^2$ так как $w_\lambda \neq \mathrm{const}$!

В остсутствие материи (9.71)–(9.73) не имеют нетривиальных решений $\Rightarrow$ свободное грав. поле не имеет распространяющихся скалярных (и векторных!) мод. Все распространяющиеся моды – тензорные, спиральность ± 2 (или смесь).

Моды за горизонтом и моды под горизонтом

Длина волны возмущения

$$\lambda(\eta) = \frac{2\pi}{q(\eta)} \quad (9.78)$$

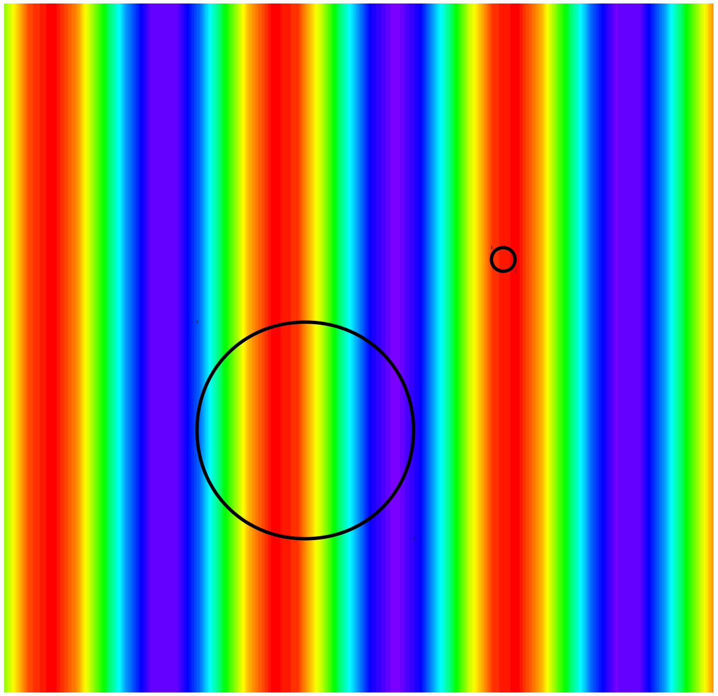
Для РД-стадии $l_H(\eta) = 1/H(\eta)$,
Для ДМ-стадии $l_H(\eta) = 2/H(\eta)$,
Всегда $l_H(\eta) \sim 1/H(\eta)$

Важно различать случаи:
Далеко за горизонтом

$$\lambda(\eta) \gg l_H(\eta) \Rightarrow q(\eta) \ll H(\eta) \quad (9.79)$$

Глубоко под горизонтом

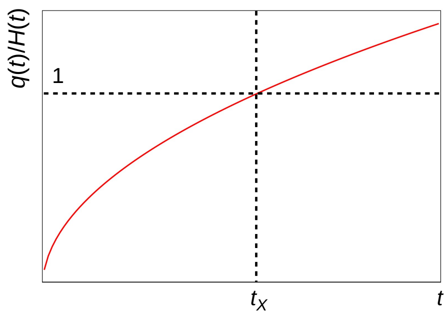
$$\lambda(\eta) \ll l_H(\eta) \Rightarrow q(\eta) \gg H(\eta) \quad (9.80)$$



РД и ДМ-стадии идут с замедлением ускорения $\Rightarrow$

$$\frac{l_H(t)}{\lambda(t)} = \frac{q(t)}{H(t)} = \frac{k/a(t)}{H(t)} \propto \frac{1/t^\alpha}{1/t} = t^{1-\alpha} \tag{9.81}$$

$\alpha < 1 \Rightarrow$ отношение растет,
мода может войти под горизонт



На РД-стадии

$$l_H = \frac{1}{H} = \frac{1}{a'/a^2} = \frac{\mathrm{const}^2\eta^2}{\mathrm{const}} = \mathrm{const}\cdot\eta\cdot\eta = a(\eta)\eta \tag{9.82}$$

На ДМ-стадии

$$l_H = \frac{2}{H} = \frac{2}{a'/a^2} = \frac{2\mathrm{const}^2\eta^4}{2\mathrm{const}\,\eta} = \mathrm{const}\cdot\eta^2\cdot\eta = a(\eta)\eta \tag{9.83}$$

Условие входа под горизонт

$$\lambda(\eta) \sim l_H(\eta) \tag{9.84}$$

$$\lambda(\eta) = \frac{2\pi}{q(\eta)} = \frac{2\pi}{k/a(\eta)} = \frac{2\pi a(\eta)}{k} \sim a(\eta)\eta \tag{9.85}$$

$$\Rightarrow k\eta_\times \sim 2\pi \sim 1 \tag{9.86}$$

$$\frac{1}{k} \gg \eta - \text{за горизонтом} \tag{9.87}$$

$$\frac{1}{k} \ll \eta - \text{под горизонтом} \tag{9.88}$$

Эквивалентное условие

$$k \ll \frac{a'}{a} - \text{за горизонтом} \tag{9.89}$$

$$k \gg \frac{a'}{a} - \text{под горизонтом} \tag{9.90}$$

Особенно важен момент η_{eq} (РД $\to$ ДМ).
Под горизонт входят волны

$$k_{eq} \sim \frac{1}{\eta_{eq}} \tag{9.91}$$

Их современный импульс (волновое число)

$$q_{eq}^{(0)} = \frac{k_{eq}}{a_0} = \frac{1}{a_0\eta_{eq}} \tag{9.92}$$

$$\lambda_{eq}^{(0)} = \frac{2\pi}{q_{eq}^{(0)}} = 2\pi a_0\eta_{eq} = 2\pi\cdot 1.2\cdot 10^2\,\text{Мпк} = 750\,\text{Мпк} \tag{9.93}$$

Эволюция векторных мод

Векторные моды:

$$h_{ij} = \partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T \quad (9.94)$$

$$v_i = V_i^T \quad (9.95)$$

$$h_{00} = 0 \quad (9.96)$$

$$\delta p = \delta\rho = 0 \quad (9.97)$$

$$\delta T_i^0 = (\rho + p) V_i^T \quad (9.98)$$

Ковариантное сохранение:

$$\partial_\eta[(\rho + p)V_i^T] + 4\frac{a'}{a}(\rho + p)V_i^T = 0 \quad (9.99)$$

$(0, i)$-компонента уравнений Эйнштейна:

$$\partial_\eta \Delta W_i^T = 16\pi G a^2 (\rho + p) V_i^T \quad (9.100)$$

Из (9.99):

$$\frac{\partial_\eta[(\rho + p)V_i^T]}{(\rho + p)V_i^T} = -4\frac{\partial_\eta a}{a} \Rightarrow \quad (9.101)$$

$$\boxed{(\rho + p)V_i^T = \mathrm{const} \cdot a^{-4}} \quad (9.102)$$

Если среда НР, то похоже на сохранение момента. Для каждой компоненты среды λ (9.102) выполняется отдельно.

Для релятивистского вещества $p \propto \rho \propto a^{-4} \Rightarrow$

$$\boxed{V_i^T = \mathrm{const}} \quad (9.103)$$

Для нерелятивистского вещества $p = 0, \rho \propto a^{-3} \Rightarrow$

$$\boxed{V_i^T = \mathrm{const}/a} \quad (9.104)$$

Векторные моды v_i либо не растут, либо убывают.

Из (9.100) и (9.102):

$$\partial_\eta(-k^2)W_i^T = 16\pi G a^2 \frac{\mathrm{const}}{a^4} = \mathrm{const}\frac{1}{a^2} \quad (9.105)$$

РД-стадия:

$$\partial_\eta W_i^T = \frac{\mathrm{const}}{\mathrm{const}\,\eta^2} = \frac{\mathrm{const}}{\eta^2} \Rightarrow \quad (9.106)$$

$$\boxed{W_i^T = \frac{\mathrm{const}}{\eta} = \frac{\mathrm{const}}{a}} \quad (9.107)$$

ДМ-стадия:

$$\partial_\eta W_i^T = \frac{\mathrm{const}}{\mathrm{const}\,\eta^4} = \frac{\mathrm{const}}{\eta^4} \Rightarrow \quad (9.108)$$

$$\boxed{W_i^T = \frac{\mathrm{const}}{\eta^3} = \frac{\mathrm{const}}{a^{3/2}}} \quad (9.109)$$

ΛД-стадия

$$\partial_\eta W_i^T = \frac{\mathrm{const}}{(-1/H_{dS}\eta)^2} = \mathrm{const}\,\eta^2 \Rightarrow \quad (9.110)$$

$$W_i^T = \mathrm{const}\,\eta^3; \quad \eta = -\frac{1}{aH_{dS}} \Rightarrow \quad (9.111)$$

$$\boxed{W_i^T = \frac{\text{const}}{a^3}} \tag{9.112}$$

Векторные моды гравитации *падают* во всех режимах эволюции $\Rightarrow$
падающие моды не должны себя проявлять, так как *ведут к сингулярности в начальных условиях.*

Обычно считается, что векторных мод нет
(как и любых падающих мод!).

Эволюция тензорных мод (реликтовые гравитационные волны)

Уравнение Эйнштейна для тензорных мод (см. (9.36))

$$\partial_\eta^2 h_{ij}^{TT} + 2\frac{a'}{a}\partial_\eta h_{ij}^{TT} - \Delta h_{ij}^{TT} = 0 \tag{9.113}$$

$$h_{ij}^{TT} = \sum_A e_{ij}^{(A)} h^{(A)}; \quad A = +, \times \tag{9.114}$$

Из (9.113) для каждой (A):

$$\partial_\eta^2 h^{(A)} + 2\frac{a'}{a}\partial_\eta h^{(A)} - \Delta h^{(A)} = 0; \tag{9.115}$$

или в импульсном представлении (для любой из компонент)

$$h'' + 2\frac{a'}{a}h' + k^2 h = 0 \tag{9.116}$$

Тензорные моды за горизонтом: константная мода и падающая мода

Условие на k для мод за горизонтом (9.89):

$$k \ll \frac{a'}{a} \tag{9.117}$$

Пренебрегаем в (9.116) членом $k^2 h$:

$$h'' + 2\frac{a'}{a}h' = 0 \tag{9.118}$$

Одно из решений – константная мода:

$$h = h_{(i)} = \text{const} \tag{9.119}$$

Другое решение – падающая мода:

$$h(\eta) = \text{const} \int_\eta^\infty \frac{d\eta}{a^2(\eta)} \tag{9.120}$$

Ведет себя как падающая векторная мода

$$\begin{aligned} \text{РД} &: \ h \propto a^{-1} \\ \text{ДМ} &: \ h \propto a^{-3/2} \\ \Lambda\text{Д} &: \ h \propto a^{-3} \end{aligned}$$

Следовательно такие решения не рассматриваются.

Все тензорные моды за горизонтом – только константные моды

$$h^A = h_{(i)}^A(\mathbf{k}); \ \ A = +, \times \tag{9.121}$$

Тензорные моды под горизонтом. Сшивка с константной модой

Введем новую переменную:

$$f(\eta) = a(\eta)h(\eta) \tag{9.122}$$

Уравнение (9.116) принимает вид:

$$f'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) f = 0 \tag{9.123}$$

Т.к. a зависит от η степенным образом (РД и ДМ стадии), то

$$\frac{a''}{a} = \mathrm{const}\frac{1}{\eta^2},\ \mathrm{const} \sim 1 \tag{9.124}$$

Под горизонтом

$$k\eta \gg 1 \Rightarrow k^2 \gg \frac{1}{\eta^2} \sim \frac{a''}{a} \Rightarrow k^2 - \frac{a''}{a} \cong k^2 \Rightarrow \tag{9.125}$$

получается уравнение осциллятора

$$f'' + k^2 f = 0 \Rightarrow \tag{9.126}$$

$$f(\eta) = C\cos(k\eta + \alpha) \Rightarrow h(\eta) = \frac{C}{a(\eta)}\cos(k\eta + \alpha) \tag{9.127}$$

C, α ищем из условия сшивки с константной модой.

Грубо (асимптотика)

Момент входа под горизонт $\eta_\times$:

$$h(\eta_\times) = \frac{C}{a(\eta_\times)}\cos(k\eta_\times + \alpha) \sim \frac{C}{a(\eta_\times)} \Rightarrow \tag{9.128}$$

$$C \sim h(\eta_\times)a(\eta_\times) \sim h_{(i)}a(\eta_\times) \Rightarrow \tag{9.129}$$

$$h(\eta) \sim h_{(i)}\frac{a(\eta_\times)}{a(\eta)}\cos(k\eta + \alpha) \tag{9.130}$$

($\eta_\times$ для разных k – разные!)

Если $h_{(i)}$ не зависят от k (белый шум), то зависимость h от k для мод, вошедших под горизонт, определяется зависимостью $a(\eta_\times(k))$

$\eta_\times \sim 1/k \Rightarrow$

Если волны входят на РД стадии

$$a(\eta_\times) = \mathrm{const}\,\eta_\times = \mathrm{const}\frac{1}{k} \Rightarrow h(k) \propto h_i\frac{1}{k};\ k \gg k^{(eq)} \tag{9.131}$$

Если волны входят на ДМ стадии

$$a(\eta_\times) = \mathrm{const}\,\eta_\times^2 = \mathrm{const}\frac{1}{k^2} \Rightarrow h(k) \propto h_i\frac{1}{k^2};\ k \ll k^{(eq)} \tag{9.132}$$

Уточнение оценки: решаем (9.116) при $\eta \sim \eta_\times$

Для РД-входящих мод

$$\frac{a'}{a} = \frac{1}{\eta} \Rightarrow \tag{9.133}$$

из (9.116)

$$h'' + \frac{2}{\eta}h' + k^2 h = 0 \tag{9.134}$$

Замена $x = k\eta \Rightarrow$

$$\frac{d^2h}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dh}{dx} + h = 0 \tag{9.135}$$

Решение, стремящееся к константе при $x \to 0$ есть сферическая функция Бесселя 0-го порядка:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x} \tag{9.136}$$

$$h(\eta) = h_{(i)}\frac{\sin k\eta}{k\eta} \tag{9.137}$$

• Это решение верно лишь на РД-стадии, вблизи $\eta_\times$. Как оно ведет себя потом?

Запишем в виде (переходит в (9.137) вблизи $\eta_\times$):

$$h(\eta) = h_{(i)}\frac{a(\eta_\times)}{\eta_\times}\frac{\sin k\eta}{ka(\eta)} \tag{9.138}$$

Отношение $a(\eta)/\eta$ не зависит от времени (вблизи $\eta_\times$). Из (8.40):

$$\frac{a(\eta_\times)}{\eta_\times} = \left(\frac{g_*}{g_{*,0}}\right)^{1/6} a_0^2 H_0\sqrt{\Omega_{rad}} \Rightarrow \tag{9.139}$$

$$h(\eta) = h_{(i)}\left[\left(\frac{g_*}{g_{*,0}}\right)^{1/6} a_0^2 H_0\sqrt{\Omega_{rad}}\right]\frac{\sin k\eta}{ka(\eta)} \tag{9.140}$$

Это решение универсально верно при всех η после входа моды под горизонт, так как амплитуда универсально падает как $1/a$ (см. грубую оценку выше)! Фаза колебания фиксирована!

Для ДМ-входящих мод

$$a(\eta) = \mathrm{const}\,\eta^2;\;\; \frac{a'}{a} = \frac{2\eta}{\eta^2} = \frac{2}{\eta} \tag{9.141}$$

из (9.116)

$$h'' + \frac{4}{\eta}h' + k^2h = 0 \tag{9.142}$$

Замена:

$$h(\eta) = \frac{1}{\eta}y(\eta) \Rightarrow \tag{9.143}$$

$$\frac{d^2y}{d\eta^2} + \frac{2}{\eta}\frac{dy}{d\eta} + \left(k^2 - \frac{2}{\eta^2}\right)y = 0 \tag{9.144}$$

Еще замена: $x = k\eta \Rightarrow$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)y = 0 \tag{9.145}$$

– упавнение для сферической функции Бесселя 1-го порядка:

$$j_1(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right) \tag{9.146}$$

Асимптотика $j_1(x \to 0) = 1/3$.

Решение с асимптотикой $h(\eta \to 0) = h_{(i)}$:

$$h(\eta) = -3h_{(i)}\frac{1}{(k\eta)^2}\left(\cos k\eta - \frac{\sin k\eta}{k\eta}\right) \tag{9.147}$$

$$h(\eta) = -3h_{(i)}\frac{a(\eta_\times)}{\eta_\times^2}\,\frac{1}{k^2 a(\eta)}\,\left(\cos k\eta - \frac{\sin k\eta}{k\eta}\right) =$$

$$= \Big\backslash \text{ Из (8.45) : } \frac{a}{\eta^2} = \frac{a_0^3 H_0^2 \Omega_M}{4} \Big\backslash =$$

$$= -3h_{(i)}\frac{a_0^3 H_0^2 \Omega_M}{4}\,\frac{1}{k^2 a(\eta)}\,\left(\cos k\eta - \frac{\sin k\eta}{k\eta}\right) \quad (9.148)$$

При $k\eta >> 1$ (глубоко под горизонтом)

$$h(\eta) = -3h_{(i)}\frac{a_0^3 H_0^2 \Omega_M}{4}\,\frac{1}{k^2 a(\eta)}\,\cos k\eta \qquad (9.149)$$

что соответствует (9.130) и (9.132).

Это решение универсально верно при всех η после входа моды под горизонт, так как амплитуда универсально падает как $1/a$ (см. грубую оценку выше)! Фаза колебания фиксирована!