Лекция 2

Основы ОТО. II. Свойства афинной связности (окончание). Тензор кривизны. Уравнения Эйнштейна. Линеаризованные уравнения Эйнштейна и гравитационные волны. Тензор энергии-импульса, антигравитация.

Локально Лоренцевы системы отсчета

Если $C^{\alpha}_{\beta\gamma} \neq 0$ хотя бы в одной системе отсчета, то $C^{\alpha}_{\beta\gamma} \neq 0$ в любой системе отсчета, следовательно в любой системе отсчета $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \neq 0$ и гравитацию исключить невозможно. Чтобы гравитацию можно было локально исключить, в ОТО *требуется* $C^{\alpha}_{\beta\gamma} \equiv 0$, $\Rightarrow \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$

Проблемы со спином – теория Эйнштейна-Картана.

Если $C^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$, то афинную связность *локально занулить можно.*

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + T^{\mu}_{\sigma\rho} x^{\sigma} x^{\rho} \tag{2.1}$$

$$dx'^{\mu}|_0 = dx^{\mu}|_0 \Rightarrow \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \delta^{\mu}_{\nu}; \ \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \delta^{\nu}_{\mu} \tag{2.2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\varepsilon}}\right|_0 = T^{\mu}_{\varepsilon\beta} + T^{\mu}_{\beta\varepsilon} \Rightarrow \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\Gamma'^{\mu}_{\lambda\delta} &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\delta}} \Gamma^{\beta}_{\alpha\varepsilon} - \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\delta}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\varepsilon}} = \\ &= \delta^{\alpha}_{\lambda} \delta^{\mu}_{\beta} \delta^{\varepsilon}_{\delta} \Gamma^{\beta}_{\alpha\varepsilon} - \delta^{\beta}_{\lambda} \delta^{\varepsilon}_{\delta} (T^{\mu}_{\varepsilon\beta} + T^{\mu}_{\beta\varepsilon}) = \\ &= \Gamma^{\mu}_{\lambda\delta} - (T^{\mu}_{\delta\lambda} + T^{\mu}_{\lambda\delta})\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$T^{\mu}_{\delta\lambda} + T^{\mu}_{\lambda\delta} = \Gamma^{\mu}_{\lambda\delta}(0) \Rightarrow \Gamma'^{\mu}_{\lambda\delta}(0) = 0. \tag{2.5}$$

Например:

$$T^{\mu}_{\delta\lambda} = \frac{1}{2} \Gamma^{\mu}_{\lambda\delta}(0) \tag{2.6}$$

Симметричность $\Gamma^{\mu}_{\lambda\delta}$ – необходимое условие!

С помощью преобразования

$$\hat{g}' = \hat{J} \hat{g} \hat{J}^T, \ \hat{J} = \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right) \tag{2.7}$$

симетричная матрица $\hat{g}$ может быть приведена к диагональному виду

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} k^0 & & & 0 \\ & -k^1 & & \\ & & -k^2 & \\ 0 & & & -k^3 \end{pmatrix}, \ k^{\mu} > 0 \tag{2.8}$$

С помощью масштабного преобразования:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} \frac{1}{\sqrt{k^{\mu}}} \Rightarrow g_{mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Преобразование (2.1) в силу (2.2) не меняет тензоры в начале координат, поэтому связность можно занулить <u>после того</u>, как как $\hat{g}$ приведен к лоренцову виду.

Метрический тензор можно привести к Лоренцеву виду и связность можно занулить одновременно – это локально Лоренцева система отсчета

Явное выражение коэффициентов связности через метрический тензор

Используется *одновременно* метричность $g_{\mu\nu}$ и симметричность связности:

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} = 0. \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} + \Gamma^\sigma_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} &= \partial_\lambda g_{\mu\nu} \ [\lambda\mu\nu] \mid \times (+1) \\ \Gamma^\sigma_{\mu\nu} g_{\sigma\lambda} + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} &= \partial_\mu g_{\nu\lambda} \ [\mu\nu\lambda] \mid \times (+1) \\ \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} g_{\sigma\mu} + \Gamma^\sigma_{\nu\mu} g_{\lambda\sigma} &= \partial_\nu g_{\lambda\mu} \ [\nu\lambda\mu] \mid \times (-1) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$2\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\lambda\mu} \ |g^{\nu\delta} \quad (2.12)$$

$$\boxed{\Gamma^\delta_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\delta\nu} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu})} \quad (2.13)$$

Тензор кривизны

Два способа ввести тензор кривизны.

1. Через коммутатор ковариантной производной

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A^\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu A^\lambda = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\lambda = ? \quad (2.14)$$

$$\nabla_\mu (\nabla_\nu A^\lambda) = \partial_\mu (\nabla_\nu A^\lambda) - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} (\nabla_\sigma A^\lambda) + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} (\nabla_\nu A^\sigma) = \ldots \quad (2.15)$$

$$\nabla_\nu (\nabla_\mu A^\lambda) = \ldots \quad (2.16)$$

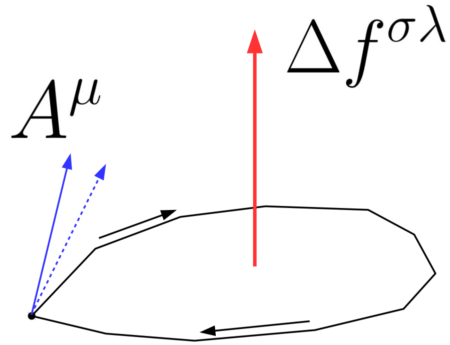
(посчитать! ★)

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\lambda = A^\sigma R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} \quad (2.17)$$

$$\boxed{R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho} \Gamma^\rho_{\mu\sigma}} \quad (2.18)$$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A_\lambda = A_\sigma R^\sigma{}_{\mu\nu\lambda} \ \text{(посчитать ★)} \quad (2.19)$$

2. Параллельный перенос вдоль замкнутого контура



$$\tilde{A}^{\mu}(x+dx) = A^{\mu}(x) - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}A^{\nu}dx^{\lambda} \quad (2.20)$$

$$\delta A^{\mu}(x) = \tilde{A}^{\mu}(x+dx) - A^{\mu}(x) = -\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}A^{\nu}dx^{\lambda} \quad (2.21)$$

$$\Delta A^{\mu} = \oint \delta A^{\mu}(x) = -\oint \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}A^{\nu}dx^{\lambda} \quad (2.22)$$

Фрмула Стокса:

$$\oint B_{\dots\lambda}dx^{\lambda} = \frac{1}{2}\int df^{\sigma\lambda}\left(\partial_{\sigma}B_{\dots\lambda} - \partial_{\lambda}B_{\dots\sigma}\right) \quad (2.23)$$

$$\Delta A^{\mu} = -\frac{1}{2}\int df^{\sigma\lambda}[\partial_{\sigma}(\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}A^{\nu}) - \partial_{\lambda}(\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}A^{\nu})] \simeq$$
$$\simeq -\frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}(\partial_{\sigma}\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}A^{\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\partial_{\sigma}A^{\nu} - \partial_{\lambda}\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}A^{\nu} - \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}\partial_{\lambda}A^{\nu}) \quad (2.24)$$

$$\delta A^{\mu}(x) = -\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}A^{\nu}dx^{\lambda} \;\Rightarrow\; \partial_{\lambda}A^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}A^{\nu} \quad (2.25)$$

$$\Delta A^{\mu} =$$
$$-\frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}(\partial_{\sigma}\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}A^{\nu} - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\Gamma^{\nu}_{\rho\sigma}A^{\rho} - \partial_{\lambda}\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}A^{\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}\Gamma^{\nu}_{\rho\lambda}A^{\rho}) =$$
$$= \frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}(\partial_{\lambda}\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu} - \partial_{\sigma}\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda})A^{\nu} =$$
$$= \frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}R^{\mu}{}_{\sigma\lambda\nu}A^{\nu} \quad (2.26)$$

$$\boxed{\Delta A^{\mu} = \frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}R^{\mu}{}_{\sigma\lambda\nu}A^{\nu}} \quad (2.27)$$

Свойства тензора кривизны

$$R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} R_{\tau\sigma\mu\nu} &= g_{\tau\lambda} R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu} = \\ &= g_{\tau\lambda}(\partial_\mu \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}) \end{aligned} \tag{2.29}$$

1.

$$R_{\tau\sigma\mu\nu} = -R_{\tau\sigma\nu\mu} \ - \ \text{очевидно} \tag{2.30}$$

2.

$$R_{\tau\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\tau\mu\nu} \ - \ \text{не очевидно} \tag{2.31}$$

$$\Gamma_{\xi,\nu\sigma} = g_{\xi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\nu g_{\sigma\xi} + \partial_\sigma g_{\xi\nu} - \partial_\xi g_{\nu\sigma}) \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned} R_{\tau\sigma\mu\nu} \ &= \ +g_{\tau\lambda}(\partial_\mu \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}) \\ &\quad\ -g_{\tau\lambda}(\partial_\nu \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}) \end{aligned} \tag{2.33}$$

$\nu\sigma \equiv ..$

$$\begin{aligned} g_{\tau\lambda}(\partial_\mu \Gamma^{\lambda}_{..} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{..}) &= g_{\tau\lambda}\nabla_\mu \Gamma^{\lambda}_{..} = \nabla_\mu(g_{\tau\lambda}\Gamma^{\lambda}_{..}) = \\ &= \nabla_\mu(\Gamma_{\tau,..}) = \partial_\mu \Gamma_{\tau,..} - \Gamma^{\lambda}_{\tau\mu}\Gamma_{\lambda,..} = \\ &= \partial_\mu \Gamma_{\tau,\nu\sigma} - g^{\lambda\xi}\Gamma_{\xi,\tau\mu}\Gamma_{\lambda,\nu\sigma} \end{aligned} \tag{2.34}$$

$$g_{\tau\lambda}(\partial_\nu \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}) = \partial_\nu \Gamma_{\tau,\mu\sigma} - g^{\lambda\xi}\Gamma_{\xi,\tau\nu}\Gamma_{\lambda,\mu\sigma} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned} R_{\tau\sigma\mu\nu} &= \partial_\mu \Gamma_{\tau,\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma_{\tau,\mu\sigma} + g^{\lambda\xi}(\Gamma_{\xi,\mu\sigma}\Gamma_{\lambda,\nu\tau} - \Gamma_{\xi,\nu\sigma}\Gamma_{\lambda,\mu\tau}) = \\ &= \partial_\mu\partial_\sigma g_{\tau\nu} - \partial_\mu\partial_\tau g_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma g_{\tau\mu} + \partial_\nu\partial_\tau g_{\mu\sigma} + \\ &\quad + g^{\lambda\xi}(\Gamma_{\xi,\mu\sigma}\Gamma_{\lambda,\nu\tau} - \Gamma_{\xi,\nu\sigma}\Gamma_{\lambda,\mu\tau}) \end{aligned} \tag{2.36}$$

3.

$$R_{\tau\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\tau\sigma} \ \bigstar \tag{2.37}$$

4.

$$R^{\sigma}{}_{\rho\mu\nu} + R^{\sigma}{}_{\mu\nu\rho} + R^{\sigma}_{\nu\rho\mu} = 0 \tag{2.38}$$

Из тождества Якоби:

$$[\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]\varphi + [\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\rho]]\varphi + [\nabla_\nu, [\nabla_\rho, \nabla_\mu]]\varphi = 0; \tag{2.39}$$

$$[\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]\varphi = -\partial_\sigma \varphi R^{\sigma}{}_{\rho\mu\nu} \ \Rightarrow \ (2.38) \tag{2.40}$$

5. Тождество Бьянки $\bigstar$:

$$\nabla_\rho R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\mu R^{\lambda}{}_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\nu R^{\lambda}{}_{\sigma\rho\mu} = 0 \tag{2.41}$$

Из тождества Якоби

$$[\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]A^\lambda + [\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\rho]]A^\lambda + [\nabla_\nu, [\nabla_\rho, \nabla_\mu]]A^\lambda = 0; \tag{2.42}$$

Число независимых компонент $\bigstar$:

$$N = \frac{n^2(n^2-1)}{12} \tag{2.43}$$

$$n \ = \ 4 \to \ N = 20 \tag{2.44}$$
$$n \ = \ 3 \to \ N = 6 \tag{2.45}$$
$$n \ = \ 2 \to \ N = 1 \tag{2.46}$$

Тензор Риччи:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} \tag{2.47}$$

Скаляр кривизны (не гауссова кривизна!):

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R^{\mu}{}_{\mu} = R^{\lambda\nu}{}_{\lambda\nu} \tag{2.48}$$

Получение уравнений Эйнштейна из вариационного прицепа

Сначала одна гравитация – без материи.

Действие должно быть общековариантной величиной.
1. Хотим иметь уравнения второго порядка для $g_{\mu\nu}$.
2. Уравнения должны быть линейными относительно вторых производных.

1. Простейшее действие

$$S_\Lambda = -\Lambda \int d^4x \sqrt{-g} \tag{2.49}$$

$$\delta S_\Lambda = -\Lambda \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) = \Lambda \int d^4x \frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} \tag{2.50}$$

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}; \quad \delta g = ? \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned} \det(\hat{g} + \delta\hat{g}) &= \det[\hat{g}(1 + \hat{g}^{-1}\delta\hat{g})] = \\ &= \det\hat{g} \cdot \det(1 + \hat{g}^{-1}\delta\hat{g}) = g(1 + \mathrm{Tr}\,(\hat{g}^{-1}\delta\hat{g})) = \\ & g(1 + g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) = g + g \cdot g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \Rightarrow \end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\delta g = g \cdot g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{2.53}$$

$$\boxed{\delta S_\Lambda = -\frac{\Lambda}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}} \tag{2.54}$$

2. Вклад $\sim \int d^4x \sqrt{-g}\, f(R)$

Проблема: R зависит от вторых производных g по x. Получим ли уравнения выше второго порядка?

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \varphi', \varphi'', \dots) \tag{2.55}$$

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} + \partial^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi''} - \dots \right) \delta\varphi = 0 \tag{2.56}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} + \partial^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi''} - \dots = 0 \tag{2.57}$$

– начиная с второго члена входят производные высших порядков.

Но если φ'' входят в $\mathcal{L}$ в комбинации $\varphi\varphi''$, то:

$$\frac{\partial(\varphi\varphi'')}{\partial\varphi} = \varphi''; \ \partial\left(\frac{\partial(\varphi\varphi'')}{\partial\varphi'}\right) = 0; \ \partial^2\left(\frac{\partial(\varphi\varphi'')}{\partial\varphi''}\right) = \varphi'' \tag{2.58}$$

производных выше 2-го порядка не получается.
R зависит от $g''_{\mu\nu}$ именно так.

$$S_R = -K \int d^4x \sqrt{-g} R = -K \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{2.59}$$

$$\delta S_R = \begin{array}{l|l} -K \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) R & = \delta S_1 \\ -K \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} & = \delta S_2 \\ -K \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} & = \delta S_3 \end{array} \tag{2.60}$$

$$\boxed{\delta S_1 = -\frac{K}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,R\,g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}} \tag{2.61}$$

$$\delta S_2 = -K\int d^4x\sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{2.62}$$

$\delta g^{\mu\nu} =?$

$$\delta(g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda}) = 0 \;\Rightarrow\; g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\lambda} = -g_{\nu\lambda}\delta g^{\mu\nu}\;|g^{\rho\lambda} \tag{2.63}$$

$$\delta^\rho_\nu\delta g^{\mu\nu} = -g^{\rho\lambda}g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\lambda} \Rightarrow \tag{2.64}$$

$$\delta g^{\mu\rho} = -g^{\rho\lambda}\delta g_{\nu\lambda}g^{\mu\nu}\;|\;\rho \rightleftarrows \nu \tag{2.65}$$

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho}\delta g_{\rho\lambda}g^{\lambda\nu} \tag{2.66}$$

$$\delta S_2 = +K\int d^4x\sqrt{-g}R_{\mu\nu}g^{\mu\rho}g^{\lambda\nu}\delta g_{\rho\lambda} = \\ + K\int d^4x\sqrt{-g}R^{\rho\lambda}\delta g_{\rho\lambda} \tag{2.67}$$

$$\boxed{\delta S_2 = +K\int d^4x\sqrt{-g}\,R^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}} \tag{2.68}$$

$$\delta S_3 = -K\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \tag{2.69}$$

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda\Gamma^\mu_{\nu\rho} - \partial_\rho\Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \tag{2.70}$$

$$\delta R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda\delta\Gamma^\mu_{\nu\rho} - \partial_\rho\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \\ + \delta\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \delta\Gamma^\mu_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \tag{2.71}$$

$\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ – тензор, в отличие от $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$! (Почему? ★)

$$\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\mu_{\nu\rho}) - \nabla_\rho(\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}) = \\ = \partial_\lambda(\delta\Gamma^\mu_{\nu\rho}) + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}\delta\Gamma^\mu_{\sigma\rho} - \Gamma^\sigma_{\lambda\rho}\delta\Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \\ - \partial_\rho(\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}) - \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} + \Gamma^\sigma_{\rho\nu}\delta\Gamma^\mu_{\sigma\lambda} + \Gamma^\sigma_{\rho\lambda}\delta\Gamma^\mu_{\nu\sigma} = \\ = \delta R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} \Rightarrow \tag{2.72}$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}) \tag{2.73}$$

$$\delta S_3 = -K\int d^4x\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}[\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})] = \\ = -K\int d^4x\sqrt{-g}[\nabla_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})] = \\ = -K\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\sigma}) = \\ = \Big\backslash\, \nabla_\lambda A^\lambda = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\lambda(\sqrt{-g}A^\lambda)\;\bigstar\, \Big\backslash = \\ = -K\int d^4x\,\partial_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\sigma}) = 0 \tag{2.74}$$

– так как под интегралом полная дивергенция.

$$\boxed{\delta S_3 = 0} \tag{2.75}$$

$$
\begin{aligned}
\delta S = \delta S_\Lambda + \delta S_R = \\
&= -\frac{\Lambda}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \\
&- \frac{K}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} R\delta g_{\mu\nu} \\
&+ K\int d^4x\sqrt{-g} R^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = \\
= \int d^4x\sqrt{-g}\left[K\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) - \frac{\Lambda}{2}g^{\mu\nu}\right]\delta g_{\mu\nu} = 0
\end{aligned}
\tag{2.76}
$$

$$
\boxed{R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{1}{2K}\Lambda g^{\mu\nu}} \tag{2.77}
$$

$$
\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2K}\Lambda g_{\mu\nu}} \tag{2.78}
$$

K пока неизвестна!

Тензор Эйнштейна:

$$
G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{2.79}
$$

Поля материи, тензор энергии-импульса

$$
S = S_\Lambda(g) + S_R(g) + S_m(u, g) \tag{2.80}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta S = \delta S_\Lambda(g)|_{\delta g} + \delta S_R(g)|_{\delta g} + \\
+ \delta S_m(u, g)|_{\delta g} + \delta S_m(u, g)|_{\delta u} = 0
\end{aligned}
\tag{2.81}
$$

Вариации $\delta g_{\mu\nu}$ и δu независимы! $\Rightarrow$

Уравнения гравитационного поля:

$$
\delta S_\Lambda(g)|_{\delta g} + \delta S_R(g)|_{\delta g} + \delta S_m(u, g)|_{\delta g} = 0 \tag{2.82}
$$

Уравнения полей материи:

$$
\delta S_m(u, g)|_{\delta u} = 0 \tag{2.83}
$$

Из вариации полного действия получаются и уравнения гравитационного поля, и уравнения полей материи!

$$
S_m(u, g) = \int d^4x\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_m \tag{2.84}
$$

$$
\delta S_m(u, g)|_{\delta g} = -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\, T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{2.85}
$$

$T_{\mu\nu}$ – метрический тензор энергии-импульса полей материи.

Откуда берется такое определение?

$$\delta S_m(u,g)|_{\delta g} = -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{2.86}$$

Пример. Скалярное поле

$$\mathcal{L}_{sc} = \frac{1}{2}\partial^\nu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\phi) = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\phi) \tag{2.87}$$

$$\begin{aligned}\delta S_{sc}|_{\delta g} = \int d^4x \Big[\delta\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi)\right) + \\ +\sqrt{-g}\,\frac{1}{2}\,\delta g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\Big] = \\ = \int d^4x\left[\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\partial_\rho\varphi\partial_\sigma\varphi - V(\varphi)\right) - \right. \\ \left. -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{\mu\rho}\delta g_{\rho\sigma}g^{\sigma\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\right] = \\ = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\times \\ \left[g^{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\,g^{\sigma\rho}\partial_\sigma\varphi\partial_\rho\varphi - V(\varphi)\right) - g^{\rho\mu}g^{\nu\sigma}\partial_\rho\varphi\partial_\sigma\varphi\right]\delta g_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{2.88}$$

(2.85)$\Rightarrow$

$$T^{\mu\nu} = g^{\rho\mu}g^{\nu\sigma}\partial_\rho\varphi\partial_\sigma\varphi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}_{sc}(\varphi) \mid g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} \tag{2.89}$$

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi - g_{\alpha\beta}\mathcal{L}(\varphi) \tag{2.90}$$

– обычное выражение тензора энергии-импульса скалярного поля, следующее из теоремы Нетер.

Уравнения гравитационного поля с учетом материи

$$\begin{aligned}\delta S = \delta S_\Lambda + \delta S_R + \delta S_m = \\ = \int d^4x\sqrt{-g}\left[K\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) - \frac{\Lambda}{2}g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}T^{\mu\nu}\right]\delta g^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{2.91}$$

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2K}(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})} \tag{2.92}$$

Найдем константу $\frac{1}{2K}$

Статический нерелятивистский предел движения частицы:

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0 \tag{2.93}$$

$$\frac{dx^0}{ds} \approx 1,\ \frac{dx^i}{ds} \ll \frac{dx^0}{ds} \ \Rightarrow\ \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{00} = 0 \tag{2.94}$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} \tag{2.95}$$

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2}\eta^{i\sigma}(\partial_0\gamma_{0\sigma} + \partial_0\gamma_{\sigma 0} - \partial_\sigma\gamma_{00}) = +\frac{1}{2}\partial_i\gamma_{00} \tag{2.96}$$

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = -\frac{1}{2}\partial_i\gamma_{00} = -\partial_i\varphi \tag{2.97}$$

φ - грав. потенциал

$$g_{00} = 1 + \gamma_{00} = 1 + 2\varphi \tag{2.98}$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\Delta g_{00} \tag{2.99}$$

Уравнение Пуассона для грав. потенциала:

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho \tag{2.100}$$

Из (2.99):

$$\Delta g_{00} = 8\pi G\rho \tag{2.101}$$

Уравнение Эйнштейна без Λ

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2K}T_{\mu\nu} \mid g^{\mu\nu} \tag{2.102}$$

$$R - \frac{1}{2}4R = \frac{1}{2K}T, \quad T \equiv g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \ \Rightarrow \tag{2.103}$$

$$R = -\frac{1}{2K}T \ \Rightarrow \tag{2.104}$$

$$\boxed{R_{\mu\nu} = \frac{1}{2K}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)} \tag{2.105}$$

Статический нерелятивистский предел:

$$R_{00} = \frac{1}{2K}\left(\rho - \frac{1}{2}\rho\right) = \frac{1}{4K}\rho \tag{2.106}$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\mu\Gamma^\lambda_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\rho\lambda}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\nu\lambda} \tag{2.107}$$

$$R_{00} = \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{00} - \partial_0\Gamma^\lambda_{\lambda 0} \text{ (статично)} \tag{2.108}$$

$$R_{00} = \frac{1}{2}\Delta g_{00} \Rightarrow \Delta g_{00} = 2R_{00} \tag{2.109}$$

$$\Delta g_{00} = \frac{1}{2K}\rho \tag{2.110}$$

Сравнивая с (2.101):

$$\boxed{\frac{1}{2K} = 8\pi G} \tag{2.111}$$

Уравнение Эйнштейна с Λ-членом:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})} \tag{2.112}$$

Из уравнения Эйнштейна следует коваринтный закон сохранения импульса:

$$\nabla^\mu \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\nu \tag{2.113}$$

$$\nabla^\mu\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) \equiv 0 \ \Rightarrow \ \nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \tag{2.114}$$

Доказательство.

Тождество Бьянки:

$$\nabla_\rho R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\mu R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\nu R^\lambda{}_{\sigma\rho\mu} = 0 \tag{2.115}$$

Сворачиваем по λ, μ:

$$\nabla_\rho R^\lambda{}_{\sigma\lambda\nu} + \nabla_\lambda R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\nu R^\lambda{}_{\sigma\rho\lambda} = 0 \tag{2.116}$$

$$\nabla_\rho R_{\sigma\nu} - \nabla_\nu R_{\sigma\rho} + \nabla_\lambda R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho} = 0 \mid g^{\sigma\rho} \tag{2.117}$$

$$\nabla^\rho R_{\rho\nu} - \nabla_\nu R + \nabla^\lambda R_{\lambda\nu} = 0 \tag{2.118}$$

$$\begin{aligned} \nabla^\rho R_{\rho\nu} - \nabla^\mu(g_{\mu\nu}R) + \nabla^\lambda R_{\lambda\nu} &= \\ = 2\nabla^\mu R_{\mu\nu} - \nabla^\mu(g_{\mu\nu}R) &= \\ = 2\nabla^\mu\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) &= 0 \end{aligned} \tag{2.119}$$

Линеаризованные уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \tag{2.120}$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{2.121}$$

$$R^{\sigma}{}_{\mu\nu\lambda}(g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}) \;=\; 0 \tag{2.122}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}) \;=\; 0 \;\Rightarrow \tag{2.123}$$

Всё R и всё Γ – это возмущения над нулевыми значениями за счет возмущения $h_{\mu\nu}$
$\Rightarrow$ можно использовать формулы первого порядка для возмущений:

$$R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} - \partial_\rho \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \text{ (δ не пишем)} \tag{2.124}$$

$$\begin{aligned}\partial_\lambda \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} &= \frac{1}{2}\partial_\lambda[\eta^{\mu\sigma}(\partial_\lambda h_{\rho\sigma} + \partial_\rho h_{\sigma\nu} - \partial_\sigma h_{\nu\rho})] = \\ &= \frac{1}{2}(\partial^\sigma\partial_\nu h_{\rho\sigma} + \partial^\sigma\partial_\rho h_{\sigma\nu} - \partial^\sigma\partial_\sigma h_{\nu\rho})\end{aligned} \tag{2.125}$$

$$\begin{aligned}\partial_\rho \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} &= \frac{1}{2}\partial_\rho[\eta^{\lambda\sigma}(\partial_\nu h_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda h_{\sigma\nu} - \partial_\sigma h_{\nu\lambda})] = \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\rho\partial_\nu h^{\lambda}_{\lambda} + \partial_\rho\partial^\sigma h_{\sigma\nu} - \partial_\rho\partial^\lambda h_{\nu\lambda})\end{aligned} \tag{2.126}$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial^\lambda\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial^\lambda\partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial^\lambda\partial_\lambda h_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\mu h^{\lambda}_{\lambda}) \tag{2.127}$$

$R_{\mu\nu}$ калибровочно инвариантно относительно преобразования:

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu \text{ (проверить $\bigstar$)} \tag{2.128}$$

Гармоническая калибровка:

$$\partial_\mu h^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\partial_\nu h^{\lambda}_{\lambda} = 0 \tag{2.129}$$

обеспечена, если

$$\partial_\mu\partial^\mu\xi_\nu = -\left(\partial_\mu h^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}h^{\lambda}_{\lambda}\right) \tag{2.130}$$

Тогда, из (2.127) $\bigstar\bigstar$:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial^\lambda\partial_\lambda h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} \;\Rightarrow \tag{2.131}$$

$$\boxed{\Box h_{\mu\nu} = -16\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T\right)} \tag{2.132}$$

Если $T_{\mu\nu} = 0$, то
$\Box h_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow$ волновое уравнение, грав. волны в вакууме.

Замечание: если $G = 0$, то грав. волны все равно есть.

Макроскопический феноменологический тензор энергии-импульса изотропного «вещества»

1. Покоящееся вещество («идеальная жидкость») в пространстве Минковского:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & & & 0 \\ & p & & \\ & & p & \\ 0 & & & p \end{pmatrix} \tag{2.133}$$

$$u^\mu = (1,0,0,0) \tag{2.134}$$

2. Вещество движется в пространстве Минковского:

$$(p+\rho)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} - \underline{\text{это тензор}} \tag{2.135}$$

В системе покоя материи:

$$(p+\rho)\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} - p\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = $$
$$= \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix} \tag{2.136}$$

В произвольной движущейся системе:

$$T^{\mu\nu} = (p+\rho)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} \tag{2.137}$$

3. Вещество в произвольной системе.
В локально-Лоренцевой системе должно быть:

$$T^{\mu\nu} = (p+\rho)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} \tag{2.138}$$

Тогда общековариантный тензор ЭИ:

$$\boxed{T^{\mu\nu} = (p+\rho)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}} \tag{2.139}$$

Статическое изотропное вещество как источник гравитации

$$\Box h_{\mu\nu} = -16\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T\right) \tag{2.140}$$

Для компоненты 00: \$T = \rho - 3p$\

$$\partial_0^2 h_{00} - \Delta h_{00} = -8\pi G(\rho+3p) \;\Rightarrow \tag{2.141}$$

$$\Delta h_{00} = 8\pi G(\rho+3p) \tag{2.142}$$

В нерелятивистской статике (см. (2.99)):

$$\Delta h_{00} = 2\Delta\varphi \;\Rightarrow \tag{2.143}$$

$$\Delta\varphi = 4\pi G(\rho+3p) \tag{2.144}$$

Источником гравитации является не ρ, а $\rho+3p$.
Если $\rho<0,\ p=0 \;\Rightarrow$ антигравитация.
Если $\rho+3p<0 \;\Rightarrow$ тоже антигравитация!

<u>Λ-член</u>

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) \tag{2.145}$$

$$T^{(\Lambda)}_{\mu\nu} = \Lambda\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{2.146}$$

Если $\Lambda>0$, то $\rho+3p=-2\Lambda<0$.
Космологическая константа $\Lambda>0$ приводит к антигравитации.