Лекция 10

Скалярные возмущения – однокомпонентные среды. Многокомпонентные среды: адиабатические моды и моды постоянной кривизны

Скалярные возмущения – однокомпонентные среды

Формализм описывает возмущения той компоненты, которая доминирует.

Уравнения Эйнштейна для скалярных мод, однокомпонентная среда (см. (9.70)–(9.72))

$$\Delta\Phi - 3\frac{a'}{a}\Phi' - 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = 4\pi G a^2 \delta\rho \tag{10.1}$$

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi G a^2 [(\rho + p)v] \tag{10.2}$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = 4\pi G a^2 \delta p \tag{10.3}$$

Для однокомпонентной среды уравнения сохранения следуют из (10.1)–(10.3).

(10.1) в импульсном представлении:

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi G a^2 \delta\rho \tag{10.4}$$

Уравнение состояния: $\delta p = u_s^2 \delta\rho$

$(10.4) + (10.3) \times u_s^2$:

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}(1+u_s^2)\Phi' + \left[2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}(1-3u_s^2)\right]\Phi + u_s^2 k^2 \Phi = 0 \tag{10.5}$$

Уравнение Фридмана:

$$\frac{a'^2}{a^4} = \frac{8\pi}{3} G\rho \tag{10.6}$$

Уравнения для (i,j)-компонент:

$$2\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} = -8\pi G p \Rightarrow \tag{10.7}$$

$$\left[2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}(1-3u_s^2)\right] = -8\pi G a^2 (p - u_s^2\rho) \tag{10.8}$$

Считаем $p = u_s^2\rho$, тогда $[\dots]$ исчезает

$$\boxed{\Phi'' + 3\frac{a'}{a}(1+u_s^2)\Phi' + u_s^2 k^2 \Phi = 0} \tag{10.9}$$

Скалярные моды за горизонтом

$$k \ll \frac{a'}{a} \Rightarrow \tag{10.10}$$

последним слагаемым в (10.9) пренебрегаем

$$\boxed{\Phi'' + 3\frac{a'}{a}(1+u_s^2)\Phi' = 0} \tag{10.11}$$

Имеется константное решение

$$\Phi = \Phi_{(i)} = \text{const} \tag{10.12}$$

и есть падающая мода

$$\Phi(\eta) = \text{const} \int_\eta^\infty \frac{d\eta}{a^{3(1+u_s^2)}(\eta)} \tag{10.13}$$

Предполагаем, как обычно, что падающей моды нет.

Ищем
$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho} \tag{10.14}$$
Из (10.4), за горизонтом для константной моды
$$3\,\frac{a'^2}{a^2}\Phi_{(i)} = -4\pi G a^2 \delta\rho \tag{10.15}$$
Из уравнения Фридмана
$$\frac{a'^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3} a^2 G\rho \tag{10.16}$$
Подставляем в (10.15) $\Rightarrow$
$$\boxed{\delta = \frac{\delta\rho}{\rho} = -2\Phi_{(i)} = \mathrm{const}} \tag{10.17}$$

Скорости, соответствующие скалярной моде v: $v_j = \partial_j v$

Из (10.2) потенциал скорости
$$v = -\frac{1}{4\pi G a^2(\rho + p)}\,\frac{a'}{a}\Phi \tag{10.18}$$

$\Phi = \Phi_{(i)} e^{i\mathbf{kx}} \Rightarrow$
$$v_j = \partial_j v = -\frac{1}{4\pi G(\rho+p)}\,\frac{a'}{a^2}\,\frac{1}{a} i k_j e^{i\mathbf{kx}} \sim$$
$$\sim \frac{1}{4\pi G(\rho+p)}\,Hq = \frac{1}{4\pi G(\rho+p)}\,H^2\frac{q}{H} \sim \frac{q}{H} \ll 1 \tag{10.19}$$

Скалярные моды под горизонтом: УР вещество

$$w = u_s^2 = 1/3 \tag{10.20}$$
Из (10.9)
$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\,(1+u_s^2) + u_s^2 k^2 \Phi = 0;\ \ \frac{a'}{a} = \frac{1}{\eta} \Rightarrow \tag{10.21}$$
$$\Phi'' + \frac{4}{\eta} + u_s^2 k^2 \Phi = 0 \tag{10.22}$$
Сводится к уравнению для сферической функции Бесселя 1-го порядка. Решение:
$$\Phi(\eta) = -3\Phi_{(i)}\,\frac{1}{(u_s k\eta)^2}\left[\cos(u_s k\eta) - \frac{\sin(u_s k\eta)}{u_s k\eta}\right] \tag{10.23}$$
$$\Phi(\eta \to 0) = \Phi_{(i)} \tag{10.24}$$
Звуковой горизонт:
$$l_s = u_s \cdot \frac{1}{H} \tag{10.25}$$
Далеко под звуковым горизонтом ($u_s k\eta \gg 1$) имеется падающая волна с определенной фазой:
$$\Phi(\eta) = -3\Phi_{(i)}\,\frac{1}{(u_s k\eta)^2}\cos(u_s k\eta) \tag{10.26}$$

Ищем $\delta = \delta\rho/\rho$ глубоко под (звуковым) горизонтом. Из (10.4)

$$\left(k^2 + 3\frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' = -4\pi G a^2 \delta\rho \qquad (10.27)$$

Покажем, что слева существенен только член $k^2\Phi$.

$$\eta^2\left(k^2 + 3\frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi =$$

$$= \eta^2\left(k^2 + \frac{3}{\eta^2}\right)\left(-3\Phi_{(i)}\cos(u_s k\eta)\frac{1}{(u_s k\eta)^2}\right) =$$

$$= \left(\eta^2 k^2 + 3\right)\left(-3\Phi_{(i)}\cos(u_s k\eta)\frac{1}{(u_s k\eta)^2}\right) =$$

$$= \backslash u_s k\eta \gg 1 \backslash \approx$$

$$\approx \eta^2 k^2\left(-3\Phi_{(i)}\cos(u_s k\eta)\frac{1}{(u_s k\eta)^2}\right) \sim \Phi_{(i)} \qquad (10.28)$$

$$\eta^2 3\frac{a'}{a}\Phi' \cong \frac{9\Phi_{(i)}}{u_s k\eta}\sin(u_s k\eta) \sim \frac{1}{u_s k\eta}\Phi_{(i)} \qquad (10.29)$$

$$\eta^2\left(k^2 + 3\frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi \approx k^2\Phi \gg 3\frac{a'}{a}\Phi' \qquad (10.30)$$

$$\delta\rho = -\frac{1}{4\pi G}\frac{k^2}{a^2}\Phi(\eta) =$$

$$= \frac{3\Phi_{(i)}}{4\pi G}\frac{1}{u_s^2}\frac{1}{a^2\eta^2}\cos(u_s k\eta) = \left\backslash \frac{1}{a^2\eta^2} = H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \right\backslash =$$

$$= 6\Phi_i \rho \cos(u_s k\eta) \Rightarrow \qquad (10.31)$$

$$\boxed{\delta_{rad} = \frac{\delta\rho_{rad}}{\rho} = 6\Phi_{(i)}\cos(u_s k\eta)} \qquad (10.32)$$

Возмущения плотности релятивистского вещества под горизонтом испытывают акустические осцилляции.
Амплитуда не растет и не убывает – Джинсовской неустойчивости нет.

Возмущение скорости релятивистской материи

Исходим из (10.2):

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi G a^2(\rho + p)v \qquad (10.33)$$

$$\frac{a'^2}{a^4} = \frac{8\pi}{3}G\rho; \;\; \frac{a'}{a^2} = \frac{1}{a\eta}; \;\; p = \frac{1}{3}\rho \Rightarrow \qquad (10.34)$$

$$a^2(p+\rho) = \frac{1}{\eta^2}\frac{1}{2\pi G} \qquad (10.35)$$

Подставляем (10.23) и (10.35) в (10.2) и получаем:

$$kv = \frac{3\Phi_{(i)}}{u_s}\left[\frac{\sin(u_s k\eta)}{(u_s k\eta)^2} - \frac{\cos(u_s k\eta)}{u_s k\eta} - \frac{1}{2}\sin(u_s k\eta)\right] \qquad (10.36)$$

v – потенциал скорости: $v_i = ik_i v = \partial_i v$; kv – «физическая скорость».

Для мод глубоко под (акустическим) горизонтом ($u_s k\eta \gg 1$)

$$\boxed{kv = -\frac{3\Phi_{(i)}}{2u_s}\sin(u_s k\eta)} \qquad (10.37)$$

– акустические осцилляции.

Ср. (10.32) и (10.37) – фазы сдвинуты на $\pi/2$.

Нерелятивистское вещество (под и за горизонтом)

(10.9):

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}(1+u_s^2)\Phi' + u_s^2 k^2 \Phi = 0 \qquad (10.38)$$

$p = 0$; $u_s = 0 \Rightarrow$ все моды находятся за звуковым горизонтом.
Все, что остается от уравнения:

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' = 0 \Rightarrow \Phi(\eta) = \Phi = \text{const} \qquad (10.39)$$

Начальные данные – константная мода, *она для потенциала и сохраняется.* $\Rightarrow$
• В линейном режиме возмущения потенциалов скалярной моды НР вещества не меняются.

Плотность

(10.4):

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi G a^2 \delta\rho \qquad (10.40)$$

$\Phi' = 0 \Rightarrow$

$$\left(k^2 + 3\frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = -4\pi G a^2 \delta\rho \Rightarrow \qquad (10.41)$$

$$\delta\rho = -\frac{1}{4\pi G a^2}\left(k^2 + 3\frac{a'^2}{a^2}\right) = \\ = \backslash a = \text{const}\,\eta^2 \Rightarrow a'/a = 2/\eta \backslash = \\ = -\frac{1}{4\pi G a^2}\left(k^2 + \frac{12}{\eta^2}\right)\Phi \qquad (10.42)$$

$$\boxed{\delta\rho = -\frac{1}{4\pi G a^2}\left(k^2 + \frac{12}{\eta^2}\right)\Phi} \qquad (10.43)$$

За горизонтом

$k\eta \ll 1 \Rightarrow k^2 \ll 1/\eta^2 \Rightarrow$
$12/\eta^2$ доминирует $\Rightarrow$
$\delta\rho \propto 1/a^3$.
Но $\rho \propto 1/a^3 \Rightarrow \delta = \delta\rho/\rho = \text{const}$

$$H = \frac{a'}{a^2} = \frac{2}{a\eta} \qquad (10.44)$$

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \Rightarrow \rho = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{2}{a\eta}\right)^2 \Rightarrow \qquad (10.45)$$

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho} = -2\Phi \qquad (10.46)$$

$$\boxed{\delta = \delta_{(i)} = -2\Phi_{(i)} = \text{const} - \text{за горизонтом}} \qquad (10.47)$$

Под горизонтом

$k\eta \gg 1 \Rightarrow k^2 \gg 1/\eta^2 \Rightarrow$

$$\delta\rho = -\frac{1}{4\pi G a^2}k^2\Phi = +\frac{1}{8\pi G a^2}k^2\delta_{(i)} \tag{10.48}$$

Уже видно, что δ будет расти пропорционально a. Найдем, как:

$$\rho = \frac{3}{8\pi G}H^2 \tag{10.49}$$

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{3}\frac{k^2}{a^2}\frac{1}{H^2}\delta_{(i)} = \frac{1}{3}\frac{q^2}{H^2}\delta_{(i)} \tag{10.50}$$

В момент входа под горизонт $q_\times = H_\times \Rightarrow$

$$\delta_\times = \frac{1}{3}\delta_{(i)} \tag{10.51}$$

$$H^2 = \left(\frac{2}{a\eta}\right)^2 \Rightarrow \tag{10.52}$$

$$\delta = \frac{1}{3}\frac{k^2}{a^2}\frac{a^2\eta^2}{4}\delta_{(i)} = \frac{1}{12}k^2\eta^2\delta_{(i)} = \\ = \Big\backslash \eta^2 = \frac{a}{\mathrm{const}}\Big\backslash = \frac{1}{12}k^2\frac{a}{\mathrm{const}}\delta_{(i)} \tag{10.53}$$

$$\frac{1}{12}k^2\frac{a_\times(k)}{\mathrm{const}}\delta_{(i)} = \frac{1}{3}\delta_{(i)} \tag{10.54}$$

$$\mathrm{const} = \frac{1}{4}k^2 a_\times(k) \tag{10.55}$$

$$\boxed{\delta(\eta) = \frac{1}{3}\frac{a(\eta)}{a_\times}\delta_{(i)},\ k\eta \gg 1} \tag{10.56}$$

Амплитуда моды растет со временем – неустойчивость Джинса. Чем позднее мода входит под горизонт, тем меньше успевает вырасти к моменту η

Рассмотрим моды, вошедшие под горизонт на МД-стадии.
Самая короткая среди них – вошедшая под горизонт в момент q_{eq}
Координатный импульс (волновое число) моды определяется

$$k_{eq}\eta_{eq} \sim 1 \tag{10.57}$$

Длина волны сейчас:

$$\frac{k_{eq}}{a_0}(a_0\eta_{eq}) = q_{eq}(a_0\eta_{eq}) = \frac{2\pi}{\lambda_{eq}}(a_0\eta_{eq}) \sim 1 \Rightarrow \tag{10.58}$$

$$\lambda_{eq} \sim 2\pi(a_0\eta_{eq}) = 2\pi \times 120\,\text{Мпк} \approx 750\,\text{Мпк} \tag{10.59}$$

$$\delta = \frac{1}{3}(1+z_{eq})\delta_{(i)} \tag{10.60}$$

$$\delta_{(i)} \sim 3\cdot 10^{-5},\ z_{eq} \approx 3000 \Rightarrow \delta \sim 0.03 \tag{10.61}$$

Моды, вошедшие под горизонт на МД-стадии не вошли в нелинейный режим $\Rightarrow$
Вселенная на масштабах 750 Мпк и более однородна.

Существующие структуры определяются модами, вошедшими под горизонт раньше – на РД-статдии.

Скорости

(10.2):

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi G a^2(\rho + p)v \tag{10.62}$$

$\Phi' = 0,\ p = 0 \Rightarrow$

$$v = -\frac{a'}{a}\Phi\frac{1}{4\pi G a^2}\frac{1}{\rho} = \\ = \left\backslash \frac{8\pi}{3}G\rho = H^2 = \left(\frac{2}{a\eta}\right)^2,\ \frac{a'}{a} = \frac{2}{\eta} \right\backslash = \\ = -\frac{1}{3}\Phi\eta \tag{10.63}$$

$$\boxed{kv = -\frac{\Phi}{3}k\eta} \tag{10.64}$$

Моды за горизонтом $k\eta \ll 1 \Rightarrow kv \ll \Phi$
Под горизонтом скорости растут $kv \propto \eta \propto \sqrt{a}$
При всех масштабах, т.к. $u_s = 0$

Нерелятивистское вещество на Λ-доминированной стадии

$$(8.32): \quad a(\eta) = -\frac{1}{H_{dS}\eta},\ H_{dS}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_\Lambda \tag{10.65}$$

Λ создает давление, но не создает возмущения давления!

Потенциал Φ.
Из (10.3):

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\,\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = 4\pi G a^2 \delta p_{tot} \tag{10.66}$$

$\delta p_{tot} = 0$. Подставляем (10.65):

$$\Phi'' - \frac{3}{\eta}\Phi' + \frac{3}{\eta^2}\Phi = 0 \tag{10.67}$$

Два типа решений:

$$\Phi(\eta) = \mathrm{const}\cdot\eta \propto \frac{1}{a} \tag{10.68}$$

$$\Phi(\eta) = \mathrm{const}\cdot\eta^3 \propto \frac{1}{a^3} \tag{10.69}$$

Плотность

(10.4):

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi G a^2\delta\rho \tag{10.70}$$

Подставляем (10.68), пренебрегаем (10.69), используем $a'/a = -1/\eta$

$$k^2\Phi = -4\pi G a^2\delta\rho \Rightarrow \delta\rho = -\frac{k^2\Phi}{4\pi G a^2} \tag{10.71}$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \propto \frac{\Phi}{a^2}\cdot a^3 = k^2 a\cdot\frac{1}{a} = 1 \text{ (не растут)} \tag{10.72}$$

Структуры большего масштаба, чем наблюдаются сейчас, не появятся никогда.

Первичные скалярные возмущения в многокомпонентной Вселенной

Основные уравения для возмущений в импульсном представлении

Линеаризованные уравнения Эйнштейна:

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi G a^2 \sum_\lambda \delta\rho_\lambda \qquad (10.73)$$

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi G a^2 \sum_\lambda (\rho_\lambda + p_\lambda) v_\lambda \qquad (10.74)$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a}\right)\Phi = 4\pi G a^2 \sum_\lambda \delta p_\lambda \qquad (10.75)$$

Линеаризованный закон сохранения ТЭИ:

$$\delta\rho'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho_\lambda + \delta p_\lambda) - (\rho_\lambda + p_\lambda)(k^2 v_\lambda + 3\Phi') = 0 \qquad (10.76)$$

$$[(\rho_\lambda + p_\lambda)]' + 4\frac{a'}{a}(\rho_\lambda + p_\lambda)v_\lambda + \delta p_\lambda + (\rho_\lambda + p_\lambda)\Phi = 0 \qquad (10.77)$$

До рекомбинации:

- Барион-электрон-фотонная среда $\lambda = B\gamma$
- Темная материя: $\lambda = CDM$.
- Нейтрино (лептоны): $\lambda = L$

Обозначения и связи:

$$\delta_\lambda = \delta\rho_\lambda/\rho_\lambda \qquad (10.78)$$

$$\delta p_\lambda = u^2_{s,\lambda}\delta\rho_\lambda \qquad (10.79)$$

$$p_\lambda = w_\lambda \rho_\lambda \qquad (10.80)$$

Уравнения (10.76) и (10.77) в терминах $\delta_\lambda, w_\lambda, u^2_{s,\lambda}$:

$$\delta'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(u^2_{s,\lambda} - w_\lambda)\delta_\lambda - (1 + w_\lambda)k^2 v_\lambda = 3(1 + w_\lambda)\Phi' \qquad (10.81)$$

$$[(1+w_\lambda)v_\lambda]' + \frac{a'}{a}(1-3w_\lambda)(1+w_\lambda) + u^2_{s,\lambda}\delta_\lambda = -(1+w_\lambda)\Phi \qquad (10.82)$$

Адиабатическая мода и мода постоянной кривизны

Вообще говоря, имеют место возмущения плотности и состава среды вместе.
Если возмущения малы (линейный режим), то можно разделить на две линейно-независмые компоненты:
Возмущения плотности – отдельно;
Возмущения состава – отдельно.

Возмущения плотности – <u>адиабатическая мода</u>

Относительные величины, характеризующие барионную асимметрию, плотность темной материи и лептонную асимметрию (избыток нейтрино над антинейтрино (который неизвестен)) не зависят от координат:

$$\delta\left(\frac{n_B}{s}\right) = \delta\left(\frac{n_{CDM}}{s}\right) = \delta\left(\frac{n_L}{s}\right) = 0 \qquad (10.83)$$

Возмущения состава – моды постоянной кривизны

Глубоко на РД-стадии возмущения релятивистского вещества отсутсвуют, но:
• Неоднородность барионного числа $\to$ барионная мода постоянной кривизны
• Неоднородность плотности темной материи $\to$ CDM-мода постоянной кривизны
• Неоднородность лептонного числа $\to$ лептонная мода постоянной кривизны
(при прочих фоновых концентрациях)

Кривизна постоянная от того, что возмущения барионого числа, CDM – вносят малый вклад в полную плотность на глубокой РД-стадии, потому и кривизна ($h_{\mu\nu}$) не меняется.

Общее определение: для мод постоянной кривизны за горизонтом возмущение гравитационных потенциалов отсутствует.

Наблюдения: вклад мод постоянной кривизны мал.

Адиабатическая мода за горизонтом.
Начальные условия для адиабатической моды – что это такое?

За горизонтом возмущения существуют в виде константных мод $\Phi = \Phi_{(i)} = \text{const}$, $\delta\rho/\rho = \text{const}$ и общая пространственно-временная картина, соответствующая одной константной моде, на эвристическом уровне соответствует набору независимых однородных вселенных несколько различающихся по времени эволюции и потому имеющих разную температуру, или начавших развиваться в разное время.

Тогда для адиабатической моды для каждой независимой компоненты среды можно записать:

$$\delta\rho_\lambda = \rho'_\lambda \delta\eta(\mathbf{x},\eta) \equiv \rho'_\lambda \varepsilon(\mathbf{x},\eta) \qquad (10.84)$$
$$\delta p_\lambda = p'_\lambda \delta\eta(\mathbf{x},\eta) \equiv p'_\lambda \varepsilon(\mathbf{x},\eta) \qquad (10.85)$$

Функция $\varepsilon(\mathbf{x},\eta)$ – одна для всех компонент λ.

В то же время, при фиксированном составе среды ρ и p однозначно зависят от температуры:

$$\delta\rho_\lambda = \frac{\partial\rho_\lambda}{\partial T}\delta T(\mathbf{x},\eta) \qquad (10.86)$$
$$\delta p_\lambda = \frac{\partial p_\lambda}{\partial T}\delta T(\mathbf{x},\eta) \qquad (10.87)$$

Тогда:

$$\rho'_\lambda \varepsilon = \frac{\partial\rho_\lambda}{\partial\eta}\varepsilon = \frac{\partial\rho_\lambda}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial\eta}\varepsilon = \frac{\partial\rho_\lambda}{\partial T}\delta T \Rightarrow \qquad (10.88)$$

$$\varepsilon(\mathbf{x},\eta) = \frac{\delta T(\mathbf{x},\eta)}{T'} \qquad (10.89)$$

$\varepsilon(\mathbf{x},\eta)$ и $\delta T(\mathbf{x},\eta)$ однозначно связаны, поэтому определенения (10.86,10.87) и (10.84,10.85) эквивалентны.

При этом формулы (10.86,10.87) можно считать определением адиабатической моды.

Совместимо ли определение (10.86,10.87) или (10.84,10.85) с уравнениями (10.73)–(10.77)?

Покажем, что Φ (а следовательно и все остальное) действительно выражается только через ε – при том, что уравнения записаны для отдельных компонент λ.

Используем (10.76). За горизонтом можно считать $k=0$, остается:

$$\delta\rho_\lambda + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho_\lambda + \delta p_\lambda) - (\rho_\lambda + p_\lambda)3\Phi' =$$

$$= \Big\backslash\, \delta\rho_\lambda = \rho'_\lambda\varepsilon;\ \ \rho'_\lambda = -3\frac{a'}{a}\,(\rho_\lambda + p_\lambda)\ \text{ков. сохр. (8.29)} \Big\backslash$$

$$= -3(\rho_\lambda + p_\lambda)\left[\left(\frac{a'}{a}\varepsilon\right)' + \Phi'\right] = 0 \Rightarrow \quad (10.90)$$

$$\boxed{\Phi' = -\left(\frac{a'}{a}\varepsilon\right)'} \quad (10.91)$$

– Зависимости от λ нет!

Решение (10.91):

$$\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x},\eta) = -\frac{a'}{a}\varepsilon(\mathbf{x},\eta) - \zeta(\mathbf{x},\mathbf{k}) \quad (10.92)$$

$\zeta(\mathbf{x},\mathbf{k})$ важна, т.к., в действительности, и определяет константную моду за горизонтом.

Из ковариантного сохранения (8.29)

$$\rho'_\lambda = -3\frac{a'}{a}\,(\rho_\lambda + p_\lambda) \Rightarrow \quad (10.93)$$

$$\frac{a'}{a} = -\frac{1}{3}\,\frac{\rho'_\lambda}{(\rho_\lambda + p_\lambda)} = \Big\backslash\, \rho'_\lambda = \frac{\delta\rho_\lambda}{\varepsilon} \Big\backslash =$$

$$= -\frac{1}{3}\,\frac{\delta\rho_\lambda}{\varepsilon(\rho_\lambda + p_\lambda)} \Rightarrow \quad (10.94)$$

$$\zeta(\mathbf{k}) = -\Phi + \frac{1}{3}\,\frac{\delta\rho_\lambda}{\rho_\lambda + p_\lambda} = -\Phi + \frac{1}{3}\,\frac{\delta\rho_{tot}}{\rho_{tot} + p_{tot}} \quad (10.95)$$

– так как мода адиабатическая

$$\boxed{\zeta(\mathbf{k}) = -\Phi + \frac{1}{3}\,\frac{\delta\rho_{tot}}{\rho_{tot} + p_{tot}}} \quad (10.96)$$

– не зависит от времени, в то время, как слагаемые в п.ч. могут зависеть от времени!

Выразим Φ только через ζ.
Решаем уравнение (10.73)

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi G a^2 \sum_\lambda \delta\rho_\lambda \quad (10.97)$$

- Для константной моды $k=0$
- Подставляем $\delta\rho_\lambda = \rho_\lambda\varepsilon$
- Подставляем (10.92)
- Используем $\rho_{tot} = \dfrac{3}{8\pi G}\,\dfrac{a'^2}{a^4}$

$$\boxed{2\frac{a'}{a}\varepsilon + \varepsilon' + \zeta = 0} \quad (10.98)$$

Решение вариацией постоянных.
Общее решение при $\zeta = 0 \Rightarrow \varepsilon = Ca^{-2}$
– падающая мода, должно быть отброшено $\Rightarrow \zeta \neq 0$
Ответ:

$$\varepsilon(\eta) = -\zeta\,\frac{1}{a^2(\eta)}\int_0^\eta a^2(\eta)d\eta \quad (10.99)$$

Нижний предел выбран исходя из $\varepsilon(\eta \to 0) = 0$, так как только в этом случае $\Phi = -\frac{a'}{a}\varepsilon - \zeta$ конечен в $\eta = 0$.

Уравнение (10.75) с (10.99) удовлетворяется автоматически (проверить).

$$\Phi = -\zeta\left(1 - \frac{a'}{a^3}\int_0^\eta a^2(\eta)d\eta\right) \quad (10.100)$$

Из (10.74) ищется потенциал скорости v_λ
(и сама скорость)

$\Rightarrow \zeta(\mathbf{k})$ полностью определяет адиабатическую моду за горизонтом.

Вместо ζ можно использовать (и часто используется) величину

$$\mathcal{R} = -\Phi + \frac{a'}{a}v_{tot};\ v_{tot} \equiv \frac{\sum_\lambda(\rho_\lambda + p_\lambda)v_\lambda}{\sum_\lambda(\rho_\lambda + p_\lambda)} \quad (10.101)$$

Из (10.73), (10.74) и

$$\frac{\delta\rho_\lambda}{\rho_\lambda + p_\lambda} = \frac{\delta\rho_{tot}}{\rho_{tot} + p_{tot}}\ \text{(адиабатичность)} \quad (10.102)$$

следует

$$\zeta - \mathcal{R} = -\frac{k^2\Phi}{12\pi G a^2(\rho + p)_{tot}} \to 0\ \text{в пределе}\ k \to 0 \quad (10.103)$$

За горизонтом ζ и $\mathcal{R}$ – одно и то же.

В качестве начального условия для адиабатических скалярных мод можно взять
$\zeta_{(i)}(\mathbf{k})$ или $\mathcal{R}_{(i)}(\mathbf{k})$

На РД-стадии, для главных УР мод за горизонтом (10.17)

$$\delta_{rad} = -2\Phi \quad (10.104)$$

$p_{tot} = \rho_{tot}/3 \Rightarrow$

$$\zeta\ =\ -\Phi + \frac{\delta\rho_{tot}}{3(\rho_{tot} + p_{tot})}\ =\ -\Phi + \frac{1}{4}\delta\ =\ -\frac{3}{2}\Phi\ \Rightarrow \quad (10.105)$$

$$\Phi = -\frac{2}{3}\zeta = -\frac{2}{3}\mathcal{R} \quad (10.106)$$

[Отсюда видно, что для УР мод постоянной кривизны ($\Phi \equiv 0$) $\Rightarrow \zeta = \mathcal{R} = 0$.]

На РД стадии, не слишком задолго до РД→МД перехода имеется нерелятивистское вещество – B и CDM. Для НР вещества

$$\rho_M \propto 1/a^3 \Rightarrow \rho'_M = -3\rho_M\frac{a'}{a} \quad (10.107)$$

Для УР вещества

$$\rho_{rad} \propto 1/a^4 \Rightarrow \rho'_{rad} = -4\rho_{rad}\frac{a'}{a} \quad (10.108)$$

Отсюда

$$\delta_M = \frac{\delta\rho_M}{\rho_M} = \frac{\rho'_M\varepsilon}{\rho_M} = -3\frac{a'}{a}\varepsilon \quad (10.109)$$

$$\delta_{rad} = \frac{\delta\rho_{rad}}{\rho_{rad}} = \frac{\rho'_{rad}\varepsilon}{\rho_{rad}} = -4\frac{a'}{a}\varepsilon \quad (10.110)$$

$$\delta_M = \frac{3}{4}\delta_{rad} = -\frac{3}{2}\Phi = \mathcal{R} \tag{10.111}$$

Эти соотношения выполняются для каждой компоненты в отдельности: B, CDM, $\gamma\dots$

Итог:

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi(\mathbf{k}) &= -\frac{2}{3}\zeta(\mathbf{k}) = -\frac{2}{3}\mathcal{R}(\mathbf{k}) && (10.112)\\ \delta_{rad}(\mathbf{k}) &= \frac{4}{3}\mathcal{R}(\mathbf{k}) && (10.113)\\ \delta_M(\mathbf{k}) &= \mathcal{R}(\mathbf{k}) && (10.114) \end{aligned}}$$

Начальные условия для мод постоянной кривизны

Для мод постоянной кривизны $\zeta_{tot} = \mathcal{R}_{tot} \equiv 0$ по определению.

Начальные данные для мод постоянной кривизны:

$$\zeta_\lambda = -\Phi + \frac{\delta\rho_\lambda}{3(\rho_\lambda + p_\lambda)} \tag{10.115}$$

$$S_{\lambda,\lambda'} = 3(\zeta_\lambda - \zeta_{\lambda'}) = \frac{\delta_\lambda}{1+w_\lambda} - \frac{\delta_{\lambda'}}{1+w_{\lambda'}} \tag{10.116}$$

Обычно $\lambda' = \gamma$; $S_\lambda \equiv S_{\lambda,\gamma}$

$$S_\lambda = \delta_\lambda - \frac{3}{4}\delta_\gamma,\ \lambda = B,\, CDM \tag{10.117}$$

Для УР материи (γ)

$$s_\gamma = g_\gamma \frac{4\pi^2}{90} T^3 \tag{10.118}$$

$$n_\gamma = g_\gamma \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \tag{10.119}$$

$$\rho_\gamma = g_\gamma \frac{\pi^2}{30} T^4 \tag{10.120}$$

$$\frac{\delta s_\gamma}{s_\gamma} = 3\frac{\delta T}{T} \tag{10.121}$$

$$\frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} = 3\frac{\delta T}{T} \tag{10.122}$$

$$\frac{\delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma} = 4\frac{\delta T}{T} \tag{10.123}$$

$$\tag{10.124}$$

$$\frac{\delta s_\gamma}{s_\gamma} = \frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} = \frac{3}{4}\delta_\gamma \tag{10.125}$$

$$\frac{\delta(n_\lambda/s_\gamma)}{n_\lambda/s_\gamma} = \frac{\delta n_\lambda}{n_\lambda} - \frac{\delta s_\gamma}{s_\gamma} = \frac{\delta n_\lambda}{n_\lambda} - \frac{3}{4}\delta_\gamma = \\ = \backslash\lambda - \text{НР}\backslash = \frac{\delta\rho_\lambda}{\rho_\lambda} - \frac{3}{4}\delta_\gamma = \delta_\lambda - \frac{3}{4}\delta_\gamma \Rightarrow \tag{10.126}$$

$$\boxed{S_\lambda = \frac{\delta(n_\lambda/s)}{n_\lambda/s} - \text{«Энтропийные моды»}} \tag{10.127}$$