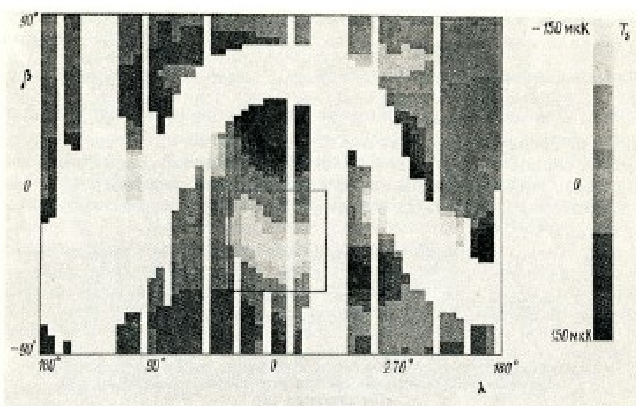
Введение

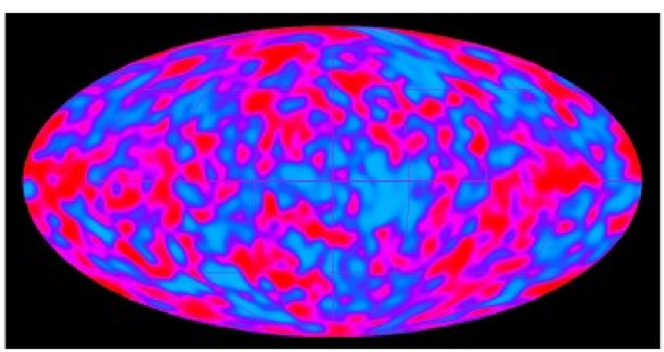
Современная космология

- Классическая космология (А.А. Фридман, В. Де Ситтер, Э. Хаббл, 1920-е)
- Теория космологических возмущений (И.М. Лифшиц, 1940-е)
- Инфляционная космология (А.А. Старобинский, А. Гус (Guth), А.Д. Линде, конец 1970-х - начало 198-х)

РЕЛИКТ - январь 1992



COBE - апрель 1992

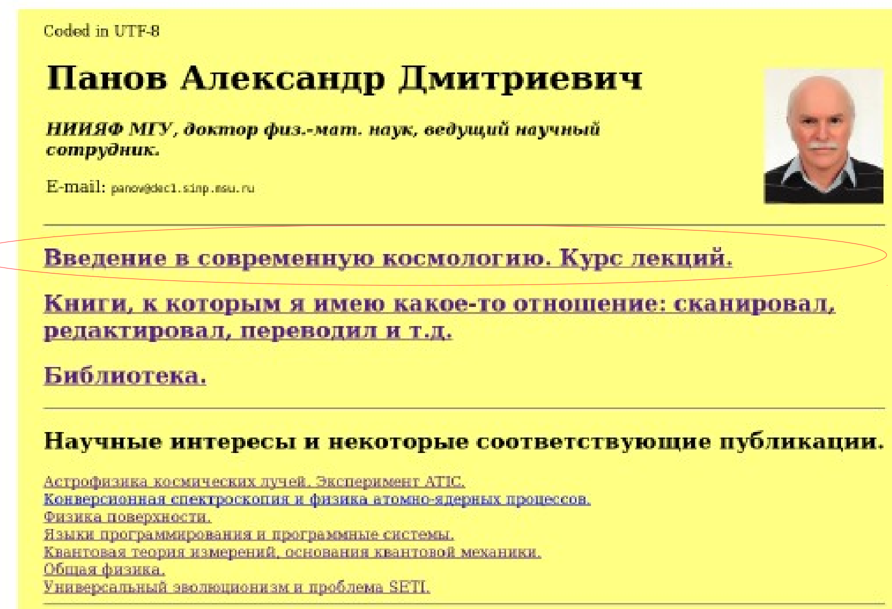


Литература

- Д.С. Горбунов, В.А. Рубаков. Введение в теорию ранней вселенной (два тома).
- А. Лайтман, В. Пресс, Р. Прайс, С. Тюкольски. Сборник задач по теории относительности и гравитации.

Как устроен курс

Презентации в сети: `dec1.sinp.msu.ru/~panov`



Coded in UTF-8

Панов Александр Дмитриевич

НИИЯФ МГУ, доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник.

E-mail: panov@dec1.sinp.msu.ru

Введение в современную космологию. Курс лекций.

Книги, к которым я имею какое-то отношение: сканировал, редактировал, переводил и т.д.

Библиотека.

Научные интересы и некоторые соответствующие публикации.

Астрофизика космических лучей. Эксперимент ATIC.
Конверсионная спектроскопия и физика атомно-ядерных процессов.
Физика поверхности.
Языки программирования и программные системы.
Квантовая теория измерений, основания квантовой механики.
Общая физика.
Универсальный эволюционизм и проблема SETI.

Все формулы пронумерованы!

Наука космология

- Научный метод: наблюдаемость и воспроизводимость
- Вселенная – уникальный объект
- Аппарат космологии описывает «ансамбль одинаковых вселенных», не единичную Вселенную
- Операционально неопределеимоле понятие вероятности – байесовская вероятность
- Cosmic variance – космическая неопределенность $\Rightarrow$ некоторые предсказания в принципе не могут быть проверены с любой наперед заданной точностью.

Лекция 1

Основы ОТО. 1.
Дифференциальная геометрия: метрический тензор, ковариантная производная, тензор кривизны.

- Движение тел в гравитационном поле не зависит от природы тел $\Rightarrow$
- Принцип эквивалентности $\Rightarrow$
- Гравитация есть явление геометрическое

Постулат: Движение в гравитационном поле есть свободное движение по геодезической линии искривленного пространства-времени

Два метода дифференциальной геометрии:
1. Ковариантно-геометрический (дифференциальные формы, внешнее дифференцирование)
2. *Координатный*

Координаты x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$ произвольным образом *локально* помечают точки (события) пространства-времени.

Квадрат интервала:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.1}$$

$g_{\mu\nu}$ – **метрический тензор**.

Квадрат интервала есть фундаментальный инвариант – не зависит от того, в каких координатах мы работаем.

Размерности вообще и размерности s, $g_{\mu\nu}$ и x^μ в частности

$$\hbar = c = k_B = 1 \tag{1.2}$$

$$E = mc^2;\ E = k_B T;\ \omega = E/\hbar;\ p = cE;\ p = \hbar k \ \Rightarrow$$
$$[m] = [T] = [\omega] = [p] = [k] = [E] \tag{1.3}$$

Единица измерения энергии – ГэВ.

Переводные коэффициенты вычисляются подбором степеней $c, \hbar, k_B$.
Примеры:

$$[E] = [\hbar\omega] = \left[\frac{\hbar}{t}\right] \ \Rightarrow\ [t] = \frac{[\hbar]}{E} \ \Rightarrow \tag{1.4}$$

$$t(\mathrm{GeV}^{-1}) = \frac{1.05 \cdot 10^{-27}\,\text{эрг} \cdot \text{с}}{10^9 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}\,\text{эрг}} \approx 6.6 \cdot 10^{-25}\,\text{с} \tag{1.5}$$

$$l(\mathrm{GeV}^{-1}) = \frac{1.05 \cdot 10^{-27}\,\text{эрг} \cdot \text{с} \times 3 \cdot 10^{10}\text{см}\,\text{с}^{-1}}{10^9 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}\,\text{эрг}} \approx$$
$$\approx 2.0 \cdot 10^{-14}\,\text{с} \tag{1.6}$$

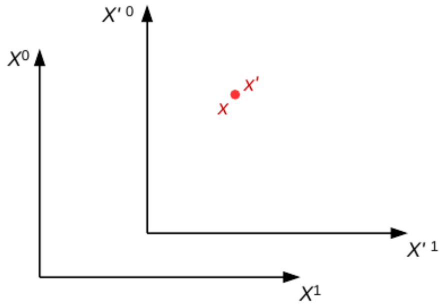
Интервал измерятся в ГэВ$^{-1}$, но метрический тензор и координаты не имеют определенной размерности!

Формализм ковариантен относительно произвольной (гладкой) замены координат (диффеоморфизм):

$$x'^\mu = x'^\mu(x) \tag{1.7}$$

Ковариантность достигается за счет использования объектов, преобразующихся специальным образом.

Скаляры – не преобразуются:



$$\varphi'(x') = \varphi(x) \qquad (1.8)$$

Контравариантные векторы преобразуются как дифференциалы координат

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} \qquad (1.9)$$

$$dA'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu} \qquad (1.10)$$

Ковариантные векторы преобразуются как производные скаляра

$$B_{\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu}} \Rightarrow B'_{\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} B_{\nu} \qquad (1.11)$$

Построение скаляров из векторов:

$$A'^{\mu} B'_{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} A^{\sigma} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'_{\mu}} B_{\rho} = \delta^{\rho}_{\sigma} A^{\sigma} B_{\rho} = A^{\rho} B_{\rho} \qquad (1.12)$$

$\Rightarrow A^{\mu} B_{\mu}$ – инвариант.

Производная по направлению скалярной функции – инвариант:

$$\partial_A \varphi = A^{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu}} \equiv A^{\mu} \partial_{\mu} \varphi \qquad (1.13)$$

Многомерные тензоры (по определению) преобразуются как произведения координат векторов:

$$B'^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\lambda}} B^{\rho}_{\sigma\tau} \qquad (1.14)$$

Для символа Кронекера: $\delta'^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$.

Свертка по верхнему и нижнему индексу уменьшает размерность тензора на 2:

$$A'^{\mu}_{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} A^{\rho}_{\sigma} = \delta^{\sigma}_{\rho} A^{\rho}_{\sigma} = A^{\sigma}_{\sigma} \qquad (1.15)$$

(вообще не осталось индексов)

Почему метрический тензор - тензор?

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}} dx'^{\sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x' \rho} dx'^{\rho} = \\ = ds'^2 = g'_{\sigma\rho} dx'^{\sigma} dx'^{\rho} \qquad (1.16)$$

$$\Rightarrow g'_{\sigma\rho} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\rho}} g_{\mu\nu} \qquad (1.17)$$

Обобщение: Если $\forall$ тензора $A^{\mu\nu}$

$$C^{\mu}_{\lambda} = A^{\mu}_{\nu} B^{\nu}_{\lambda} - \qquad (1.18)$$

тензор, то и B^{ν}_{λ} - тензор (и т.д.)

Следствие: Величина, задаваемая обратной матрицей к метрическому тензору, сама тензор:

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} = \delta^{\mu}_{\nu} \Rightarrow g^{\mu\nu} - \text{тензор} \tag{1.19}$$

Поднятие и опускание индексов

Если A^{μ} – контравариантный вектор, то

$$A_{\mu} = g_{\mu\nu}A^{\nu} \tag{1.20}$$

– ковариантный вектор.

И наоборот:

$$A^{\mu} = g^{\mu\nu}A_{\nu} \tag{1.21}$$

Инвариантный объем

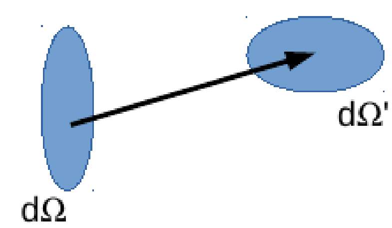
$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \tag{1.22}$$

$$\hat{J} = (J^{\rho}_{\mu}) = \left(\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}}\right)^{\leftarrow\text{столбец}}_{\leftarrow\text{строка}} \equiv \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \tag{1.23}$$

$$\hat{g}' = \hat{J}\hat{g}\hat{J}^{T} \tag{1.24}$$

$$g \equiv \det \hat{g}; \quad J \equiv \det \hat{J} \tag{1.25}$$

$$g' = J^2 g \Rightarrow J = \sqrt{\frac{g'}{g}} \tag{1.26}$$



$$d^4x = \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) d^4x' \Rightarrow d^4x = \sqrt{\frac{g'}{g}} d^4x' \Rightarrow \tag{1.27}$$

$$\boxed{\sqrt{-g}\, d^4x = \sqrt{-g'}\, d^4x'} \tag{1.28}$$

Ковариантные производные

$$(\partial_\mu \varphi)' = \frac{\partial \varphi'}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\partial_\nu \varphi \qquad (1.29)$$

– производная скаляра преобразуется как вектор.

$$(\partial_\mu A^\nu)' = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} A'^\nu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu}\left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} A^\alpha\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x'^\mu}\left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha}\right) A^\alpha + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} =$$
$$= \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\cdot\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} A^\alpha + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\partial_\beta A^\alpha \qquad (1.30)$$

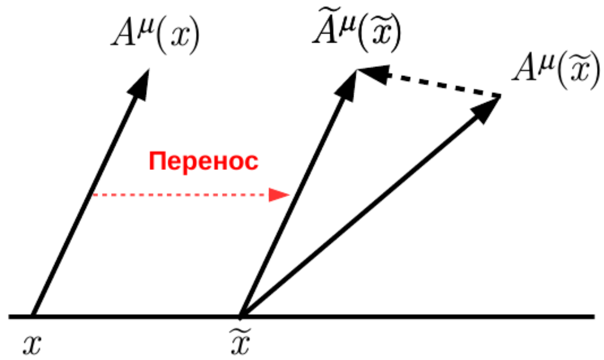
Производная вектора преобразуется как тензор плюс еще какая-то добавка.

Параллельный перенос

Хотим *ковариантную производную*:

$$\begin{cases} (\nabla_m A^\nu)' = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\dfrac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}\nabla_\alpha A^\beta \\ \nabla_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi \end{cases} \qquad (1.31)$$

Проблема: Помимо изменения поля «самого по себе» есть еще добавка, связанная с изменением поля из-за криволинейности системы координат.



$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x}) = A^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu dx^\lambda \qquad (1.32)$$

$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ – *коэффициенты аффинной связности*

$$A^\mu(\tilde{x}) - \tilde{A}^\mu(\tilde{x}) = A^\mu(\tilde{x}) - [A^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu dx^\lambda] =$$
$$= \partial_\lambda A^\mu dx^\lambda + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu dx^\lambda =$$
$$= (\partial_\lambda A^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu) dx^\lambda \equiv \nabla_\lambda A^\mu dx^\lambda \qquad (1.33)$$

$$\boxed{\nabla_\lambda A^\mu = \partial_\lambda A^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu} \qquad (1.34)$$

$\nabla_\lambda B_\mu = ?$

Скаляр не меняется при параллельном переносе:

$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x})\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) = A^\mu(x)B_\mu(x) \tag{1.35}$$

$$[A^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu dx^\lambda]\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) = A^\mu(x)B_\mu(x) \Rightarrow \tag{1.36}$$

$$\begin{aligned} A^\mu(x)[\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) - B_\mu(x)] &= \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu dx^\lambda \tilde{B}_\mu(\tilde{x}) \cong \\ &\cong \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu dx^\lambda B_\mu(x) = \Gamma^\nu_{\mu\lambda}A^\mu dx^\lambda B_\nu \Rightarrow \end{aligned} \tag{1.37}$$

$$\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) = B_\mu(x) + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}dx^\lambda B_\nu \tag{1.38}$$

$$B_\mu(\tilde{x}) - \tilde{B}_\mu(\tilde{x}) = (\partial_\lambda B_\mu - \Gamma^\nu_{\mu\lambda}B_\nu)dx^\lambda \Rightarrow \tag{1.39}$$

$$\boxed{\nabla_\lambda B_\mu = \partial_\lambda B_\mu - \Gamma^\nu_{\mu\lambda}B_\nu} \tag{1.40}$$

Правило Лейбница (легко проверяется):

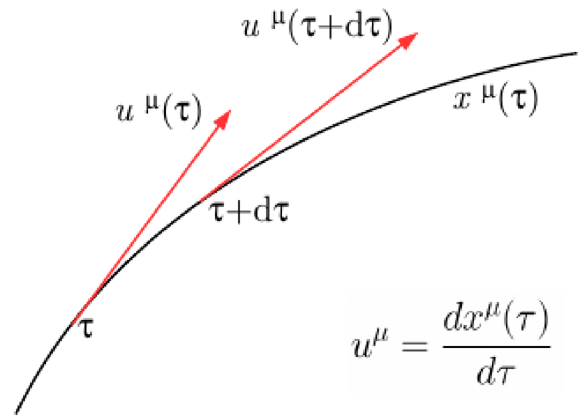
$$\nabla_\lambda(A^\mu B_\nu) = (\nabla_\lambda A^\mu)B_\nu + A^\mu(\nabla_\lambda B_\nu) \tag{1.41}$$

Правило дифференцирования тензоров высшего ранга следует из правила Лейбница:

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda(A^\mu B_\nu) &= (\partial_\lambda A^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}A^\sigma)B_\nu + A^\mu(\partial_\lambda B_\nu - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}B_\sigma) = \\ &\partial_\lambda(A^\mu B_\nu) + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}(A^\sigma B_\nu) - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}(A^\mu B_\sigma) \Rightarrow \end{aligned} \tag{1.42}$$

$$\boxed{\nabla_\lambda C^\mu_\nu = \partial_\lambda C^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}C^\sigma_\nu - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}C^\mu_\sigma} \tag{1.43}$$

Геодезические



$$u^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}$$

Геодезическая линия – такая кривая, вдоль которой касательный вектор к ней переносится параллельно самому себе.

$$u^\mu(\tau + d\tau) = u^\mu + \frac{du^\mu(\tau)}{d\tau}d\tau \tag{1.44}$$

$$\begin{aligned} u^\mu(\tau + d\tau) = \tilde{u}^\mu(\tau + d\tau) &= u^\mu(\tau) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}u^\nu(\tau)dx^\lambda = \\ &= u^\mu(\tau) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}u^\nu(\tau)u^\lambda(\tau)d\tau \Rightarrow \end{aligned} \tag{1.45}$$

$$\frac{du^\mu}{d\tau}d\tau = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda}u^\nu(\tau)u^\lambda(\tau)d\tau \Rightarrow \tag{1.46}$$

$$\boxed{\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}u^\nu u^\lambda = 0} \tag{1.47}$$

Меняем местами ν и λ и складываем:

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \frac{1}{2}\left(\Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\right)u^\nu u^\lambda = 0 \tag{1.48}$$

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\{\nu\lambda\}} u^\nu u^\lambda = 0 \tag{1.49}$$

$$\Gamma^\mu_{\{\nu\lambda\}} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\right) \tag{1.50}$$

Геодезические определяются симметризованными коэффициентами связности.
Являются ли коэффициенты связности на самом деле симметричными?

Метричность связности

Хотим, чтобы операци поднятия/опускания индексов была универсальной:

$$g_{\mu\nu}\nabla_\lambda A^\nu = \nabla_\lambda A_\mu; \quad A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu \text{ т.е.} \tag{1.51}$$

$$g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) = \nabla_\lambda (g_{\mu\nu} A^\nu) \tag{1.52}$$

По правилу Лейбница:

$$\nabla_\lambda (g_{\mu\nu} A^\nu) = (\nabla_\lambda g_{\mu\nu}) A^\nu + g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) = \\ = g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) \Rightarrow \tag{1.53}$$

$$\boxed{\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0} \tag{1.54}$$

Метрический тензор ковариантно постоянен.

Закон преобразования афинных связностей

$$\nabla_\lambda A^\mu = \partial_\lambda A^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} A^\nu \tag{1.55}$$

$$(\nabla_\lambda A^\mu)' = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}(\nabla_\alpha A^\beta) = \\ = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}(\partial_\alpha A^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} A^\gamma) \tag{1.56}$$

$$(\nabla_\lambda A^\mu)' = \frac{\partial A'^\mu}{\partial x'^\lambda} + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma} A'^\gamma = \\ = \frac{\partial}{\partial x'^\lambda}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha\right) + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta} A^\delta = \\ = \frac{\partial}{\partial x'^\lambda}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\right) A^\alpha + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial A^\alpha}{\partial x'^\lambda} + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta} A^\delta = \\ = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} A^\alpha + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta} A^\delta = \\ = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial A^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\gamma} A^\gamma \tag{1.57}$$

$$\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} A^\gamma = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} A^\alpha + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta} A^\delta \tag{1.58}$$

$A^\gamma, A^\alpha, A^\delta \to A^\varepsilon$

$$\Gamma^\beta_{\alpha\varepsilon}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\varepsilon} + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\varepsilon} \quad \Bigg| \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\delta} \tag{1.59}$$

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\{\nu\lambda\}} u^\nu u^\lambda = 0 \tag{1.49}$$

$$\Gamma^\mu_{\{\nu\lambda\}} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\right) \tag{1.50}$$

Геодезические определяются симметризованными коэффициентами связности.
Являются ли коэффициенты связности на самом деле симметричными?

Метричность связности

Хотим, чтобы операци поднятия/опускания индексов была универсальной:

$$g_{\mu\nu}\nabla_\lambda A^\nu = \nabla_\lambda A_\mu; \quad A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu \text{ т.е.} \tag{1.51}$$

$$g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) = \nabla_\lambda(g_{\mu\nu}A^\nu) \tag{1.52}$$

По правилу Лейбница:

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda(g_{\mu\nu}A^\nu) = (\nabla_\lambda g_{\mu\nu})A^\nu + g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) = \\ = g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) \Rightarrow\end{aligned} \tag{1.53}$$

$$\boxed{\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0} \tag{1.54}$$

Метрический тензор ковариантно постоянен.

Закон преобразования афинных связностей

$$\nabla_\lambda A^\mu = \partial_\lambda A^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}A^\nu \tag{1.55}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_\lambda A^\mu)' = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}(\nabla_\alpha A^\beta) = \\ = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}(\partial_\alpha A^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}A^\gamma)\end{aligned} \tag{1.56}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_\lambda A^\mu)' = \frac{\partial A'^\mu}{\partial x'^\lambda} + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma}A'^\gamma = \\ = \frac{\partial}{\partial x'^\lambda}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}A^\alpha\right) + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta}A^\delta = \\ = \frac{\partial}{\partial x'^\lambda}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\right)A^\alpha + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial A^\alpha}{\partial x'^\lambda} + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta}A^\delta = \\ = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}A^\alpha + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta}A^\delta = \\ = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial A^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}A^\gamma\end{aligned} \tag{1.57}$$

$$\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}A^\gamma = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}A^\alpha + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta}A^\delta \tag{1.58}$$

$A^\gamma, A^\alpha, A^\delta \to A^\varepsilon$

$$\Gamma^\beta_{\alpha\varepsilon}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\varepsilon} + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\varepsilon} \quad \Big| \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\delta} \tag{1.59}$$

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\{\nu\lambda\}} u^\nu u^\lambda = 0 \tag{1.49}$$

$$\Gamma^\mu_{\{\nu\lambda\}} = \frac{1}{2}(\Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}) \tag{1.50}$$

Геодезические определяются симметризованными коэффициентами связности.
Являются ли коэффициенты связности на самом деле симметричными?

Метричность связности

Хотим, чтобы операци поднятия/опускания индексов была универсальной:

$$g_{\mu\nu}\nabla_\lambda A^\nu = \nabla_\lambda A_\mu; \quad A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu \text{ т.е.} \tag{1.51}$$

$$g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) = \nabla_\lambda(g_{\mu\nu}A^\nu) \tag{1.52}$$

По правилу Лейбница:

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda(g_{\mu\nu}A^\nu) = (\nabla_\lambda g_{\mu\nu})A^\nu + g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) = \\ = g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) \Rightarrow\end{aligned} \tag{1.53}$$

$$\boxed{\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0} \tag{1.54}$$

Метрический тензор ковариантно постоянен.

Закон преобразования афинных связностей

$$\nabla_\lambda A^\mu = \partial_\lambda A^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}A^\nu \tag{1.55}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_\lambda A^\mu)' = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}(\nabla_\alpha A^\beta) = \\ = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}(\partial_\alpha A^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}A^\gamma)\end{aligned} \tag{1.56}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_\lambda A^\mu)' = \frac{\partial A'^\mu}{\partial x'^\lambda} + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma}A'^\gamma = \\ = \frac{\partial}{\partial x'^\lambda}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}A^\alpha\right) + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta}A^\delta = \\ = \frac{\partial}{\partial x'^\lambda}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\right)A^\alpha + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial A^\alpha}{\partial x'^\lambda} + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta}A^\delta = \\ = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}A^\alpha + \cancel{\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta}} + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta}A^\delta = \\ = \cancel{\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial A^\beta}{\partial x^\alpha}} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}A^\gamma\end{aligned} \tag{1.57}$$

$$\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}A^\gamma = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}A^\alpha + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta}A^\delta \tag{1.58}$$

$A^\gamma, A^\alpha, A^\delta \to A^\varepsilon$

$$\Gamma^\beta_{\alpha\varepsilon}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\varepsilon} + \Gamma'^\mu_{\lambda\gamma}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\varepsilon} \quad \Big| \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\delta} \tag{1.59}$$

$$\boxed{\Gamma'^{\mu}_{\lambda\delta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\delta}\Gamma^\beta_{\alpha\varepsilon} - \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\delta}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\varepsilon}} \tag{1.60}$$

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\nu \partial x'^\lambda} + \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\beta}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\varepsilon} \equiv 0 \tag{1.61}$$

$$\boxed{\Gamma'^{\mu}_{\lambda\delta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\delta}\Gamma^\beta_{\alpha\varepsilon} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\delta \partial x'^\lambda}} \tag{1.62}$$

Аффинная связность – не тензор!

Кручение

$$C^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} \tag{1.63}$$

Преобразуется как тензор.

Локально Лоренцевы системы отсчета

Если $C^\alpha_{\beta\gamma} \neq 0$ хотя бы в одной системе отсчета, то $C^\alpha_{\beta\gamma} \neq 0$ в любой системе отсчета, следовательно в любой системе отсчета $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \neq 0$ и гравитацию исключить невозможно. Чтобы гравитацию можно было локально исключить, в ОТО *требуется* $C^\alpha_{\beta\gamma} \equiv 0$, $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$

Если $C^\alpha_{\beta\gamma} = 0$, то аффинную связность *локально занулить можно.*

$$x'^\mu = x^\mu + T^\mu_{\sigma\rho} x^\sigma x^\rho \tag{1.64}$$

$$dx'^\mu|_0 = dx^\mu|_0 \Rightarrow \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu; \; \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta^\nu_\mu \tag{1.65}$$

$$\left.\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\varepsilon}\right|_0 = T^\mu_{\varepsilon\beta} + T^\mu_{\beta\varepsilon} \Rightarrow \tag{1.66}$$

$$\begin{aligned}\Gamma'^{\mu}_{\lambda\delta} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\delta}\Gamma^\beta_{\alpha\varepsilon} - \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\delta}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\varepsilon} = \\ &= \delta^\alpha_\lambda \delta^\mu_\beta \delta^\varepsilon_\delta \Gamma^\beta_{\alpha\varepsilon} - \delta^\beta_\lambda \delta^\varepsilon_\delta (T^\mu_{\varepsilon\beta} + T^\mu_{\beta\varepsilon}) = \\ &= \Gamma^\mu_{\lambda\delta} - (T^\mu_{\delta\lambda} + T^\mu_{\lambda\delta})\end{aligned} \tag{1.67}$$

$$T^\mu_{\delta\lambda} + T^\mu_{\lambda\delta} = \Gamma^\mu_{\lambda\delta}(0) \Rightarrow \Gamma'^\mu_{\lambda\delta}(0) = 0. \tag{1.68}$$

Например:

$$T^\mu_{\delta\lambda} = \frac{1}{2}\Gamma^\mu_{\lambda\delta}(0) \tag{1.69}$$

Симметричность $\Gamma^\mu_{\lambda\delta}$ – необходимое условие!

С помощью преобразования

$$\hat{g}' = \hat{J}\hat{g}\hat{J}^T, \;\; \hat{J} = \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \tag{1.70}$$

симетричная матрица $\hat{g}$ может быть приведена к диагональному виду

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} k^0 & & & 0 \\ & -k^1 & & \\ & & -k^2 & \\ 0 & & & -k^3 \end{pmatrix}, \;\; k^\mu > 0 \tag{1.71}$$

С помощью масштабного преобразования:

$$x'^{\mu} = x^{\mu}\frac{1}{\sqrt{k^{\mu}}} \Rightarrow g_{mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \tag{1.72}$$

Преобразование (1.64) в силу (1.65) не меняет тензоры в начале координат, поэтому связность можно занулить после того, как как $\hat{g}$ приведен к лоренцову виду.

$$\boxed{\text{Метрический тензор можно привести к Лоренцеву виду и связность можно занулить одновременно – это локально Лоренцева система отсчета}}$$

Явное выражение коэффициентов связности через метрический тензор

Используется *одновременно* метричность и симметричность связности:

$$\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} = 0. \tag{1.73}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} + \cancel{\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma}} &= \partial_{\lambda} g_{\mu\nu}\ [\lambda\mu\nu]\ |\times(+1) \\ \cancel{\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} g_{\sigma\lambda}} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} &= \partial_{\mu} g_{\nu\lambda}\ [\mu\nu\lambda]\ |\times(+1) \\ \cancel{\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} g_{\sigma\mu}} + \cancel{\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} g_{\lambda\sigma}} &= \partial_{\nu} g_{\lambda\mu}\ [\nu\lambda\mu]\ |\times(-1) \end{aligned} \tag{1.74}$$

$$2\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} = \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} + \partial_{\mu} g_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda} g_{\lambda\mu}\ |g^{\nu\delta} \tag{1.75}$$

$$\boxed{\Gamma^{\delta}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\delta\nu}(\partial_{\lambda} g_{\mu\nu} + \partial_{\mu} g_{\nu\lambda} - \partial_{\nu} g_{\lambda\mu})} \tag{1.76}$$

Тензор Леви-Чевита

В лоренцевой (галилеевой) системе (x)

$$E^{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma},\ \varepsilon^{0123} = 1 \tag{1.77}$$

В произвольной системе

$$E'^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\delta}}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{1.78}$$

$$\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| = \sqrt{\frac{g'}{g}} = \sqrt{-g'} \ \Rightarrow\ \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = \frac{1}{\sqrt{-g'}} \ \Rightarrow \tag{1.79}$$

$$E'^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g'}}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{1.80}$$

$$\boxed{E^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}} \tag{1.81}$$

Тензор кривизны

Два способа ввести тензор кривизны.

1. Через коммутатор ковариантной производной

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A^\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu A^\lambda = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\lambda = ? \tag{1.82}$$

$$\nabla_\mu(\nabla_\nu A^\lambda) = \partial_\mu(\nabla_\nu A^\lambda) - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}(\nabla_\sigma A^\lambda) + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}(\nabla_\nu A^\sigma) = \dots \tag{1.83}$$

$$\nabla_\nu(\nabla_\mu A^\lambda) = \dots \tag{1.84}$$

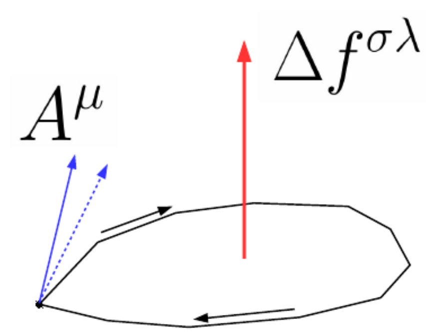
(посчитать!)

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\lambda = A^\sigma R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} \tag{1.85}$$

$$\boxed{R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\mu\sigma}} \tag{1.86}$$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A_\lambda = A_\sigma R^\sigma{}_{\mu\nu\lambda} \text{ (посчитать)} \tag{1.87}$$

2. Параллельный перенос вдоль замкнутого контура



$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x}) = A^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu dx^\lambda \tag{1.88}$$

$$\delta A^\mu(x) = \tilde{A}^\mu(x+dx) - A^\mu(x) = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu dx^\lambda \tag{1.89}$$

$$\Delta A^\mu = \oint \delta A^\mu(x) = -\oint \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu dx^\lambda \tag{1.90}$$

Фрмула Стокса:

$$\oint B_{\dots\lambda} dx^\lambda = \frac{1}{2}\int df^{\sigma\lambda}\left(\frac{\partial B_{\dots\lambda}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial B_{\dots\sigma}}{\partial x^\lambda}\right) \tag{1.91}$$

$$\Delta A^\mu = -\frac{1}{2}\int df^{\sigma\lambda}[\partial_\sigma(\Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu) - \partial_\lambda(\Gamma^\mu_{\nu\sigma}A^\nu)] \simeq$$
$$\simeq -\frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}(\partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\, A^\nu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\partial_\sigma A^\nu - \partial_\lambda \Gamma^\mu_{\nu\sigma}\, A^\nu - \Gamma^\mu_{\nu\sigma}\partial_\lambda A^\nu) \tag{1.92}$$

$$\delta A^\mu(x) = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu dx^\lambda \;\Rightarrow\; \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda} = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu \tag{1.93}$$

$$\Delta A^\mu =$$
$$-\frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}(\partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\Gamma^\nu_{\rho\sigma}A^\rho - \partial_\lambda \Gamma^\mu_{\nu\sigma}\, A^\nu + \Gamma^\mu_{\nu\sigma}\Gamma^\nu_{\rho\lambda}A^\rho) =$$
$$= \frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}(\partial_\lambda \Gamma^\mu_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\lambda\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\Gamma^\rho_{\nu\lambda})A^\nu =$$
$$= \frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda} R^\mu{}_{\sigma\lambda\nu} A^\nu \tag{1.94}$$

$$\boxed{\Delta A^\mu = \frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda} R^\mu{}_{\sigma\lambda\nu} A^\nu} \tag{1.95}$$

Свойства тензора кривизны

$$R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} \qquad (1.96)$$

$$\begin{aligned} R_{\tau\sigma\mu\nu} &= g_{\tau\lambda} R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu} = \\ &= g_{\tau\lambda}(\partial_\mu \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}) \end{aligned} \qquad (1.97)$$

1.

$$R_{\tau\sigma\mu\nu} = -R_{\tau\sigma\nu\mu} \ - \ \text{очевидно} \qquad (1.98)$$

2.

$$R_{\tau\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\tau\mu\nu} \ - \ \text{не очевидно} \qquad (1.99)$$

$$\Gamma_{\xi,\nu\sigma} = g_{\xi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\nu g_{\sigma\xi} + \partial_\sigma g_{\xi\nu} - \partial_\xi g_{\nu\sigma}) \qquad (1.100)$$

$$\begin{aligned} R_{\tau\sigma\mu\nu} &= \partial_\mu \Gamma_{\tau,\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma_{\tau,\mu\sigma} + g^{\lambda\xi}(\Gamma_{\xi,\mu\sigma}\Gamma_{\lambda,\nu\tau} - \Gamma_{\xi,\nu\sigma}\Gamma_{\lambda,\mu\tau}) = \\ &= \partial_\mu\partial_\sigma g_{\tau\nu} - \partial_\mu\partial_\tau g_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma g_{\tau\mu} + \partial_\nu\partial_\tau g_{\mu\sigma} + \\ &\quad + g^{\lambda\xi}(\Gamma_{\xi,\mu\sigma}\Gamma_{\lambda,\nu\tau} - \Gamma_{\xi,\nu\sigma}\Gamma_{\lambda,\mu\tau}) \end{aligned} \qquad (1.101)$$

3.

$$R_{\tau\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\tau\sigma} \qquad (1.102)$$

4.

$$R^{\sigma}{}_{\rho\mu\nu} + R^{\sigma}{}_{\mu\nu\rho} + R^{\sigma}_{\nu\rho\mu} = 0 \qquad (1.103)$$

Из тождества Якоби:

$$[\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]\varphi + [\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\rho]]\varphi + [\nabla_\nu, [\nabla_\rho, \nabla_\mu]]\varphi = 0; \qquad (1.104)$$

$$[\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]\varphi = -\partial_\sigma \varphi R^{\sigma}{}_{\rho\mu\nu} \ \Rightarrow \ (1.103) \qquad (1.105)$$

5. Тождество Бьянки:

$$\nabla_\rho R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\mu R^{\lambda}{}_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\nu R^{\lambda}{}_{\sigma\rho\mu} = 0 \qquad (1.106)$$

Из тождества Якоби

$$[\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]A^\lambda + [\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\rho]]A^\lambda + [\nabla_\nu, [\nabla_\rho, \nabla_\mu]]A^\lambda = 0; \qquad (1.107)$$

Число независимых компонент:

$$N = \frac{n^2(n^2-1)}{12} \qquad (1.108)$$

$$\begin{aligned} n &= 4 \to \ N = 20 && (1.109) \\ n &= 3 \to \ N = 6 && (1.110) \\ n &= 2 \to \ N = 1 && (1.111) \end{aligned}$$

Тензор Риччи:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} \qquad (1.112)$$

Скаляр кривизны (не гауссова кривизна!):

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^{\mu}{}_{\mu} \qquad (1.113)$$

Энергия	1 ГэВ $= 1.6 \cdot 10^{-3}$ эрг
Масса	1 ГэВ $= 1.8 \cdot 10^{-24}$ г
Температура	1 ГэВ $= 1.16 \cdot 10^{13}$ K
Длина	1 ГэВ$^{-1} = 2.0 \cdot 10^{-14}$ см
Время	1 ГэВ$^{-1} = 6.6 \cdot 10^{-25}$ с
Плотность числа частиц	1 ГэВ$^{3} = 1.3 \cdot 10^{41}$ см$^{-3}$
Плотность энергии	1 ГэВ$^{4} = 2.1 \cdot 10^{38}$ эрг·см$^{-3}$
Плотность массы	1 ГэВ$^{4} = 2.3 \cdot 10^{17}$ г·см$^{-3}$

Энергия	1 эрг $= 6.3 \cdot 10^{2}$ ГэВ
Масса	1 г $= 5.6 \cdot 10^{23}$ ГэВ
Температура	1 K $= 8.62 \cdot 10^{-14}$ ГэВ
Длина	1 см $= 5.0 \cdot 10^{13}$ ГэВ$^{-1}$
Время	1 с $= 1.5 \cdot 10^{24}$ ГэВ$^{-1}$
Плотность числа частиц	1 см$^{-3} = 7.7 \cdot 10^{-42}$ ГэВ^{3}
Плотность энергии	1 эрг·см$^{-3} = 4.8 \cdot 10^{-39}$ ГэВ^{4}
Плотность массы	1 г·см$^{-3} = 4.5 \cdot 10^{-18}$ ГэВ^{4}