Лекция 3

Метрика Фридмана-Робертсона-Уокера. Однородные и изотропные космологические модели с космологическим членом и без. Космологические горизонты, красное смещение.

Космологический принцип и смысл однородности и изотропии

• Предполагаем, что Вселенная заполнена идеальной (без вязкости, многокомпонентной) *космологической жидкостью*
В сопутствующей системе

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix} = \sum_i \hat{T}_i \qquad (3.1)$$

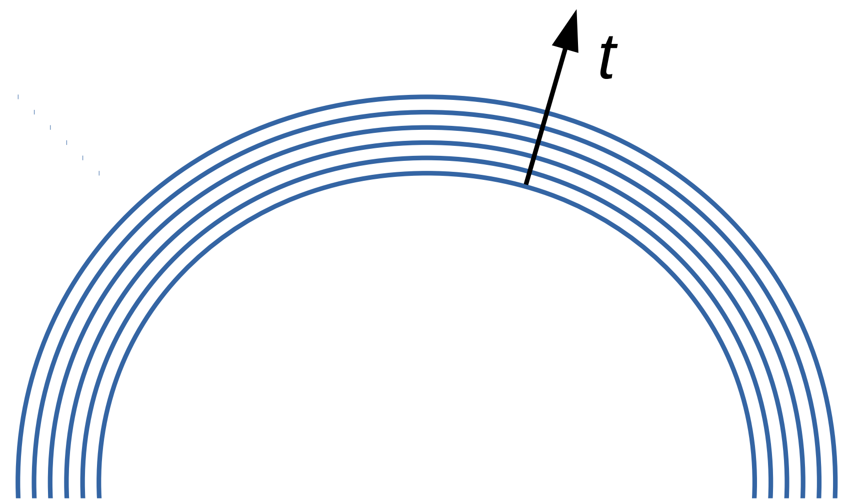
• *Космологический принцип:* Вселенная изотропна и однородна: космологическая жидкость однородна и геометрия однородна (скаляр кривизны).

• Смысл однородности.
Multifinger time – многонаправленное время – набор пространственно-подобных поверхностей, перенумерованных параметром t.
Через каждое событие проходит гиперповерхность однородности.

• Через каждое событие проходит гиперповерхность изоторпии.

• Изотропия на пространственной гипервоперхности влечет однородность на той же поверхности.
Доказательство: Если бы не было однородности, на поверхности возникли бы градиенты, нарушающие изотропию.

• На гиперповрхностях однородности космологическая жидкость должна покоиться (иначе – анизотропия). $\Rightarrow$
Если все пространство-время разложено на систему поверхностей однородности, то имеет естественную сопутствующую космологическую систему отсчета, связанную с покоящейся космологической жидкостью.



Дополнительное чтение: Ч.Мизнер, К.Торн, Дж.Уилер. Гравитация, Т.2., §27.2 – §27.5.

Однородные и изотропные трехмерные пространства

Однородных и изотропных трехмерных пространства всего три: евклидово пространство, трехмерная сфера, трехмерная псевдосфера.

Евклидово трехмерное пространство пространство (3-плоскось)
Есть такая система координат, что во всем пространстве

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \tag{3.2}$$

3-*сфера*
Фиктивное 4-мерное евклидово пространство:

$$ds^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 + (dy^4)^2 \tag{3.3}$$

Уравнение 3-сферы:

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 + (y^4)^2 = a^2 \tag{3.4}$$

Описывается тремя параметрами:

$$\begin{aligned} y^1 &= a\cos\chi \\ y^2 &= a\sin\chi\cos\theta \\ y^2 &= a\sin\chi\sin\theta\cos\varphi \\ y^4 &= a\sin\chi\sin\theta\sin\varphi \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$dl^2 = a^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)] \bigstar \tag{3.6}$$

★ Упражнение: попытайтесь отгадать параметризацию 4-х мерной сферы в 5-мерном пространстве и выражение для элемента длины на 4-х мерной сфере.

В квадратных скобках – метрика единичной 3-сферы, никаких упоминаний фиктивного 4-мерного пространства (y^1, y^2, y^3, y^4) нет.

3-*псевдосфера (гиперболоид)* Фиктивное 4-мерное псевдоевклидово пространство:

$$ds^2 = (dy^1)^2 - (dy^2)^2 - (dy^3)^2 - (dy^4)^2 \tag{3.7}$$

3-псевдосфера – это сфера в 4-пространстве Минковского:

$$(y^1)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2 - (y^4)^2 = a^2, \quad y^1 > 0 \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} y^1 &= a\,\mathrm{ch}\,\chi \\ y^2 &= a\,\mathrm{sh}\,\chi\cos\theta \\ y^2 &= a\,\mathrm{sh}\,\chi\sin\theta\cos\varphi \\ y^4 &= a\,\mathrm{sh}\,\chi\sin\theta\sin\varphi \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$dl^2 = a^2[d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)] \bigstar \tag{3.10}$$

Как понять, что эти пространства однородны?
Для 3-сферы, 3-плоскости и 3-псевдосферы

$$R_{ijkl} = \frac{\varkappa}{a^2}(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}) \tag{3.11}$$

$$\varkappa = \begin{cases} +1 & - \ \text{3-сфера} \\ \ \ 0 & - \ \text{3-плоскость} \\ -1 & - \ \text{3-псевдосфера} \end{cases} \tag{3.12}$$

Проверяется прямым вычислением, или в ковариантном формализме: см. Robert M. Wald, General Relativity Sec. 5.1, p. 91.

$$R_{ij} = 2\frac{\varkappa}{a^2}\gamma_{ij} \bigstar \tag{3.13}$$

$$R = 6\frac{\varkappa}{a^2} \bigstar \tag{3.14}$$

Скаляр кривизны всюду одинаков – пространства постоянной кривизны.

Метрика Фридмана-Робертсона-Уокера (FRW)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j \tag{3.15}$$

γ_{ij} – метрика одного из однородных 3-пространств.
Для сферы и псевдосферы можно взять метрику единичных сфер.
Для 3-плоскости физ. смысл имеет только $a(t_1)/a_(t_2)$

$$\hat{g} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & a^2(t)\hat{\gamma} \end{array}\right) \tag{3.16}$$

Только в рамках модели FRW космологическое время приобретает смысл!

Метрика FRW – сопутствующая система отсчета космологической жидкости

FRW система отсчета связана с свободной неподвижной космологической жидкостью

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}u^\nu u^\lambda = 0 \tag{3.17}$$

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\lambda}) \tag{3.18}$$

$$\Gamma^0_{00} = 0; \;\; \Gamma^0_{0i} = 0; \;\; \Gamma^i_{00} = 0 \bigstar \tag{3.19}$$

$$\Gamma^i_{0j} = \delta^i_j \frac{\dot{a}}{a} \bigstar \tag{3.20}$$

$$\Gamma^0_{ij} = a\dot{a}\gamma_{ij} \bigstar \tag{3.21}$$

$$\Gamma^i_{jk} = {}^{(3)}\Gamma^i_{jk} \bigstar \tag{3.22}$$

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{dt}{dt} = 1; \quad u^i = \frac{dx^i}{ds} = 0 \tag{3.23}$$

$$\forall\mu: \; \frac{du^\mu}{ds} = 0; \;\; \Gamma^\mu_{00} = 0 \;\Rightarrow \tag{3.24}$$

уравнение (3.17) удовлетворено.

FRW система отсчета связана со свободными частицами.

Уравнение Фридмана

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) \tag{3.25}$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\mu\Gamma^\lambda_{\nu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda\nu} \tag{3.26}$$

$$R_{00} = -\partial_0\Gamma^\lambda_{0\lambda} - \Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{0\lambda} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \bigstar \tag{3.27}$$

$$\boxed{R_{00} = -3\,\frac{\ddot{a}}{a}} \tag{3.28}$$

$$R_{0i} = \partial_j\Gamma^j_{0i} - \partial_0\Gamma^\lambda_{i\lambda} + \Gamma^\lambda_{0i}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda i} = 0 \bigstar \tag{3.29}$$

$$R_{ij} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{ij} - \partial_i \Gamma^\lambda_{j\lambda} + \Gamma^\lambda_{ij}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{i\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda j} =$$
$$\partial_0 \Gamma^0_{ij} + \partial_k \Gamma^k_{ij}$$
$$- \partial_i \Gamma^0_{j0} - \partial_i \Gamma^l_{jl}$$
$$+ (\Gamma^0_{ij}\Gamma^\sigma_{0\sigma} + \Gamma^k_{ij}\Gamma^\sigma_{k\sigma})$$
$$- (\Gamma^0_{ik}\Gamma^k_{0j} + \Gamma^k_{i0}\Gamma^0_{jk} + \Gamma^k_{il}\Gamma^l_{jk}) =$$
$$= \partial_0 \Gamma^0_{ij} + \Gamma^0_{ij}\Gamma^\sigma_{0\sigma} - \Gamma^0_{ik}\Gamma^k_{0j} - \Gamma^k_{i0}\Gamma^0_{jk} + {}^{(3)}R_{ij} =$$
$$= (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)\gamma_{ij} + {}^{(3)}R_{ij} =$$
$$= \Big\backslash\, {}^{(3)}R_{ij} = 2\frac{\varkappa}{r^2}\gamma_{ij};\ r \equiv 1;\ \varkappa = +1, 0, -1 \Big\backslash =$$
$$= (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\varkappa)\gamma_{ij} \quad (3.30)$$

$$\boxed{R_{ij} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\varkappa)\gamma_{ij}} \quad (3.31)$$

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij} =$$
$$= \backslash\text{считается элементарно}\backslash = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a} + \frac{\varkappa}{a^2}\right) \Rightarrow \quad (3.32)$$

00-компонента уравнений Эйнштейна:

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\varkappa}{a^2}\right) \quad (3.33)$$

Покоящаяся материя:

$$T_{00} = \rho; \quad g_{00}\Lambda = \Lambda \ \Rightarrow \quad (3.34)$$

Уравнение Фридмана (с Λ-членом)

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G(\rho + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2}} \quad (3.35)$$

Как меняется ρ в зависимости от t и a?

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (3.36)$$

$$\nabla_\mu T^{\mu 0} = \partial_\mu T^{\mu 0} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma}T^{\sigma 0} + \Gamma^0_{\mu\sigma}T^{\mu\sigma} =$$
$$= \partial_0 T^{00} + \Gamma^i_{i0}T^{00} + \Gamma^0_{ij}T^{ij} =$$
$$= \Big\backslash\, T^{ij} = (p+\rho)u^i u^j - pg^{ij} = -pg^{ij} = \frac{1}{a^2}p\gamma^{ij} \Big\backslash =$$
$$= \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (3.37)$$

(Λ-член удовлетворяет ковариантное сохранение энергии-имульса тождественно).

Полная система уравнений изотропной космологии:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G(\rho + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2} \quad \text{(уравнение Фридмана)} \quad (3.38)$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad \text{(ковариантное сохранение)} \quad (3.39)$$

$$p = p(\rho) \quad \text{(уравнение состояния)} \quad (3.40)$$

Решения уравнений изотропной однородной космологии

Решения для $\varkappa = 0$

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G(\rho+\Lambda) \tag{3.41}$$

Нерелятивистская пыль, без Λ*-члена*
Уравнение состояния:

$$p = 0 \tag{3.42}$$

Из (3.39):

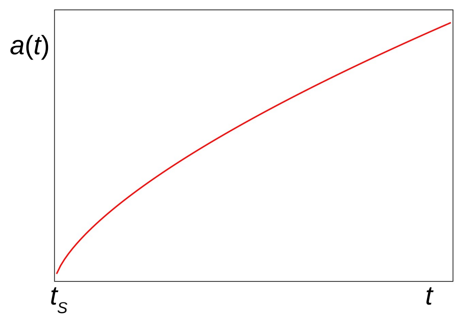
$$\frac{\dot\rho}{\rho} = -3\frac{\dot a}{a} \;\Rightarrow\; d(\ln\rho) = d(\ln a^{-3}) \;\Rightarrow \tag{3.43}$$

$$\rho = \frac{\text{const}}{a^3} \quad \text{(сохранение числа частиц)} \tag{3.44}$$

Из (3.41):

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{\text{const}}{a^3} \;\Rightarrow\; a(t) = \text{const}'(t-t_s)^{2/3} \tag{3.45}$$

При $t = t_s$ $a(t) = 0$ – сингулярность.



Будем полагать $t_s = 0$:

$$a(t) = \text{const}\, t^{2/3} \tag{3.46}$$

$$\rho = \frac{\text{const}}{t^2} \tag{3.47}$$

В момент сингулярности пространство было плоским и *бесконечным*, плотность была бесконечной.
Постоянную в (3.47) можно найти:

$$\frac{\dot a}{a} = \frac{2}{3}\frac{1}{t} \Rightarrow \rho = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{1}{6\pi G}\frac{1}{t^2} \tag{3.48}$$

Постоянная Хаббла:

$$H(t) = \frac{\dot a}{a} \tag{3.49}$$

$1/H$ во всех моделях порядка возраста Вселенной (от сингулярности!)
В частности, в модели пыли

$$H(t) = \frac{2}{3}\frac{1}{t}, \quad t = \frac{2}{3}\frac{1}{H(t)} \tag{3.50}$$

Современное (t_0) значение постоянной Хаббла:

$$\boxed{H_0 \equiv H(t_0) = h \times 100\frac{\text{км/с}}{\text{Мпк}}, \quad h = 0.6774 \pm 0.0046} \tag{3.51}$$

$$t_0 \approx 3.0\cdot 10^{17}\, sec \approx 9.6\cdot 10^9\, years \;\bigstar \tag{3.52}$$

Космологический горизонт

Конформное время.

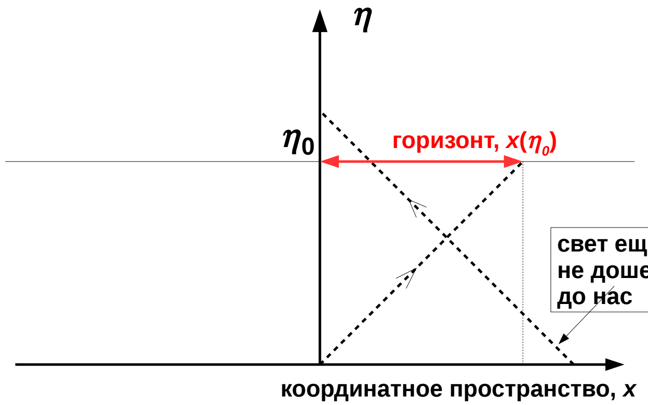
$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j = a^2(t)(d\eta^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j) \quad (3.53)$$

– конформно-плоская метрика.

$$d\eta = dt/a(t) \quad (3.54)$$

Для плоской модели с пылью:

$$\eta(t) = \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^t \frac{dt}{\mathrm{const}\cdot t^{2/3}} = \frac{3}{\mathrm{const}} \cdot t^{1/3} \quad (3.55)$$



Светоподобные геодезические: $ds^2 = 0 \Rightarrow$

$$d\eta^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j = dx^2 \;\Rightarrow\; d\eta = |dx| \Rightarrow \quad (3.56)$$

$$x(\eta_0) = \eta_0 = \eta(t_0) \quad (3.57)$$

$$l_H(t_0) = a(t_0)x(\eta_0) = a(t_0)\eta(t_0) =$$
$$= a(t_0)\int_0^{t_0}\frac{dt}{a(t)} = \mathrm{const}\cdot t_0^{2/3}\int_0^{t_0}\frac{dt}{\mathrm{const}\cdot t^{2/3}} = 3t_0 =$$
$$= 28.8\cdot 10^9\,\text{св. лет} = \frac{2}{H(t_0)} \quad (3.58)$$

($t_0 \sim 9.6\cdot 10^9$ св. лет – много меньше горизонта!)

Красное смещение

Эволюция свободного электромагнитного поля

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}F^{\nu\rho}F_{\nu\rho} \quad (3.59)$$

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (3.60)$$

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}F_{\mu\lambda}F_{\nu\rho} \quad (3.61)$$

В конформно-плоской метрике

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j] \quad (3.62)$$

Имеем

$$g_{\mu\nu}(\eta) = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu} \quad (3.63)$$

$$g^{\mu\nu}(\eta) = \frac{1}{a^2(\eta)}\eta^{\mu\nu} \quad (3.64)$$

$$\sqrt{-g} = a^4 \quad (3.65)$$

Из (3.61):

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x\, a^4\frac{1}{a^4}\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho}F_{\mu\lambda}F_{\nu\rho} =$$
$$= -\frac{1}{4}\int d^4x\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho}F_{\mu\lambda}F_{\nu\rho} \quad (3.66)$$

– электромагнитное поле конформно-инвариантно.
Плоская волна в (η, x^i)-пространстве распростаняется как в пространстве Минковского:

$$A_\mu^{(\alpha)} = e_\mu^{(\alpha)} \exp[i(|k|\eta - \mathbf{kx})] \tag{3.67}$$

$|k|$ – не частота, и $\mathbf{k}$ – не волновой вектор в физическом пространстве!
Но можно перейти к физическим величинам:

$$\Delta\eta = \frac{2\pi}{k} \text{ – конформный период, не зависит от времени} \tag{3.68}$$

$$\Delta T(t) = a(t)\Delta\eta \text{ – физический период, растет пропорционально } a(t) \tag{3.69}$$

$$\omega(t) = \frac{2\pi}{\Delta T(t)} = \frac{2\pi}{a(t)\Delta\eta} = \frac{k}{a(t)} \text{ – физическая частота, падает обратно пропорционально } a(t) \tag{3.70}$$

Эволюция скорости свободных частиц

Координатная скорость частицы отлична от нуля:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \neq 0 \tag{3.71}$$

Физическая скорость частицы:

$$dX^i = a(t)dx^i \Rightarrow U^i = \frac{dX^i}{ds} = a(t)u^i \tag{3.72}$$

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}u^\nu u^\lambda = 0 \Rightarrow \backslash\Gamma^i_{jk} = 0\backslash \Rightarrow \tag{3.73}$$

$$\frac{du^i}{ds} + 2\Gamma^i_{0j}u^0u^j = 0 \tag{3.74}$$

$$\frac{du^i}{ds} + 2\,\frac{\dot a}{a}\,\frac{dt}{ds}\,u^i = 0 \tag{3.75}$$

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{du^i}{dt} = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}\left(\frac{U^i}{a}\right) = \frac{dt}{ds}\left(\frac{dU^i}{dt}\,\frac{1}{a} - \frac{\dot a}{a^2}U^i\right) \tag{3.76}$$

$$\frac{dt}{ds}\left(\frac{dU^i}{dt}\,\frac{1}{a} - \frac{\dot a}{a^2}U^i\right) + 2\frac{\dot a}{a}\,\frac{dt}{ds}\,\frac{1}{a}U^i = 0 \tag{3.77}$$

$$\frac{dU^i}{dt} = -\frac{\dot a}{a}U^i \tag{3.78}$$

$$\frac{dU^i}{U^i} = -\frac{da}{a} \Rightarrow U^i = \frac{\mathrm{const}}{a(t)} = U^i(t_i)\frac{a(t_i)}{a(t)} \tag{3.79}$$

Скорость (и импульс $p_i = mU_i$, но не энергия!) массивных частиц падает как $a(t)$.

Красное смещение z определяется через изменение частоты света:

$$\frac{\omega_i}{\omega_0} = 1 + z(t_i) = \frac{a(t_0)}{a(t_i)} \Rightarrow \tag{3.80}$$

$$\boxed{z(t_i) = \frac{a(t_0)}{a(t_i)} - 1} \tag{3.81}$$

Закон Хаббла

t_i близко в прошлом к t_0

$$a(t_i) = a(t_0) + (t_i - t_0)\dot{a}(t_0) =$$
$$= a(t_0)\left[1 - (t_0 - t_i)\frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}\right] =$$
$$= a(t_0)[1 - (t_0 - t_i)H_0] \quad (3.82)$$

$$z(t_i) = \frac{a(t_0)}{a(t_0)[1 - (t_0 - t_i)H_0]} - 1 \cong (t_0 - t_i)H_0 \quad (3.83)$$

Но $t_0 - t_i = r \Rightarrow$

$$z(t_i) = rH_0 \quad (3.84)$$

Космологическое красное смещение – не Допплеровское!

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dl^2 \quad (3.85)$$

Поместим себя в $l = 0$, момент времени t_0.
Физическое расстояние до точки на координатном расстоянии l

$$r(t_0) = a(t_0)l \quad \text{(это точное равенство)} \quad (3.86)$$

$$\dot{r}(t_0) = v(t_0) = \dot{a}l \quad (3.87)$$

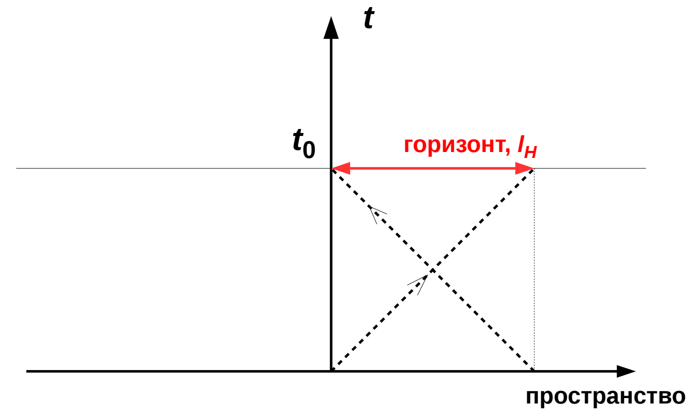
– скорость может быть сколь угодно велика при достаточно большом l!
Эффект Допплера не описывает такую ситуацию.

Но эффект Допплера для малых v есть:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{v}{c} \equiv v = \dot{a}l = \frac{\dot{a}}{a}al = Hr \quad (3.88)$$

Для малых расстояний космологическое красное смещение *выглядит* как смещение Допплера.

Как мы видим горизонт?



Для горизонта $t_i = 0 \Rightarrow$

$$z(0) = \frac{a(t_0)}{a(0)} - 1 = \frac{a(t_0)}{0} - 1 = \infty \quad (3.89)$$

Горизонт виден при бесконечном красном смещении – *как бы* удаляющийся со скоростью света

Ультрарелятивистское вещество, плоская вселенная

$$p = \frac{1}{3} n\langle \mathbf{vP} \rangle \text{ — для любого газа} \tag{3.90}$$

Ультрарелятивистский (УР) газ:

$$E^2 = m^2 + P^2 \approx P^2 \Rightarrow P \cong E, \ v \cong 1 \Rightarrow \tag{3.91}$$

$$p = \frac{1}{3} nE = \frac{1}{3}\rho \tag{3.92}$$

$$\boxed{p = \frac{1}{3}\rho} \tag{3.93}$$

Как ρ зависит от a?

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \text{ (сохр. ТЭИ)} \tag{3.94}$$

$$\frac{d\rho}{p+\rho} = -3d(\ln a) \tag{3.95}$$

$$\boxed{\rho = \frac{\text{const}}{a^4}} \tag{3.96}$$

(не $1/a^3$!)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho = \frac{\text{const}}{a^4} \tag{3.97}$$

$$\boxed{a(t) = \text{const}' t^{1/2}} \tag{3.98}$$

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t} \tag{3.99}$$

(для пыли было $\frac{2}{3t}$)

$$\rho = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{3}{32\pi G}\frac{1}{t^2} \tag{3.100}$$

Горизонт:

$$l_H(t) = a(t)\int_0^t \frac{dt}{a(t)} = 2t = \frac{1}{H(t)} \tag{3.101}$$

(для пыли $2/H(t)$)

Вакуум и де-Ситтеровское плоское решение

Никакой материи кроме Λ-члена.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} G\Lambda, \quad \Lambda = \text{const} \geq 0 \tag{3.102}$$

В плоском случае для $\Lambda < 0$ решения нет!

$$\frac{\dot{a}}{a} = (\pm)\sqrt{\frac{8\pi}{3}G\Lambda} = (\pm)H_{dS} \Rightarrow \tag{3.103}$$

$$a(t) = \text{const} \times e^{H_{dS}t} \tag{3.104}$$

Сингулярности нет. Космологический горизонт $= +\infty$ (тоже нет).

Λ ведет себя как плотность вакуума:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \Rightarrow \backslash p = -\rho\backslash \Rightarrow \dot{\rho} = 0 \tag{3.105}$$

Плотность постоянна (что и ожидается от вакуума).