Лекция 3

Метрика Фридмана-Робертсона-Уокера. Однородные и изотропные космологические модели с космологическим членом и без. Красное смещение, космологические горизонты.

Однородные и изотропные пространства

Космологический принцип: Вселенная изотропна и однородна.

В любой момент времени описывается однородным и изотропным трехмерным пространством.
(Детали см.: Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер. Гравитация. Т.2, §27.3, стр. 382)

Однородных и изотропных трехмерных пространства всего три: евклидово пространство, трехмерная сфера, трехмерная псевдосфера.

Евклидово трехмерное пространство пространство (3-плоскось)
Есть такая система координат, что во всем пространстве

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \tag{3.1}$$

3-*сфера* Фиктивное 4-мерное евклидово пространство:

$$ds^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 + (dy^4)^2 \tag{3.2}$$

Уравнение 3-сферы:

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 + (y^4)^2 = a^2 \tag{3.3}$$

Описывается тремя параметрами:

$$\begin{array}{l} y^1 = a\cos\chi \\ y^2 = a\sin\chi\cos\theta \\ y^2 = a\sin\chi\sin\theta\cos\varphi \\ y^4 = a\sin\chi\sin\theta\sin\varphi \end{array} \tag{3.4}$$

$$dl^2 = a^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)] \tag{3.5}$$

В квадратных скобках – метрика единичной 3-сферы, никаких упоминаний фиктивного 4-мерного пространства (y^1, y^2, y^3, y^4) нет.

3-*псевдосфера (гиперболоид)* Фиктивное 4-мерное псевдоевклидово пространство:

$$ds^2 = -(dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 + (dy^4)^2 \tag{3.6}$$

Уравнение 3-псевдосферы:

$$-(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 + (y^4)^2 = -a^2, \quad y^1 > 0 \tag{3.7}$$

$$\begin{array}{l} y^1 = a\,\mathrm{ch}\,\chi \\ y^2 = a\,\mathrm{sh}\,\chi\cos\theta \\ y^2 = a\,\mathrm{sh}\,\chi\sin\theta\cos\varphi \\ y^4 = a\,\mathrm{sh}\,\chi\sin\theta\sin\varphi \end{array} \tag{3.8}$$

$$dl^2 = a^2[d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)] \tag{3.9}$$

Как понять, что эти пространства однородны?

$$R_{ijkl} = \frac{\varkappa}{a^2}(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}) \tag{3.10}$$

$$\varkappa = \begin{cases} +1 & - \text{ 3-сфера} \\ 0 & - \text{ 3-плоскость} \\ -1 & - \text{ 3-псевдосфера} \end{cases} \tag{3.11}$$

Проверяется прямым вычислением, или в ковариантном формализме: см. Robert M. Wald, General Relativity Sec. 5.1, p. 91.

$$R_{ij} = 2\frac{\varkappa}{a^2}\gamma_{ij} \tag{3.12}$$

$$R = 6\frac{\varkappa}{a^2} \tag{3.13}$$

Метрика Фридмана-Робертсона-Уокера (FRW)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j \tag{3.14}$$

γ_{ij} – единичная 3-сфера, или единичная 3-псевдосфера, или 3-плоскость.
Для 3-плоскости физ. смысл имеет только $a(t_1)/a_(t_2)$

$$\hat{g} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & a^2(t)\hat{\gamma} \end{array}\right) \tag{3.15}$$

Только в рамках модели FRW космологическое время приобретает смысл!

Метрика FRW – сопуствующая система отсчета

FRW-неподвижные частицы движутся по геодезическим.

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}u^\nu u^\lambda = 0 \tag{3.16}$$

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\lambda}) \tag{3.17}$$

$$\Gamma^0_{00} = 0;\ \Gamma^0_{0i} = 0;\ \Gamma^i_{00} = 0 \tag{3.18}$$

$$\Gamma^i_{0j} = \frac{1}{2}g^{ik}\partial_0 g_{jk} = \frac{1}{2}\frac{1}{a^2}\gamma^{ik}\partial_0(a^2\gamma_{jk}) = \\ = \frac{1}{2}\frac{1}{a^2}\gamma^{ik}\,2a\dot{a}\gamma_{jk} = \delta^i_j\frac{\dot{a}}{a} \tag{3.19}$$

$$\Gamma^0_{ij} = a\dot{a}\gamma_{ij} \tag{3.20}$$

$$\Gamma^i_{jk} = {}^{(3)}\Gamma^i_{jk} \tag{3.21}$$

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{dt}{dt} = 1; \quad u^i = \frac{dx^i}{ds} = 0 \tag{3.22}$$

$$\forall\mu :\ \frac{du^\mu}{ds} = 0;\ \Gamma^\mu_{00} = 0 \ \Rightarrow \tag{3.23}$$

уравнение (3.16) удовлетворено.

FRW система отсчета связана со свободными частицами.

Уравнение Фридмана

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G(\Lambda\, g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) \tag{3.24}$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\mu\Gamma^\lambda_{\nu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda\nu} \tag{3.25}$$

Занимаемся 00-компонентой уравнений (3.24).

$$R_{00} = -\partial_0\Gamma^\lambda_{0\lambda} - \Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{0\lambda} = \\ = -\partial_0\left(3\frac{\dot{a}}{a}\right) - \Gamma^i_{0j}\Gamma^j_{0i} = -3\,\partial_0\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -3\frac{\ddot{a}}{a} \tag{3.26}$$

$$\boxed{R_{00} = -3\,\frac{\ddot{a}}{a}} \tag{3.27}$$

$$R_{0i} = \partial_j \Gamma^j_{0i} - \partial_0 \Gamma^\lambda_{i\lambda} + \Gamma^\lambda_{0i}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda i} = 0 \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} R_{ij} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{ij} - \partial_i \Gamma^\lambda_{j\lambda} + \Gamma^\lambda_{ij}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{i\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda j} = \\ \partial_0 \Gamma^0_{ij} + \partial_k \Gamma^k_{ij} \\ - \partial_i \Gamma^0_{j0} - \partial_i \Gamma^l_{jl} \\ + (\Gamma^0_{ij}\Gamma^\sigma_{0\sigma} + \Gamma^k_{ij}\Gamma^\sigma_{k\sigma}) \\ - (\Gamma^0_{ik}\Gamma^k_{0j} + \Gamma^k_{i0}\Gamma^0_{jk} + \Gamma^k_{il}\Gamma^l_{jk}) = \\ = \partial_0 \Gamma^0_{ij} + \Gamma^0_{ij}\Gamma^\sigma_{0\sigma} - \Gamma^0_{ik}\Gamma^k_{0j} - \Gamma^k_{i0}\Gamma^0_{jk} + {}^{(3)}R_{ij} = \\ = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)\gamma_{ij} + {}^{(3)}R_{ij} = \\ = \Big\backslash\, {}^{(3)}R_{ij} = 2\frac{\varkappa}{r^2}\gamma_{ij};\ r \equiv 1;\ \varkappa = +1, 0, -1 \,\Big\backslash = \\ = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\varkappa)\gamma_{ij} \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\boxed{R_{ij} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\varkappa)\gamma_{ij}} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned} R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij} = \\ = \backslash\text{считается элементарно}\backslash = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a} + \frac{\varkappa}{a^2}\right) \Rightarrow \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\varkappa}{a^2}\right) \tag{3.32}$$

Покоящаяся материя:

$$T_{00} = \rho; \quad g_{00}\Lambda = \Lambda \ \Rightarrow \tag{3.33}$$

Уравнение Фридмана (с Λ-членом)

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G(\rho + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2}} \tag{3.34}$$

Как меняется ρ в зависимости от t и a?

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu 0} = \partial_\mu T^{\mu 0} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma}T^{\sigma 0} + \Gamma^0_{\mu\sigma}T^{\mu\sigma} = \\ = \partial_0 T^{00} + \Gamma^i_{i0}T^{00} + \Gamma^0_{ij}T^{ij} = \\ = \Big\backslash\, T^{ij} = (p+\rho)u^i u^j - pg^{ij} = -pg^{ij} = \frac{1}{a^2}p\gamma^{ij} \,\Big\backslash = \\ = \dot{\rho} + 3\rho\frac{\dot{a}}{a} + 3p\frac{\dot{a}}{a} = \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \end{aligned} \tag{3.36}$$

(Λ-член удовлетворяет ковариантное сохранение энергии-имульса тождественно).

Полная система уравнений изотропной космологии:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G(\rho + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2} \quad \text{(уравнение Фридмана)} \tag{3.37}$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad \text{(ковариантное сохранение)} \tag{3.38}$$

$$p = p(\rho) \quad \text{(уравнение состояния)} \tag{3.39}$$

Решения уравнений изотропной однородной космологии

Решения для $\varkappa = 0$

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} G(\rho + \Lambda) \tag{3.40}$$

Нерелятивистская пыль, без Λ-члена
Уравнение состояния:

$$p = 0 \tag{3.41}$$

Из (3.38):

$$\frac{\dot\rho}{\rho} = -3\frac{\dot a}{a} \;\Rightarrow\; d(\ln\rho) = d(\ln a^{-3}) \;\Rightarrow \tag{3.42}$$

$$\rho = \frac{\text{const}}{a^3} \quad (\text{сохранение числа частиц}) \tag{3.43}$$

Из (3.40):

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{\text{const}}{a^3} \;\Rightarrow\; a(t) = \text{const}'(t - t_s)^{2/3} \tag{3.44}$$

При $t = t_s$ $a(t) = 0$ – сингулярность. Будем полагать $t_s = 0$:

$$a(t) = \text{const}\, t^{2/3} \tag{3.45}$$

$$\rho = \frac{\text{const}}{t^2} \tag{3.46}$$

В момент сингулярности пространство было плоским и *бесконечным*, плотность была бесконечной.
Постоянную в (3.46) можно найти:

$$\frac{\dot a}{a} = \frac{2}{3}\frac{1}{t} \Rightarrow \rho = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{1}{6\pi G}\frac{1}{t^2} \tag{3.47}$$

Постоянная Хаббла:

$$H(t) = \frac{\dot a}{a} \tag{3.48}$$

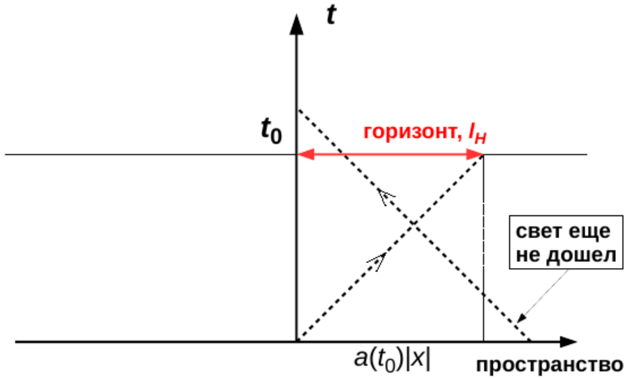
Если бы $a = \text{const} \times t$, то было бы $H(t) = 1/t$ – обратный возраст Вселенной.
В модели пыли

$$H(t) = \frac{2}{3}\frac{1}{t}, \quad t = \frac{2}{3}\frac{1}{H(t)} \tag{3.49}$$

Современное (t_0) значение постоянной Хаббла:

$$\boxed{H_0 \equiv H(t_0) = h \times 100\frac{\text{км/с}}{\text{Мпк}}, \quad h = 0.6774 \pm 0.0046} \tag{3.50}$$

Космологический горизонт



Конформное время:

$$d\eta = dt/a(t) \tag{3.51}$$

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j = a^2(t)(d\eta^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j) \tag{3.52}$$

– конформно-плоская метрика.

Для плоской модели с пылью:

$$\eta(t) = \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^t \frac{dt}{\text{const}\cdot t^{2/3}} = \text{const}'\cdot t^{1/3} \tag{3.53}$$

Светоподобные геодезические: $ds^2 = 0 \Rightarrow$

$$d\eta^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j = dx^2 \;\Rightarrow\; d\eta = |dx| \tag{3.54}$$

$$l_H(t_0) = a(t_0)|x| = a(t_0)\eta(t_0) =$$

$$= a(t_0)\int_0^{t_0}\frac{dt}{a(t)} = \text{const}\cdot t_0^{2/3}\int_0^{t_0}\frac{dt}{\text{const}\cdot t^{2/3}} = 3t_0 =$$

$$= 3\cdot\frac{2}{3H_0} = \frac{2}{H_0} = 8.8\,\text{Гпк} = 29\cdot 10^9\,\text{св.лет} \tag{3.55}$$

($t_0 \sim 10\cdot 10^9$ св.лет – много меньше горизонта!)

Красное смещение

Эволюция свободного электромагнитного поля

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}F^{\nu\rho}F_{\nu\rho} \tag{3.56}$$

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{3.57}$$

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}F_{\mu\lambda}F_{\nu\rho} \tag{3.58}$$

В конформно-плоской метрике

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j] \tag{3.59}$$

Имеем

$$g_{\mu\nu}(\eta) = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu} \tag{3.60}$$

$$g^{\mu\nu}(\eta) = \frac{1}{a^2(\eta)}\eta^{\mu\nu} \tag{3.61}$$

$$\sqrt{-g} = a^4 \tag{3.62}$$

Из (3.58):

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x\, a^4\frac{1}{a^4}\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho}F_{\mu\lambda}F_{\nu\rho} =$$

$$= -\frac{1}{4}\int d^4x\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho}F_{\mu\lambda}F_{\nu\rho} \tag{3.63}$$

– электромагнитное поле конформно-инвариантно.
Плоская волна в (η, x^i)-пространстве:

$$A_\mu^{(\alpha)} = e_\mu^{(\alpha)} \exp[i(|k|\eta - \mathbf{kx})] \tag{3.64}$$

$|k|$ – не частота, и $\mathbf{k}$ – не волновой вектор в физическом пространстве!
Но можно перейти к физическим величинам:

$$\Delta\eta = \frac{2\pi}{k} \text{ – конформный период, не зависит от времени} \tag{3.65}$$

$$\Delta T(t) = a(t)\Delta\eta \text{ – физический период, растет пропорционально } a(t) \tag{3.66}$$

$$\omega(t) = \frac{k}{a(t)} \text{ – физическая частота, падает обратно пропорционально } a(t) \tag{3.67}$$

Эволюция скорости свободных частиц

Координатная скорость частицы отлична от нуля:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \neq 0 \tag{3.68}$$

Физическая скорость частицы:

$$dX^i = a(t)dx^i \Rightarrow U^i = \frac{dX^i}{ds} = a(t)u^i \tag{3.69}$$

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}u^\nu u^\lambda = 0 \tag{3.70}$$

$$\frac{du^i}{ds} + 2\Gamma^i_{0j}u^0u^j = 0 \tag{3.71}$$

$$\frac{du^i}{ds} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{dt}{ds}u^i = 0 \tag{3.72}$$

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{du^i}{dt} = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}\left(\frac{U^i}{a}\right) = \frac{dt}{ds}\left(\frac{dU^i}{dt}\frac{1}{a} - \frac{\dot{a}}{a^2}U^i\right) \tag{3.73}$$

$$\cancel{\frac{dt}{ds}}\left(\frac{dU^i}{dt}\frac{1}{a} - \frac{\dot{a}}{a^2}U^i\right) + 2\frac{\dot{a}}{a}\cancel{\frac{dt}{ds}}\frac{1}{a}U^i = 0 \tag{3.74}$$

$$\frac{dU^i}{dt} = -\frac{\dot{a}}{a}U^i \tag{3.75}$$

$$\frac{dU^i}{U^i} = -\frac{da}{a} \Rightarrow U^i = \frac{\text{const}}{a(t)} = U^i(t_i)\frac{a(t_i)}{a(t)} \tag{3.76}$$

Скорость (но не энергия!) массивных частиц падает как $a(t)$.

Красное смещение z определяется через изменение частоты света:

$$\frac{\omega_i}{\omega_0} = 1 + z(t_i) = \frac{a(t_0)}{a(t_i)} \Rightarrow \tag{3.77}$$

$$\boxed{z(t_i) = \frac{a(t_0)}{a(t_i)} - 1} \tag{3.78}$$

Закон Хаббла

t_i близко в прошлом к t_0

$$a(t_i) = a(t_0) + (t_i - t_0)\dot{a}(t_0) = \\ = a(t_0)\left[1 - (t_0 - t_i)\frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}\right] = \\ = a(t_0)[1 - (t_0 - t_i)H_0] \quad (3.79)$$

$$z(t_i) = \frac{a(t_0)}{a(t_0)[1 - (t_0 - t_i)H_0]} - 1 \cong (t_0 - t_i)H_0 \quad (3.80)$$

Но $t_0 - t_i = r \Rightarrow$

$$z(t_i) = rH_0 \quad (3.81)$$

Космологическое красное смещение – не Допплеровское!

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dl^2 \quad (3.82)$$

Поместим себя в $l = 0$, момент времени t_0.
Физическое расстояние до точки на координатном расстоянии l

$$r(t_0) = a(t_0)l \quad \text{(это точное равенство)} \quad (3.83)$$

$$\dot{r}(t_0) = v(t_0) = \dot{a}l \quad (3.84)$$

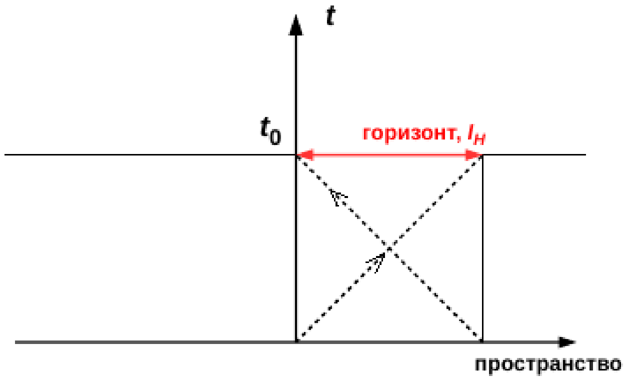
– скорость может быть сколь угодно велика при достаточно большом l!
Эффект Допплера не описывает такую ситуацию.

Но эффект Допплера для малых v есть:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{v}{c} \equiv v = \dot{a}l = \frac{\dot{a}}{a}al = Hr \quad (3.85)$$

Для малых расстояний космологическое красное смещение *выглядит* как смещение Допплера.

Как мы видим горизонт?



Для горизонта $t_i = 0 \Rightarrow$

$$z(0) = \frac{a(t_0)}{a(0)} - 1 = \frac{a(t_0)}{0} - 1 = \infty \quad (3.86)$$