Лекция 5

Термодинамика Вселенной и степени свободы СМ

Термодинамика (горячей) Вселенной

Химический потенциал в равновесии

$$dE = -PdV + TdS + \sum_i \mu_i dN_i = 0 \quad (5.1)$$

Термодинамическое **И** химическое равновесие: Превращение частиц много быстрее расширения Вселенной:

$$dV = dS = 0 \ \Rightarrow \ \sum_i \mu_i dN_i = 0 \quad (5.2)$$

Пример реакции в равновесии:

$$A_1 + A_2 \leftrightarrow B_1 + B_2 \quad (5.3)$$

Предположим малый выход из химического равновесия, $dN \neq 0$:

$$\mu_{A_1} dN + \mu_{A_2} dN - \mu_{B_1} dN - \mu_{B_1} dN = 0 \ \Rightarrow \\ \Rightarrow \ \mu_{A_1} + \mu_{A_2} = \mu_{B_1} + \mu_{B_2} \quad (5.4)$$

В общем случае:

$$A_1 + \cdots + A_n \leftrightarrow B_1 + \cdots + B_m \ \Rightarrow \\ \Rightarrow \ \mu_{A_1} + \cdots + \mu_{A_n} = \mu_{B_1} + \cdots + \mu_{B_n} \quad (5.5)$$

Полезные следствия:

$$e + e \leftrightarrow e + e + \gamma + \cdots + \gamma \Rightarrow \mu_\gamma = 0 \quad (5.6)$$

$$b + \bar{b} = 2\gamma \ \Rightarrow \ \mu_b = -\mu_{\bar{b}} \quad (5.7)$$

Распределения Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна в импульсном представлении (идеальные газы)

Обычная запись распределений ФД и БЭ идеального газа:

$$N_i = \frac{g_i}{e^{(E_i-\mu)/T} \pm 1}; \qquad \begin{matrix} +\text{ФД} \\ -\text{БЭ} \end{matrix} \quad (5.8)$$

- N_i – число частиц в энергетическом ящике номер i с энергией E_i
- g_i – число минимальных ячеек фазового пространства одной частицы в этом ящике (стат. вес ящика).

Рассматриваем объем V с однордным газом частиц. Энергетический ящик $d\Gamma = d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p}$ вблизи энергии E.
Тогда

$$g_i = \frac{d\Gamma}{a} g \quad (5.9)$$

- a – объем минимальной ячейки фазового пространства частицы
- g – статистический вес внутрениих состояний частицы (спин, спиральность)

$$dN = \frac{g}{a} \frac{d\Gamma}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1} \quad (5.10)$$

Из кв.мех.:

$$a = h^3 = (2\pi)^3 \hbar^3 \equiv (2\pi)^3 \quad (5.11)$$

Распределение однородно внутри $V \Rightarrow$
нет зависимости от координат и в $d\Gamma$ можно включить весь V:

$$d\Gamma = V d^3\mathbf{p} \ \Rightarrow \quad (5.12)$$

$$dN = \frac{1}{(2\pi)^3}\, g\, \frac{V d^3\mathbf{p}}{e^{[E(\mathbf{p})-\mu]/T} \pm 1} \tag{5.13}$$

Можно переписать как плотность распределения импульса:

$$\boxed{\frac{1}{V}\frac{dN}{d^3\mathbf{p}} \equiv f(\mathbf{p}) = \frac{g}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{e^{[E(\mathbf{p})-\mu]/T} \pm 1}} \tag{5.14}$$

Нормировка:

$$\int f(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} = n - \text{число частиц в 1 объема} \tag{5.15}$$

Для частиц типа $i \to f_i(\mathbf{p})$

$$E_i(\mathbf{p}) = \sqrt{p^2 + m_i^2} \;\Rightarrow\; EdE = pdp \tag{5.16}$$

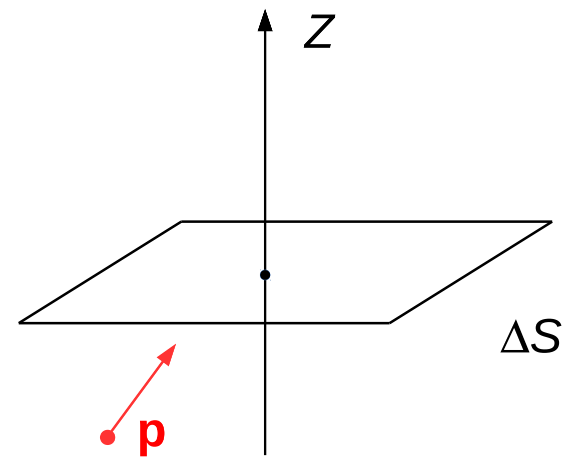
Интегрируя по углам – плотность числа частиц через распределение по энергии:

$$n_i = \int f_i(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} = \int f_i(p)\, 4\pi p^2\, dp = \\ = 4\pi \int f_i(E)\sqrt{E^2 - m_i^2}\, EdE \tag{5.17}$$

Плотность энергии

$$\rho_i = \int f_i(\mathbf{p}) E(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} = 4\pi \int f_i(E)\sqrt{E^2 - m_i^2}\, E^2 dE \tag{5.18}$$

Давление



Количество частиц с импульсом в $d^3\mathbf{p}$ около $\mathbf{p}$, налетающих с одной стороны за Δt:

$$\Delta n_i = v_z f_i(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p}\, \Delta S \Delta t \tag{5.19}$$

$$p_z = \frac{m v_z}{\sqrt{1-v^2}};\;\; E = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}; \Rightarrow v_z = \frac{p_z}{E} \tag{5.20}$$

От одной частицы площадка получает получает импульс $\Delta p_z = 2p_z \Rightarrow$

Давление есть переданный импульс через единицу площади в единицу времени:

$$p_i = \int_{p_z>0} 2p_z \frac{p_z}{E} f_i(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} = \Big\backslash\, p_z^2 = \frac{1}{3}p^2, 2 \to 1 \,\Big\backslash = \\ = \frac{4\pi}{3}\int_0^\infty \frac{p^4 dp}{E(p)} f_i(p) = \frac{4\pi}{3}\int_0^\infty f_i(E)(E^2 - m_i)^{3/2} dE \tag{5.21}$$

Ультрарелятивистские частицы: $T \gg m_i, \mu_i = 0$

Из (5.18):

$$\rho_i = 4\pi \int_0^\infty \frac{g_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{E/T} \pm 1} E^3 dE = \\ = \frac{g_i}{2\pi^2} T^4 \int_0^\infty \frac{z^3}{e^z \pm 1} dz \quad (5.22)$$

Табличные интегралы:

$$\int_0^\infty \frac{z^{2n-1}}{e^z + 1} dz = \frac{2^{2n-1} - 1}{2n} \pi^{2n} B_n \quad (5.23)$$

$$\int_0^\infty \frac{z^{2n-1}}{e^z - 1} dz = \frac{(2\pi)^{2n}}{4n} B_n \quad (5.24)$$

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42} \quad (5.25)$$

$n = 2 \Rightarrow$

$$\int_0^\infty \frac{z^3}{e^z + 1} = \frac{7}{4} \pi^4 \frac{1}{30} \quad (5.26)$$

$$\int_0^\infty \frac{z^3}{e^z - 1} = 2\pi^4 \frac{1}{30} \quad (5.27)$$

Объемная формула Стефана-Больцмана для УР-частиц типа i:

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{7}{8} g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 & \text{– Ферми-Дирак} \\ g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 & \text{– Бозе-Эйнштейн} \end{cases} \quad (5.28)$$

Если все УР частицы имеют температуру T, то

$$\rho = g_* \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad (5.29)$$

$$g_* = \sum_{\text{бозоны}} g_i + \frac{7}{8} \sum_{\text{фермионы}} g_i \quad (5.30)$$

g_* – эффективное число степеней свободы (стат.вес).

Давление

Из (5.21):

$$p_i = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{g_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{E/T} \pm 1} E^3 dE = \frac{\rho_i}{3} \text{ (см. (5.22))} \quad (5.31)$$

Для УР вещества всегда $p = \rho/3$.

Плотность числа частиц

$$n_i = 4\pi \int \frac{g_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{E/T} \pm 1} E^2 dE = \\ = \frac{g_i}{2\pi^2} T^3 \int_0^\infty \frac{z^2}{e^z \pm 1} dz \quad (5.32)$$

Табличные интегралы:

$$\int_0^\infty \frac{z^{x-1}}{e^z+1} = (1-2^{1-x})\Gamma(x)\zeta(x) \tag{5.33}$$

$$\int_0^\infty \frac{z^{x-1}}{e^z-1} = \Gamma(x)\zeta(x) \tag{5.34}$$

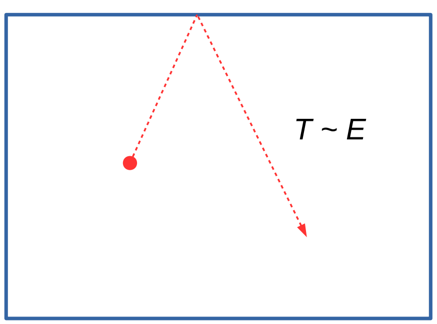
$$\begin{array}{c|l} x & \zeta(x) \\ \hline 3 & 1.202 \\ 5 & 1.037 \\ 3/2 & 2.612 \\ 5/2 & 1.341 \end{array} \tag{5.35}$$

$$\begin{array}{l} \Gamma(n) = (n-1)! \\ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \end{array} \tag{5.36}$$

$x = 3 \Rightarrow$

$$n_i = \begin{cases} g_i \dfrac{3}{4}\dfrac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 & \text{—Ферми-Дирак} \\ g_i \dfrac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 & \text{—Бозе-Эйнштейн} \end{cases} \tag{5.37}$$

Частица в ящике:



А есть ли тепловое (химическое) равновесие?

Характерное время расширения:

$$1/t_H \sim H(t) \tag{5.38}$$

Электромагнитное взаимодействие:

$$\sigma \propto \alpha^2 \Rightarrow 1/t_{em} \sim \alpha^2 T \tag{5.39}$$

Из (4.99):

$$H(T) = \frac{T^2}{M_{Pl}^*};\ M_{Pl}^* = M_{Pl}\sqrt{\frac{90}{8\pi^3 g_*}} = \frac{1}{1.66\sqrt{g_*}} M_{Pl} \tag{5.40}$$

Нужно:

$$1/t_{em} \gg 1/H(t) \quad [t_{em} \ll t_H] \tag{5.41}$$

$$\alpha^2 T \gg \frac{T^2}{M_{Pl}^*} \Rightarrow T \ll \alpha^2 M_{Pl}^* \sim 10^{14}\,\text{ГэВ} \tag{5.42}$$

Тепловое равновесие для ЭМ взаимодействия хорошо работает для $T \lesssim 10^{12}$ ГэВ

Нерелятивистский газ (распределение Больцмана)

$$m_i \gg T,\ m_i - \mu_i \gg T \ \Rightarrow\ e^{(E-\mu_i)/T} \gg 1 \qquad (5.43)$$

$$f_B(p) = g_i \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-[E(p)-\mu_i]/T} \qquad (5.44)$$

$$f_B(p) = g_i \frac{1}{(2\pi)^3} e^{(\mu_i - m_i)/T} e^{-p^2/(2m_i T)} \qquad (5.45)$$

$$\begin{aligned} n_i &= \int f_B(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} = \int_0^\infty f_B(p)\, 4\pi p^2\, dp = \\ &= 4\pi \frac{g_i}{(2\pi)^3} e^{(\mu_i - m_i)/T} \int_0^\infty p^2 e^{-p^2/(2m_i T)}\, dp = \\ &= \Big\backslash \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/4 \Big\backslash = \\ &= g_i e^{(\mu_i - m_i)/T} \left(\frac{m_i T}{2\pi}\right)^{3/2} \end{aligned} \qquad (5.46)$$

Больцмановский газ:

$$\boxed{n_i = g_i e^{(\mu_i - m_i)/T} \left(\frac{m_i T}{2\pi}\right)^{3/2}} \qquad (5.47)$$

$$\rho_i = m_i n_i + \frac{3}{2} n_i T \qquad (5.48)$$

$$p = \frac{1}{3} n \langle \mathbf{v}\mathbf{p} \rangle \Rightarrow \Big\backslash E_k = \frac{3}{2} T \Big\backslash \Rightarrow p_i = n_i T \ll \rho_i \qquad (5.49)$$

Энтропия во Вселенной

$$dE = TdS - pdV + \sum_i \mu_i dN_i \qquad (5.50)$$

Будем считать dE в расчете на 1 тип частиц.
Для плотностей:

$$\rho = \frac{E}{V},\ n = \frac{N}{V},\ s = \frac{S}{V} \qquad (5.51)$$

$$\begin{aligned} dE &= \rho\, dV + V d\rho && (5.52) \\ dN &= n\, dV + V dn && (5.53) \\ dS &= s\, dV + V ds && (5.54) \end{aligned}$$

Из (5.50):

$$(Ts - p - \rho + \mu n)dV + (Tds - d\rho + \mu dn)V = 0 \qquad (5.55)$$

Запишем I начало только с локальными величинами. Применяем (5.55) к области постоянного (единичного) объема внутри системы. $dV = 0 \Rightarrow$

$$d\rho = Tds + \mu dn \qquad (5.56)$$

Это соотношение между локальными величинами выполняется всегда (в равновесии).
Подставляем (5.56) в (5.55) и применяем к произвольной системе переменного объема:

$$\boxed{s = \frac{p + \rho - \mu n}{T}} \qquad (5.57)$$

УР газ, μ мало

$$s_i = \frac{p_i + \rho_i}{T} \tag{5.58}$$

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{7}{8} g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 & - \text{ФД} \\ g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 & - \text{БЭ} \end{cases} ; \quad p_i = \frac{1}{3}\rho_i \tag{5.59}$$

$$\boxed{s_i = \frac{4}{3}\frac{\rho_i}{T} = \begin{cases} \frac{7}{8} g_i \frac{4\pi^2}{90} T^3 & - \text{ФД} \\ g_i \frac{4\pi^2}{90} T^3 & - \text{БЭ} \end{cases}} \tag{5.60}$$

$$n_i = \begin{cases} g_i \frac{3}{4}\frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 & -\text{Ферми-Дирак} \\ g_i \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 & -\text{Бозе-Эйнштейн} \end{cases} \tag{5.61}$$

$$\boxed{s_i \sim n_i} \tag{5.62}$$

Полная плотность энтропии УР газа

$$s = g_* \frac{4\pi^2}{90} T^3 \tag{5.63}$$

Нерелятивистский газ

$$\rho_i = m_i n_i + \frac{3}{2} n_i T \tag{5.64}$$

$$p_i = n_i T \tag{5.65}$$

$$s_i = \frac{p_i + \rho_i - \mu_i n}{T} \Rightarrow \tag{5.66}$$

$$s_i = \left(\frac{5}{2} + \frac{m_i - \mu_i}{T}\right) n_i \tag{5.67}$$

Из

$$\boxed{n_i = g_i e^{(\mu_i - m_i)/T} \left(\frac{m_i T}{2\pi}\right)^{3/2}} \tag{5.68}$$

получаем

$$\frac{m_i - \mu_i}{T} = \ln\left[\frac{g_i}{n_i}\left(\frac{m_i T}{2\pi}\right)^{3/2}\right] \Rightarrow \tag{5.69}$$

$$s_i = n_i \left(\frac{5}{2} + \ln\left[\frac{g_i}{n_i}\left(\frac{m_i T}{2\pi}\right)^{3/2}\right]\right) \tag{5.70}$$

При $T \lesssim 0.5\,$МэВ электроны и адроны – нерелятивистсткие.
Сейчас $n_e \sim n_B \sim 10^{-9} n_\gamma$.
ln в (5.70) $\approx 60(\bigstar) \Rightarrow s_B \ll s_\gamma$ и

$$\boxed{s \sim s_\gamma \sim n_\gamma} \tag{5.71}$$

Из (5.67) и (5.70) $\Rightarrow \mu_i \sim m_i$.

Сохранение энтропии при сохранении разности числа частиц и античастиц

В *сопутствующем* объеме, с учетом всех типов частиц:

$$dE = TdS - pdV + \sum \mu(dN - d\bar{N}) = \\ = TdS - pdV + \sum \mu\, d(N - \bar{N}) = \\ = TdS - pdV \quad (5.72)$$

$$TdS = dE + pdV = d(\rho V) + pdV = \\ = V d\rho + \rho dV + pdV = (p+\rho)dV + V d\rho \quad (5.73)$$

$$T\frac{dS}{dt} = (p+\rho)\frac{dV}{dt} + V\frac{d\rho}{dt} \quad (5.74)$$

$$\text{Сопутствующий объем: } V = ka^3 \Rightarrow \quad (5.75)$$

$$\frac{dV}{dt} = k3a^2\dot{a} \Rightarrow \quad (5.76)$$

$$T\frac{dS}{dt} = ka^3\left[(p+\rho)3\frac{\dot{a}}{a} + \dot{\rho}\right] \quad (5.77)$$

Закон сохранения ЭИ:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(p+\rho) = 0 \Rightarrow \frac{dS}{dt} = 0 \quad (5.78)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(ka^3 s) \Rightarrow \frac{d}{dt}(a^3 s) = 0 \quad (5.79)$$

Закон сохранения энтропии в локальной форме

$$\boxed{3\dot{a}s + \dot{s} = 0} \quad (5.80)$$

Барион-фотонное отношение

При температуре ниже нескольких сот ГэВ барионное число сохраняется:

$$(n_B - n_{\bar{B}})a^3 = \text{const} \quad (5.81)$$

$$sa^3 = \text{const} \Rightarrow \quad (5.82)$$

$$\Delta_B = \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{s} = \text{const} \quad (5.83)$$

– хорошая характристика барионной асимметрии (сейчас $\Delta_B = n_B/s$)

Барион-фотонное отношение:

$$\eta_B = \frac{n_B}{n_\gamma} \quad (5.84)$$

При температуре $T \lesssim 1\,\text{МэВ}\ \left\backslash T_\nu = \sqrt[3]{\frac{4}{11}}T_\gamma \right\backslash$

$$s = g_*\frac{4\pi^2}{90}T^3 = \left(2 + \frac{7}{8}\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{4}{11}\right)\frac{4\pi^2}{90}T^3 \quad (5.85)$$

$$\Delta_B = \frac{n_B}{s} = \frac{n_B}{n_\gamma}\frac{n_\gamma}{s} = \eta_B\frac{n_\gamma}{s} = \\ = \frac{2\frac{\zeta(3)}{\pi^2}T^3}{\left(2+\frac{7}{8}\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{4}{11}\right)\frac{4\pi^2}{90}T^3}\eta_B = 0.14\eta_B \quad (5.86)$$

$$\boxed{\Delta_B = 0.14\eta_B} \quad (5.87)$$

$$\eta_B = (6.10 \pm 0.20)\cdot 10^{-10} \quad (5.88)$$

$$\Delta_B = 0.87\cdot 10^{-10} \quad (5.89)$$

Частицы стандартной модели и $g_*(T)$

$$\rho = g_* \frac{\pi^2}{30} T^4 \tag{5.90}$$

$$g_* = \sum_{\text{бозоны}} g_i + \frac{7}{8} \sum_{\text{фермионы}} g_i \tag{5.91}$$

Лептоны		Кварки	
$\nu_e(?)$	$e(0.511\,\text{МэВ})$	u(1.5–3.0 МэВ)	d(3.0–7.0 МэВ)
$\nu_\mu(?)$	$\mu(105.7\,\text{МэВ})$	c(1.15–1.35 ГэВ)	s(0.07-0.12 ГэВ)
$\nu_\tau(?)$	$\tau(1.78\,\text{ГэВ})$	t(169.3–173.5 ГэВ)	b(4.1–4.3 ГэВ))
Калибровочные бозоны			
$\gamma(0)$	$G(0)$	$Z(91.2\,\text{ГэВ})$	$W(80.4\,\text{ГэВ})$
Бозон Хиггса $h(125\,\text{ГэВ})$			

$$X - \text{бозон: } m_X \sim 10^{15} \div 10^{16}\,\text{ГэВ (?)} \tag{5.92}$$