Модуляция космических лучей в квазибомовском приближении

Г. Ф. Крымский

Институт космофизических исследований и аэрономии СО РАН,
пр. Ленина 31, 677891 Якутск, Россия

Этот текст приготовлен как рабочий материал для исследования гелиосферных эффектов в космических лучах и предназначен для использования сотрудниками ИКФИА.Произведен строгий вывод уравнения переноса и определены коэффициенты переноса (тензор диффузии и дрейфовая скорость)в квазибомовском приближении.В этом же приближении рассмотрена модуляция космических лучей в осесимметричной гелиосфере.

1 Вводные замечания

Наличие в солнечном ветре магнитных неоднородностей, рассеивающих космические лучи, порождает модуляцию, которая проявляется в вариациях их интенсивности и анизотропии [1-4]. Кинетическое уравнение, описываающее движение частиц, превращается в уравнение переноса диффузионно- конвекционного типа благодаря тому, что интенсивность почти изотропна. Теория, с помощью которой вычисляются коэффициенты диффузии через статистические свойства случайного магнитного поля – поля неоднородностей –,чрезвычайно сложна и должна опираться на детальное знание этих свойств. В то же время, эти коэффициенты можно задавать феноменологически, подбирая их так, чтобы удовлетворялась совокупность наблюдательных данных. Это тем более оправдано потому, что измерения межпланетного поля на космических аппаратах дают сведения только вдоль траектории аппарата в солнечном ветре.Для полного описания статистических характеристик межпланетного магнитного поля необходимо привлекать те или иные дополнительные гипотезы – например, об изотропном характере магнитной турбулентности, а также предположения о крупномасштабном пространственном распределении этих свойств.

Для описания явлений переноса космических лучей часто используется бомовское приближение, в соответствии с которым время изотропизации частиц τ связано с их гирочастотой ω соотношением $\omega\tau \approx 1$. Гирочастота определяется характеристиками частицы – ее импульсом p и скоростью v (или энергией ε), зарядом e, а также напряженностью H среднего магнитного поля:

$$\omega = \frac{eHv}{pc} = \frac{eHc}{\varepsilon}. \tag{1}$$

С целью феноменологического описания различных ситуаций с магнитными неоднородностями выведем основные соотношения в квазибомовском приближении, полагая

$$\omega\tau = k = const. \tag{2}$$

Постоянная k может принимать значения, как меньшие, так и большие единицы.В первом случае поле предполагается сильно неоднородным, когда его регулярная составляющая мала, а во втором, наоборот, считается, что влияние нерегулярностей невелико.

2 Кинетическое уравнение

В кинетике космических лучей рассматривается функция распределения $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$, показывающая число частиц в единичном объеме фазового пространства.Фазовое пространство в дополнение к 3 координатам обычного пространства $\vec{r}$ содержит 3 координаты импульса частицы $\vec{p}$.

Функцию распределения обычно уподобляют плотности некоторой непрерывной величины в 6-мерном пространстве, для которой справедливо уравнение непрерывности

$$\frac{\partial f}{\partial t} + div_6 \vec{q} = 0. \tag{3}$$

Вектор $\vec{q}$ с 6 компонентами представляет собой плотность потока величины f и выражается как произведение f на скорость перемещения по координатам фазового пространства.В обычном пространстве это скорость частиц $\vec{v}$, которая у всех частиц, находящихся в малом объеме фазового пространства, одинакова.В пространстве импульса скорость выражается очевидным равенством

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \vec{F}, \tag{4}$$

где $\vec{F}$—сила, действующая на частицу. Для космических лучей имеют значение лишь силы электромагнитного происхождения:

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{H}]), \tag{5}$$

где $\vec{E}, \vec{H}$—напряженности электрического и магнитного полей, c—скорость света.

Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\vec{v}f)+\frac{\partial}{\partial \vec{p}}\left[e(\vec{E}+\frac{1}{c}[\vec{v}\vec{H}])f\right]=0. \tag{6}$$

Представляя члены, описывающие поведение функции распределения в обычном и импульсном пространстве, действующими независимо, вынесем из под знака дифференцирования соответствующие скорости:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}+e(\vec{E}+\frac{1}{c}[\vec{v}\vec{H}])\frac{\partial f}{\partial \vec{p}}=0. \tag{7}$$

Это можно сделать потому, что в указанном представлении скорость $\vec{v}$ не зависит от координат, а сила Лоренца, хотя и зависит от скорости, и, следовательно, от импульса, но дивергенция от нее в импульсном пространстве равна нулю. Полученное кинетическое уравнение носит название уравнения Лиувилля и из него непосредственно вытекает теоремма Лиувилля

$$\frac{df}{dt}=0, \tag{8}$$

утверждающая, что плотность в фазовом пространстве вдоль фазовой траектории (т.е.пути, связанном с группой фиксированных частиц) сохраняется постоянной. Причиной этого постоянства является отсутствие дивергенции 6-мерной скорости и, следовательно, сохранение фазового объема вдоль траектории. Хотя фиксированный объем сохраняется, он может деформироваться с течением времени и его отдельные части могут удаляться одна от другой. Частицы, в какой-то момент составляющие компактную группу в фазовом пространстве, удаляются на большие расстояния и при наличии мелкомасштабных неднородностей электрического и магнитного полей начинают вести себя некоррелировано. При сильных деформациях фазового объема он может быть растянут настолько, что его отдельные части не будут уже содержать частиц. Приближение непрерывной плотности в применении к реальным частицам перестает быть справедливым. Чтобы учесть рассеивающее действие электромагнитных неоднородностей, нарушающее справедливость уравнения Лиувилля, в него добавляют столкновительный член, который привносит в уравнение вероятностный характер движения частиц. Столкновительный член отражает то обстоятельство, что индивидуальная судьба двух сколь угодно близких частиц с течением времени становится существенно различной.

При наличии столкновительного члена кинетическое уравнение называют уравнением Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}+e(\vec{E}+\frac{1}{c}[\vec{v}\vec{H}])\frac{\partial f}{\partial \vec{p}}=F_{st}. \tag{9}$$

Столкновительный член F_{st} можно рассматривать как источник (сток) , уничтожающий частицу в одном месте фазового пространства и рождающий ее в другом месте.

Следует подчеркнуть ограниченный характер описания поведения частиц космических лучей с помощью уравнения Больцмана. Во-первых, реальные частицы обладают коллективным или "пучковым" поведением в течение определенного интервала времени, и их траектории в это время имеют сходство, тогда как уравнение Больцмана имеет дело с индивидуальными частицами. Во-вторых, реальные частицы не совершают скачков в фазовом пространстве. Поэтому уравнение переноса, выводимое из уравнения Больцмана, в некоторых случаях неудовлетворитнльно описывает поведение частиц в космических магнитных полях. Это относится, прежде всего, к процессам, где возникают большие градиенты (эффект Форбуша). Появление групп "окрашенных" частиц – пучков – проявляет себя в наблюдениях в виде значительных флуктуаций интенсивности, особенно, в случаях, когда используются приборы с узконаправленной апертурой. Это явление аналогично появлению каустик при распространении волн в неоднородных средах.Однако, в большинстве случаев приближение Больцмана является вполне удовлетворительным.

3 Столкновительный член

Наиболее просто столкновительный член записывается в системе отсчета, где отсутствует электрическое поле. Ограничимся случаем, когда хаотические движения неоднородностей магнитного поля и соответствующие им хаотические электрические поля малы. Это является хорошим приближением, например, для солнечного ветра, имеющего сверхзвуковую скорость, а также при рассмотрении явлений, связанных с ударными волнами. В указанном приближении для каждой точки пространства можно выбрать такую движущуюся систему отсчета, в которой электрические поля исчезают в достаточно большой окрестности этой точки одновременно. И в этой системе сохраняется энергия (и модуль импульса) частиц в процессе их рассеяния. Снабдим штрихом величины, относящиеся к указанной системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec{u}$. Тогда для столкновительного члена можно использовать простейшую форму

$$F'_{st} = -\frac{1}{\tau(p')}[f'(\vec{p'}) - \overline{f'(\vec{p'})}], \tag{10}$$

где черта сверху означает усреднение по направлениям движения частиц. В такой форме рассеяния предполагаются изотропными и происходящими с характерным временем τ.

Поскольку энергия частиц при рассеяниях не меняется, удобно в импульсном пространстве использовать сферическую систему координат, представляя импульс $\vec{p}$ как произведение модуля на единичный вектор направления движения частицы:

$$\vec{p} = p\vec{\Omega}. \tag{11}$$

Тогда функцию распределения можно представлять в виде ряда по сферическим функциям:

$$f(\vec{p}) = f^{(0)}(p) + f^{(1)}_{\alpha}(p)\Omega_{\alpha} + f^{(2)}_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha}\Omega_{\beta} + ... \tag{12}$$

Здесь используется обычное правило суммирования по повторяющимся значкам. Тензор $f^{(2)}_{\alpha\beta}$, описывающий 2 сферическую гармонику, в силу очевидных причин является симметричным к перестановке индексов и обладающим нулевым шпуром. Действительно, сумма диагональных членов пропорциональна $\Omega_{\alpha}\Omega_{\alpha} = 1$ и должна быть учтена в нулевой гармонике – изотропной части функции.

Если не рассматривать ситуации, где образуются большие градиенты, и ограничиться не слишком малыми временами, то рассеяния приводят к сильному угловому размыванию функции и можно пренебречь 2 сферической гармоникой. Поэтому везде, где будут встречаться члены, квадратичные по $\vec{\Omega}$, они будут усредняться по направлениям, что равносильно вычислению шпура у соответствующей матрицы, т.е. определению вклада этих членов в изотропную часть. Следовательно, будет производиться замена типа

$$(\vec{a}\vec{\Omega})(\vec{b}\vec{\Omega}) \rightarrow \frac{1}{3}\vec{a}\vec{b}. \tag{13}$$

Здесь использовано правило

$$\overline{\Omega_{\alpha}\Omega_{\beta}} = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}, \tag{14}$$

которое вытекает из независимости левой части от ориентации осей координат, вследствие чего она может быть выражена только через символ Кронекера. Коэффициент 1/3 получается сворачиванием левой и правой частей равенства.

Операции с вектором $\vec{\Omega}$ являются удобными, поскольку не требуют привязки к какой-либо ориентированной системе угловых координат. В случае необходимости правила усреднения, подобные приведенному, могут быть получены и для произведений единичного вектора более высоких степеней. Нечетные степени, естественно, при усреднении исчезают.Дифференцирование в импульсном пространстве также удобно представлять в виде дифференцирования отдельно по модулю и отдельно по направлению. Если функция зависит только от модуля p , то ее градиент

$$\frac{\partial f(p)}{\partial \vec{p}} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \vec{p}}, \tag{15}$$

а градиент p в силу сферической симметрии

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{p}} = \vec{\Omega}. \tag{16}$$

Для произвльной функции имеем сумму производной по модулю и производной по направлению:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{p}} = \vec{\Omega}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial \vec{\Omega}}. \qquad (17)$$

Применив это равенство к произвольному вектору $\vec{p} = p\vec{\Omega}$, для которого

$$\frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \qquad (18)$$

получаем формальное выражение для производной по направлению:

$$\frac{\partial \Omega_\alpha}{\partial \Omega_\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \Omega_\alpha \Omega_\beta. \qquad (19)$$

4 Преобразования систем отсчета

Получим формулы преобразования величин при переходе в движущуюся систему отсчета и обратно. Импульс и энергия частицы в любой системе отсчета определяются соотношениями

$$p = \gamma_v m v; \varepsilon = \gamma_v m c^2; p = \frac{\varepsilon v}{c^2}; \varepsilon = \sqrt{\left(mc^2\right)^2 + (pc)^2}, \qquad (20)$$

где $\gamma_v = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$—лоренц-фактор частицы.

Преобразование продольной компоненты импульса из неподвижной системы в движущуюся со скоростью $\vec{u}$ определяется формулой

$$p'_{||} = \gamma_u \left(p_{||} - \frac{u\varepsilon}{c^2}\right), \qquad (21)$$

где γ_u—лоренц-фактор движущейся системы, который в нашем случае малых $\vec{u}$ равен 1. Так как поперечные компоненты при таком преобразовании сохраняются, имеем

$$\vec{p}' = \vec{p} - \frac{\vec{u}}{v}p. \qquad (22)$$

Возводя в квадрат это выражение и затем извлекая корень, получим для модуля с точностью до u^2

$$p' = p\left(1 - \frac{\vec{u}\vec{\Omega}}{v}\right). \qquad (23)$$

Обратное преобразование получается заменой знака скорости $\vec{u}$. Поделив два последних выражения одно на другое, имеем с той же точностью:

$$\vec{\Omega}' = \vec{\Omega}\left(1 + \frac{\vec{u}\vec{\Omega}}{v}\right) - \frac{\vec{u}}{v}, \qquad (24)$$

а при усреднении по направлениям, как было упомянуто, с точностью до второй гармоники получаем

$$\vec{\Omega}' = \vec{\Omega} - \frac{2}{3}\frac{\vec{u}}{v}. \qquad (25)$$

Преобразование функции распределения легко получить, представив число частиц в малом фазовом объеме dV:

$$dN = f(\vec{p})dV = f'(\vec{p}')dV'. \tag{26}$$

Фазовый объем группы (пучка) частиц одинаков для неподвижной и движущейся систем отсчета. Он одинаков в любой системе отсчета, в том числе, в той, где эта группа в среднем покоится. Это видно из следующих рассуждений. Из преобразования импульса получаем

$$\Delta p = \gamma_v(\Delta p_0 + \frac{v\Delta\varepsilon_0}{c^2}). \tag{27}$$

Здесь v—средняя скорость частиц, а нулевым индексом снабжены величины в собственной системе отсчета пучка. Так как разброс импульсов считается малым, то $\varepsilon_0 \approx mc^2$, а $\Delta\varepsilon_0 \approx 0$ и имеем

$$\frac{dp}{dp_0} = \gamma_v. \tag{28}$$

Пространственный объем испытывает лоренцово сокращение и, следовательно,

$$\frac{dx}{dx_0} = \gamma_v^{-1}. \tag{29}$$

Отсюда и вытекает постоянство фазового объема. Поэтому имеем тождественное преобразование

$$f(\vec{p}) = f'(\vec{p}') \tag{30}$$

Время изотропизации в квазибомовскоим приближении пропорционально энергии частиц и в системе отсчета, движущейся вместе с магнитным полем, оно не зависит от направления движения частиц. Если представлять изотропизацию как столкновения с рассеивающими центрами, то частота соударений должна возрастать, когда частицы и рассеивающие центры движутся навстречу друг другу, но этот эффект компенсируется ростом энергии частиц при таких соударениях и, соответственно, уменьшением частоты соударений.Чтобы убедиться, что эта компенсация точная, достаточно перейти в систему отсчета каждой частицы. Пересчитав туда время между соударениями, видим, что оно постоянно и равно (как это следует из квазибомовского представления)

$$\tau_0 = \frac{kmc}{eH}. \tag{31}$$

Величина H здесь фиксирована и относится к неподвижной системе. Тогда в любой системе отсчета

$$\tau = \frac{k\varepsilon}{eHc}, \tag{32}$$

где ε—энергия частиц в этой системе. Как видим, квазибомовское время также преобразуется тождественно:

$$\tau(\varepsilon) = \tau'(\varepsilon'). \tag{33}$$

5 Столкновительный член в неподвижной системе

Имея формулы перехода из системы в систему, теперь нетрудно найти выражение для столкновительного члена. Имеем

$$f'(\vec{p}') = f(\vec{p}) = f^{(0)}(p) + \vec{\Omega}\vec{f}^{(1)}(p), \tag{34}$$

где разложение функции распределения ограничено первой сферической гармоникой. Подставляя сюда "штрихованные" p и $\vec{\Omega}$ и ограничиваясь членами, линейными по $\vec{u}$, находим:

$$f'(\vec{p}') = f^{(0)}(p') + p'\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p'}\frac{\vec{u}\vec{\Omega}'}{v'} + \left(\vec{\Omega}' + \frac{2}{3}\frac{\vec{u}}{v'}\right)\left(\vec{f}^{(1)}(p') + p'\frac{\partial \vec{f}^{(1)}}{\partial p'}\frac{\vec{u}\vec{\Omega}'}{v'}\right). \tag{35}$$

Производя усреднения члена, квадратичного по $\vec{\Omega}'$, и отбрасывая квадратичное по $\vec{u}$ произведение, видим, что

$$f'(\vec{p}') = f^{(0)}(p') + p'\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p'}\frac{\vec{u}\vec{\Omega}'}{v'} + \vec{\Omega}'\vec{f}^{(1)}(p') + \left(\frac{2}{3}\vec{f}^{(1)}(p') + \frac{1}{3}p'\frac{\partial \vec{f}^{(1)}}{\partial p'}\right)\frac{\vec{u}}{v'}. \tag{36}$$

При усреднении этой функции остаются первый и последний члены, вычитание которых из функции распределения дает

$$F'_{st} = -\frac{1}{\tau'(\epsilon')}\left[p'\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p'}\frac{\vec{u}\vec{\Omega}'}{v'} + \vec{\Omega}'\vec{f}^{(1)}(p')\right]. \tag{37}$$

Первый член в квадратных скобках имеет первый порядок малости по $\vec{u}$ и, следовательно, при переходе в неподвижную систему выражение для него сохраняется неизменным, а второй член преобразуется:

$$\vec{\Omega}'\vec{f}^{(1)}(p') = \left(\vec{\Omega} - \frac{2}{3}\frac{\vec{u}}{v}\right)\left(\vec{f}^{(1)}(p) - p\frac{\partial \vec{f}^{(1)}(p)}{\partial p}\frac{\vec{u}\vec{\Omega}}{v}\right). \tag{38}$$

Следовательно,

$$F_{st} = -\frac{1}{\tau(\epsilon)}\left[p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\frac{\vec{u}\vec{\Omega}}{v} + \vec{\Omega}\vec{f}^{(1)}(p) - \left(\frac{2}{3}\vec{f}^{(1)}(p) + \frac{1}{3}p\frac{\partial \vec{f}^{(1)}}{\partial p}\right)\frac{\vec{u}}{v}\right], \tag{39}$$

где, как и прежде, отброшена вторая гармоника.

6 Ток частиц

Возвращаясь теперь к кинетическому уравнению, выразим в нем величины $\vec{v}$ и $\vec{p}$ через единичный вектор $\vec{\Omega}$, введем единичный вектор магнитного поля $\vec{h}$, а вместо напряженности H подставим гирочастоту ω. Электрическое поле по определению величины $\vec{u}$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}[\vec{u}\vec{H}]. \tag{40}$$

После указанных подстановок кинетическое уравнение примет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\vec{\Omega}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \omega\left[\left(\vec{\Omega} - \frac{\vec{u}}{v}\right)\vec{h}\right]\left(p\frac{\partial f}{\partial p}\vec{\Omega} + \frac{\partial f}{\partial \vec{\Omega}}\right) = F_{st}. \tag{41}$$

Представим разложение функции распределения по сферическим гармоникам, как уже было сказано, первыми двумя членами:

$$f(\vec{p}) = f^{(0)}(p) + \vec{\Omega}\vec{f}^{(1)}(p). \tag{42}$$

Нулевая гармоника характеризует плотность числа частиц, а первая - их направленное движение. Если определить ток частиц $\vec{j}$ как разность числа частиц, пересекающих в единицу времени ориентированную единичную площадку в прямом и обратном направлениях, то он выражается через первую гармонику посредством

$$\vec{j} = \frac{4\pi}{3}vp^2\vec{f}^{(1)}(p). \tag{43}$$

Выражение, стоящее в кинетическом уравнении множителем при ω, при раскрытии скобок будет состоять из 4 слагаемых, из которых первое, пропорциональное $[\vec{\Omega}\vec{h}]\vec{\Omega}$, дает нулевой вклад. Заметим, что нулевой вклад дает и та часть этого слагаемого, которая зависит от первой сферической гармоники, поскольку соответствующее выражение пропорционально третьей степени $\vec{\Omega}$. Производная по направлению

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\Omega}} = \frac{\partial(\vec{f}^{(1)}\vec{\Omega})}{\partial \vec{\Omega}} = \vec{f}^{(1)} - (\vec{f}^{(1)}\vec{\Omega})\vec{\Omega}. \tag{44}$$

Соответствующие слагаемые преобразуем как смешанное векторное произведение:

$$[(\vec{\Omega} - \frac{\vec{u}}{v})\vec{h}]\frac{\partial f}{\partial \vec{\Omega}} = [\vec{h}\vec{f}^{(1)}](\vec{\Omega} - \frac{2}{3}\frac{\vec{u}}{v}). \tag{45}$$

Здесь множитель $2/3$ возник в связи с усреднением по направлениям.

Подставим полученные выражения в кинетическое уравнение, умножим обе части равенства на τ. При этом заменим $\omega\tau$ на постоянную k, определенную ранее:

$$\tau\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + \tau\frac{\partial \vec{f}^{(1)}}{\partial t}\vec{\Omega} + v\tau\vec{\Omega}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \vec{r}} + \frac{v\tau}{3}div\vec{f}^{(1)}+ \tag{46}$$

$$+k\left(-[\frac{\vec{u}}{v}\vec{h}](p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\vec{\Omega} + \frac{1}{3}p\frac{\partial \vec{f}^{(1)}}{\partial p}) + [\vec{h}\vec{f}^{(1)}](\vec{\Omega} - \frac{2}{3}\frac{\vec{u}}{v})\right) = \tau F_{st}. \tag{47}$$

Как и прежде, вторая гармоника исключена путем соответствующих усреднений.Это уравнение существенно упрощается, если полагать, что характерное время и характерное расстояние много больше, чем τ и $v\tau$ соответственно. Формально этому отвечает малый параметр τ (но не k!) в последнем уравнении. В нулевом порядке по

$\vec{u}$ и τ имеем $f^{(1)} = 0$, а в первом порядке получаем

$$\tau\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + v\tau\vec{\Omega}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial\vec{r}} - k\left[\frac{\vec{u}}{v}\vec{h}\right]p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\vec{\Omega} + [\vec{h}\vec{f}^{(1)}]\vec{\Omega} = -p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\frac{\vec{u}\vec{\Omega}}{v} - \vec{\Omega}\vec{f}^{(1)}. \qquad (48)$$

Здесь первый член представлен нулевой гармоникой, а остальные – первой гармоникой.Исключая нулевую гармонику и опуская множитель $\vec{\Omega}$, найдем уравнение для первой гармоники:

$$\vec{f}^{(1)} + k[\vec{h}\vec{f}^{(1)}] = -v\tau\frac{\partial f^{(0)}}{\partial\vec{r}} - p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\frac{\vec{u}}{v} + k[\frac{\vec{u}}{v}\vec{h}]p\frac{\partial f^{(0)}}{p}. \qquad (49)$$

Обозначим через $\vec{R}$ правую часть этого уравнения.Продольная (параллельная магнитному полю) компонента вектора $\vec{f}^{(1)}$ находится умножением равенства скалярно на h, а поперечная – векторным умножением на $k\vec{h}$ и вычитанием полученного результата из исходного уравнения. После выполнения этих операций получим, комбинируя продольную и поперечнную компоненты:

$$\vec{f}^{(1)} = \frac{1}{1+k^2}\vec{R} + \frac{k^2}{1+k^2}\vec{h}(\vec{h}\vec{R}) + \frac{k}{1+k^2}[\vec{R}\vec{h}]. \qquad (50)$$

Подстановка явного выражения для $\vec{R}$ дает

$$\vec{f}^{(1)} = -\frac{v\tau}{1+k^2}\left(\frac{\partial f^{(0)}}{\partial\vec{r}} + k^2\vec{h}\left(\vec{h}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial\vec{r}}\right) + k[\frac{\partial f^{(0)}}{\partial\vec{r}}\vec{h}]\right) - p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\frac{\vec{u}}{v}. \qquad (51)$$

Совокупность первых трех членов, пропорциональных градиенту нулевой гармоники, может быть преобразована к выражению, содержащему тензор диффузии $\hat{\kappa}$:

$$\vec{f}^{(1)} = -3\frac{\hat{\kappa}}{v}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial\vec{r}} - p\frac{\partial f^{(0)}}{p}\frac{\vec{u}}{v}, \qquad (52)$$

где в системе координат, одна из осей которых направлена вдоль магнитного поля, тензор выражается матрицей:

$$\hat{\kappa} = \frac{v^2\tau}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+k^2} & \frac{k}{1+k^2} \\ 0 & -\frac{k}{1+k^2} & \frac{1}{1+k^2} \end{pmatrix} \qquad (53)$$

7 Уравнение переноса

Кинетическое уравнение, выраженное через гармоники, усредним по направлениям с целью выделения изотропной части – нулевой гармоники, в результате чего из него выпадут члены, пропорциональные $\vec{\Omega}$:

$$\tau\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + \frac{v\tau}{3}div\vec{f}^{(1)} - \frac{k}{3}\left[\frac{\vec{u}}{v}\vec{h}\right]p\frac{\partial\vec{f}^{(1)}}{\partial p} - \frac{2k}{3}\frac{\vec{u}}{v}[\vec{h}\vec{f}^{(1)}] = \frac{2}{3}f^{(1)}\frac{\vec{u}}{v} + \frac{1}{3}p\frac{\partial\vec{f}^{(1)}}{\partial p}\frac{\vec{u}}{v}. \qquad (54)$$

Это выражение допускает более компактную тензорную запись

$$\tau\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t}+\frac{v\tau}{3}div\vec{f}^{(1)}-\frac{1}{3}\frac{\vec{u}}{v}\hat{z}(2\vec{f}^{(1)}+p\frac{\partial\vec{f}^{(1)}}{\partial p})=0, \tag{55}$$

где тензор $\hat{z}$ определен посредством умножения на произвольный вектор $\vec{a}$:

$$\hat{z}\vec{a}=\vec{a}+k[\vec{h}\vec{a}], \tag{56}$$

в чем нетрудно убедиться, сравнивая 2 последних уравнения. С другой стороны, член, пропорциональный тензору $\hat{z}$, содержит вектор $\vec{f}^{(1)}$, который сам пропорционален другому тензору $\hat{\kappa}$ (вкладом $\vec{u}$ в выражении для $\vec{f}^{(1)}$ здесь необходимо пренебречь, поскольку он приводит к величинам порядка u^2).Для тензора диффузии имеем аналогичное определение:

$$\hat{\kappa}\vec{b}=\frac{v^2\tau}{3}\frac{1}{1+k^2}\left(\vec{b}+k^2(\vec{b}\vec{h})\vec{h}+k[\vec{b}\vec{h}]\right). \tag{57}$$

Найдем произведение тензоров $\hat{z}\hat{\kappa}$, производя последовательно операции, определяемые этими тензорами:

$$\hat{z}\hat{\kappa}\vec{b}=\hat{\kappa}\vec{b}+k[\vec{h}\hat{\kappa}\vec{b}]=\frac{v^2\tau}{3}\frac{1}{1+k^2}\left(\vec{b}+k^2(\vec{b}\vec{h})\vec{h}+k[\vec{b}\vec{h}]+k[\vec{h}\vec{b}]+k^2[\vec{h}[\vec{b}\vec{h}]]\right). \tag{58}$$

После раскрытия двойного векторного произведения и приведения членов имеем просто

$$\hat{z}\hat{\kappa}\vec{b}=\frac{v^2\tau}{3}\vec{b}. \tag{59}$$

Следовательно, уравнение для изотропной части принимает вид:

$$\tau\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t}-\frac{v\tau}{3}div\left(-3\frac{\hat{\kappa}}{v}gradf^{(0)}-p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\frac{\vec{u}}{v}\right)-\frac{1}{3}\frac{\vec{u}}{v}\left[-\frac{3}{v}\frac{v^2\tau}{3}2\frac{\partial f^{(0)}}{\partial\vec{r}}+p\frac{\partial}{\partial p}(-\frac{3}{v}\frac{v^2\tau}{3}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial\vec{r}})\right]=0. \tag{60}$$

В последнем члене производная

$$p\frac{\partial(v\tau)}{\partial p}=v\tau, \tag{61}$$

поскольку $v\tau\sim p$. После упрощения и сокращения на τ приводим уравнение к виду

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t}=div(\hat{\kappa}gradf^{(0)}-\vec{u}gradf^{(0)}+\frac{1}{3}div\vec{u}p\frac{\partial f^{(0)}}{p}. \tag{62}$$

Таким образом, используя квазибомовское приближение с простейшей формой столкновительного члена мы сделали строгий вывод уравнения переноса космических лучей и определили диффузионный тензор.

8 Дрейфовый член

Антисимметричная часть тензора диффузии, порождаемая векторным произведением и описывающая так называемую холловскую диффузию с коэффициентом

$$\kappa_H = \frac{v^2\tau}{3}\frac{k}{1+k^2}, \tag{63}$$

может быть выделена в отдельный член. Холловский коэффициент диффузии определим через импульс частиц и напряженность магнитного поля

$$\kappa_H = \frac{v}{3}\frac{k^2}{k^2+1}\frac{pc}{eH}. \tag{64}$$

Член уравнения, содержащий холловскую диффузию преобразуется к символической векторной форме

$$div\left(\kappa_H[gradf^{(0)}\vec{h}]\right) = \frac{v}{3}\frac{k^2}{k^2+1}\frac{pc}{e}\nabla\left[\nabla f^{(0)}\frac{\vec{H}}{H^2}\right]. \tag{65}$$

В ссоответствии с правилами дифференцирования произведения расщепляем оператор дифференцирования на два оператора и используем свойство смешанного векторно-скалярного произведения:

$$\nabla\left[\nabla f^{(0)}\frac{\vec{H}}{H^2}\right] = (\nabla_f + \nabla_H)\left[\nabla f^{(0)}\frac{\vec{H}}{H^2}\right] = \frac{\vec{H}}{H^2}[\nabla\nabla f^{(0)}] - \nabla f^{(0)}\left[\nabla\frac{\vec{H}}{H^2}\right]. \tag{66}$$

Первый член обращается в нуль и получаем выражение, описывающее холловскую диффузию в виде дрейфа:

$$div(\kappa_H[gradf^{(0)}\vec{h}]) = -\vec{u}_{dr}gradf^{(0)}, \tag{67}$$

где

$$\vec{u}_{dr} = \frac{v}{3}\frac{k^2}{k^2+1}\frac{pc}{e}rot\frac{\vec{H}}{H^2}. \tag{68}$$

Уравнение переноса в дрейфовой форме содержит только симметричный тензор диффузии, который будем обозначать как $\tilde{\kappa}$:

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} = div(\tilde{\kappa}gradf^{(0)}) - (\vec{u}+\vec{u}_{dr})gradf^{(0)} + \frac{1}{3}div\vec{u}p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}. \tag{69}$$

Далее нулевой индекс у функции распределения, показывающий, что мы имеем дело с изотропной частью, будет опускаться.

Сделаем несколько замечаний о дрейфовой скорости $\vec{u}_{dr}$.Эта скорость отражает дрейф частиц в неоднородном магнитном поле. Однако,приведенное выражение для $\vec{u}_{dr}$ отличается от истинной скорости дрефа наличием зависимости от k. При наличии магнитных неоднородностей скорость дрейфа понижается и лишь при $k \gg 1$

она совпадает со скоростью истинного дрейфа.Существенно подчеркнуть, что скорость дрейфа может быть направлена под любым углом к магнитному полю и даже вдоль него. Важной является зависимость скорости дрейфа от импульса частиц, что сказывается при исследованиях модуляции космических лучей солнечным ветром. При смене знака магнитного поля обращается направление дрейфа частиц, и это представляется очень важным,поскольку межпланетное магнитное поле периодически испытывает переполюсовки.

9 Историческая справка

Уравнение переноса было выведено различными способами в ряде работ. В работах [5,6], где это уравнение было получено впервые, использовалась дифференциальная плотность космических лучей $n(p)$, связанная с функцией распределения соотношением

$$n(p) = 4\pi p^2 f(p). \tag{70}$$

Кроме того, вывод был сделан для области высоких энергий, где $\varepsilon \approx pc$.

Соответственно, в стационарном случае уравнение имело вид

$$div(\hat{\kappa} grad n) - div(n\vec{u}) + \frac{1}{3} div\vec{u} \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(n\varepsilon) = 0. \tag{71}$$

Оно интерпретировалось в [5,6] как 4-мерное уравнение непрерывности, где в качестве четвертого измерения была выбрана ось энергии частиц, перемещение вдоль которой происходит со скоростью

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{3}\varepsilon div\vec{u}. \tag{72}$$

Легко видеть, эта форма уравнения эквивалентна полученной выше.

В этих же работах [5,6] с помощью уравнения переноса исследован механизм возникновения анизотропии космических лучей в межпланетном магнитном поле, ответственный за солнечно-суточные вариации.

Строгий вывод уравнения переноса из уравнения Лиувилля был сделан в [7,8], где были рассчитаны значения коэффициента диффузии в зависимости от статистических характеристик случайного магнитного поля. В работе [9] уравнение было получено в эквивалентной, но несколько иной форме. Дрейфовая форма уравнения, полученная выше, но с другим выражением для дрейфовой скорости, использовалась в расчетах модуляции космических лучей солнечным ветром(см., напр., [10–12]). Особый интерес к явлению дрейфа космических лучей и соответственно к дрейфовой форме уравнения переноса возник после работы [13], где было показано, что различная полярность межпланетного магнитного поля приводит к существенно различному поведению анизотропии космических лучей.

В работах [14,15] было обнаружено, что уравнение переноса в применении к космическим ударным волнам описывает прежде неизвестный механизм регулярного ускорения космических лучей.

10 Межпланетное магнитное поле и коэффициенты переноса

Общее магнитное поле Солнца, "вмороженное" в плазму солнечного ветра, выносится на большие расстояния как межпланетное поле. Солнечный ветер возникает вследствие перегрева солнечной короны, в результате чего силы давления в корональной плазме преодолевают гравитационное поле и выталкивают плазму наружу, где она под действием этих сил приобретает сверхзвуковую скорость и совершает свободный разлет. На начальном участке "разгона" потоков солнечной плазмы магнитное поле Солнца, имеющее дипольный характер, оказывает влияние на движение плазмы, а на болших расстояниях оно переносится чисто кинематически. Если отвлечься от вращения Солнца, то солнечный ветер течет всюду радиально вдоль силовых линий межпланетного магнитного поля. Так как радиальная компонента поля диполя обращается в нуль в экваториальной плоскости, то имеется гелиоширотный градиент магнитного давления, стремящийся отклонить радиальный поток в сторону экваториальной плоскости так, чтобы напряженность радиального поля была однородно распределена по гелиошироте. Расчеты и наблюдения показывают, что однородное распределение магнитного поля является хорошим приближением. Радиус, на котором прекращается разгон солнечного ветра, не превышает $0.15 \div 0.2$ астр. ед.

Вращение Солнца приводит к появлению азимутальной компоненты поля. В системе отсчета, вращающейся вместе с Солнцем, скорость имеет азимутальную компоненту $u'_\varphi = -\omega_\odot r \sin\theta$, $\omega_\odot$ —угловая скорость Солнца.Соответственно, магнитное поле имеет такое же сотношение компонент как и скорость, поскольку в этой системе отсчета плазма течет вдоль магнитного поля. Поэтому имеем

$$H_\varphi = -H_r \frac{\omega_\odot r \sin\theta}{u_0}. \tag{73}$$

В качестве масштаба длины r_0 удобно выбрать отношение $u_0/\ \omega_\odot$,тогда на расстоянии r_0 азимутальная компонента поля в экваториальной плоскости и радиальная компонента равны между собой и будут обозначаться как H_0.

Таким образом, магнитное поле во всей области сверхзвукового ветра представляется выражениями:

$$H_r = H_0 \frac{r_o^2}{r^2} Sign(\frac{\pi}{2} - \theta), \tag{74}$$

$$H_\varphi = -H_0 \frac{r_0^2}{r^2} Sign(\frac{\pi}{2} - \theta). \tag{75}$$

Здесь предполагается,что магнитный момент диполя и вращательный момент Солнца параллельны, в силу чего радиальная компонента поля положительна в северном полушарии ($\theta < \pi/2$) и отрицательна в южном. Каждые 11 лет в максимуме очередного цикла солнечной активности полярность магнитного поля меняется и, соответственно, надо менять знак магнитного поля в расчетных формулах.

В заданном выше магнитном поле легко рассчитать коэффициенты диффузии и дрейфовые скорости. Подстановка полученного выше выражения для магнитного поля в формулу для скорости дрейфа дает:

$$u_{dr,r} = v \frac{p}{p_1} \left[\frac{r^2}{r_0^2 + r^2} \delta(\theta - \frac{\pi}{2}) - \frac{r^2 r_0^2 |\cos\theta|}{(r_0^2 + r^2 \sin^2\theta)^2} \right], \tag{76}$$

$$u_{dr,\theta} = v \frac{p}{p_1} r^2 \frac{2r_0^2 + r^2 \sin^2\theta}{(r_0^2 + r^2 \sin^2\theta)^2} \sin\theta Sign(\frac{\pi}{2} - \theta). \tag{77}$$

Здесь импульс

$$p_1 = \frac{3}{2} \frac{k^2 + 1}{k^2} p_0; p_0 = \frac{eH_0 r_0}{c}. \tag{78}$$

Дельта-функция обусловлена наличием токового слоя в экваториальной плоскости и появляется при формальном дифференцировании разрывного множителя. Характерный масштаб для импульса p_0 получим, если примем скорость солнечного ветра равной 400 км/сек и напряженность магнитного поля на орбите Земли около 5γ. При таких параметрах $r_0 = R_e = 1.5 \times 10^{13}$см, $H_0 = 3 \times 10^{-5}$гс и $p_0 \approx 150$ГэВ/с. Если принять $k^2 \gg 1$, то для энергии $\sim$15 ГэВ, которую можно считать эффективной энергией частиц, регистрируемой нейтронными мониторами, типичная величина скорости дрейфа составит 20 тыс.км/сек, что почти на два порядка больше скорости солнечного ветра. С ростом энергии частиц эта цифра будет еще больше.

Продольный, поперечный и холловский коэффициенты диффузии соответственно равны:

$$\kappa_\| = \frac{vr_0}{3} \frac{p}{p_0} \frac{H_0}{H} k; \kappa_\perp = \frac{\kappa_\|}{k^2 + 1}; \kappa_H = \frac{\kappa_\| k}{k^2 + 1}. \tag{79}$$

11 Гелиопауза

Сверхзвуковой ветер имеет динамическое давление, которое вследствие радиального расширения квадратично падает с расстоянием. На орбите Земли типичные параметры ветра: концентрация частиц n_0=8 частиц/см^3, скорость u_0=400 км/сек. Так как основной состав – протоны(масса 1.7×10^{-24} г), то типичное динамическое давление ветра $\rho v^2 = 2\times10^{-8}$ дн/см^2.

Плотность энергии космических лучей, а также других компонент межзвездной среды по порядку величины равна 1 эВ/см^3, что соответствует давлению $\sim 10^{-12}$ дн/см^2. Следовательно, на расстоянии порядка 100 астр. ед. солнечный ветер должен претерпевать ударный переход и становиться дозвуковым. Приближенно можно считать, что модулирующее действие солнечного ветра на этом расстоянии прекращается. Указанная граница сверхзвукового ветра носит название гелиопаузы.

Модуляция космических лучей в гелиосфере зависит от условий на гелиопаузе. Сегодня при отсутствии точных знаний о гелиопаузе формулировать краевые условия приходится с использованием модельных представлений. Наличие крупномасштабного электрического поля в гелиосфере свидетельствует о том, что разные области гелиосферы имеют разный потенциал по отношению к внешней среде. В рассматриваемой модели гелиосферного магнитного поля крупномасштабное электрическое поле является чисто потенциальным и гелиопауза должна его замыкать.

Рассмотрим с этой целью простейшую модель гелиопаузы, предполагая, что она имеет сферическую форму и что на ней ветер скачком теряет высокую электропроводность.Уравнение непрерывности для магнитного поля запишем в форме:

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = rot[\vec{u}\vec{H}] - rot\left(\frac{c^2}{4\pi\sigma}rot\vec{H}\right). \qquad (80)$$

В стационарном случае наше предположение означает, что внутри гелиосферы поведение магнитного поля определяется первым членом, а снаружи – вторым. Для того, чтобы найти распределение потенциала вдоль гелиопаузы, нет необходимости решать это уравнение. Так как электрическое поле внутри гелиосферы имеет только меридиональную компоненту

$$E_\theta = -\frac{u}{c}H, \qquad (81)$$

которая непрерывна на гелиопаузе, то распредепение потенциала известно с точностью до постоянной. Эта постоянная находится из условия, что гелиосфера в целом электрически нейтральна. Следовательно,

$$U(\theta) = -\frac{uH_0r_0}{c}\left[\cos\theta Sign(\frac{\pi}{2}-\theta)+C\right] \qquad (82)$$

и после усреднения по сфере находим $C = -1/2$.Отсюда вытекает, что полярные области гелиосферы имеют отрицательный потенциал при положительной полярности магнитного поля, а на низких гелиоширотах гелиосфера заряжена положительно. Нулевой потенциал достигается на гелиошироте $\pm 30^0$.

Знакопеременный характер потенциала в рассматреваемой модели связан с двумя каналами аннигиляции азимутального поля за пределами гелиопаузы: высокоширотные силовые линии аннигилируют, стягиваясь в точку на полярной оси, а низкоширотные аннигилируют в плоскости экватора. Подчеркнем, что вывод о знакопеременности электрического потенциала не зависит от детальных предположений о структуре гелиопаузы. Этот вывод опирается лишь на потенциальный характер крупномасштабного электрического поля.

Оценим потенциал, полагая азимутальную компоненту магнитного поля на орбите Земли равной 3γ, а скорость ветра 400 км/сек. Получаем, что он равен ± 100 МВ, где в случае положительной полярности магнитного поля знак "–" относится к полярным областям, а "+" — к плоскости гелиоэкватора. Наличие потенциала такой величины создает заметную модуляцию космических лучей.

Модуляция электростатическим полем может быть вычислена с помощью уравнения Лиувилля. Если предполагать, что за гелиопаузой на космические лучи оказывает влияние только электростатичческое поле, то это уравнение имеет вид

$$\vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + e\vec{E}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0, \tag{83}$$

причем в случае изотропии $\partial/\partial\vec{p} = \vec{\Omega}\partial/\partial p$. Сокращая на произвольный множитель $\vec{\Omega}$, приводим уравнение к интегрируему виду:

$$v\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + e\vec{E}\frac{\partial f}{\partial p} = 0. \tag{84}$$

Так как $\vec{E} = -\nabla U$, а $v = \partial\varepsilon/\partial p$, то общим интегралом этого уравнения является:

$$f(\vec{r}, p) = F(\varepsilon + eU). \tag{85}$$

Полагая функцию распределения за пределами области модуляции равной

$$f_0 = Bp^{-(\gamma+2)}, \tag{86}$$

получаем

$$f = B\left[\left(\frac{\varepsilon + eU}{c}\right)^2 - (mc)^2\right]^{-\frac{(\gamma+2)}{2}} \approx f_0\left[1 - (\gamma+2)\frac{eU\varepsilon}{(pc)^2}\right]. \tag{87}$$

Последнее приближенное равенство справедливо при $p \gg eU/c$. Следовательно, например, при энергии 10 ГэВ электростатическая модуляция составляет примерно ± 5 процентов и должна учитываться в расчетах.

12 Модуляция в линейном приближении

Модуляция галактических космическиих лучей может рассматриваться в линейном по скорости ветра приближении. Такой подход дает удовлетворительную точность при описании вариаций космических лучей, наблюдаемых с помощью нейтронных мониторов и других детекторов, чувствительных к более высоким энергиям. Для иллюстрации рассмотрим известное решение простой задачи о сферически-симметричном ветре с изотропным коэффициентом диффузии, не зависящим от импульса и линейно растущим с расстоянием:

$$f = f_0(p)\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha}, \alpha = \left(\frac{uR}{2\kappa_0} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{uR}{2\kappa_0} - 1\right)^2 + \frac{2(\gamma+2)}{3}\frac{uR}{\kappa_0}}. \tag{88}$$

Здесь κ_0–значение коэффициента диффузии на границе солнечного ветра R,$(\gamma+2)$–показатель степенной зависимости $f_0(p)$, γ–показатель дифференциального спектра космических лучей. Значение α найдено путем подстановки выражения для f в уравнение переноса. Глубина модуляции на расстоянии r от Солнца составляет

$$I = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha}. \tag{89}$$

Сравним "точное" значение губины модуляции и полученное в линейном по скорости ветра приближении:

$$I \approx \frac{(\gamma+2)uR}{3\kappa_0} ln\frac{R}{r}. \tag{90}$$

Возьмем $\gamma = 2.5$, зафиксируем отношение R/r, положив, например, $ln(R/r) = 5$. Будем менять параметр модуляции uR/κ_0:

Параметр модуляции	10^{-3}	3×10^{-3}	10^{-2}	3×10^{-2}	5×10^{-2}
Точное значение	0.747	2.22	7.20	20.0	30.9
Линейное значение	0.75	2.25	7.50	22.5	37.5

(91)

Здесь глубина модуляции выражена в процентах.

Из таблицы видно, что линейное приближение дает удовлетворительную точность даже когда глубина модуляции достигает 20÷30 процентов. Поэтому будем считать скорость ветра малым параметром. В соответствии с этим функцию распределения будем представлять как сумму варьируемой и неварьируемой частей. Неварьируемую часть обозначим как f_0, а для варьируемой части сохраним обычное обозначение f. Линеаризация по $\vec{u}$ дает:

$$\nabla(\tilde{\kappa}\nabla f) - \vec{u}_{dr}\nabla f = \frac{2(\gamma+2)}{3}\frac{u_0}{r}f_0. \tag{92}$$

Член в правой части обусловлен дивергенцией скорости солнечного ветра, которая равна $2u_0/r$, а зависимость f_0 от импульса представляется степенной с показателем, равным $-(\gamma+2)$. В силу осевой симметрии радиальный и гелиоширотный градиенты космических лучей создают вклад, который определяется компонентами тензора диффузии :

$$\kappa_{rr} = \kappa_{\parallel}\frac{H_r^2}{H^2} + \kappa_{\perp}\frac{H_\varphi^2}{H^2}, \kappa_{\theta\theta} = \kappa_{\perp}. \tag{93}$$

13 Модуляция в дальней зоне

В большей части области модуляции магнитное поле может представляться как чисто азимутальное. Вклад радиальной компоненты поля зависит от степени его регулярности, выражаемой параметром k. Если принять для ориентировки отношение коэффициентов равным $\kappa_\perp/\kappa_\| \approx 0.1$, как часто упоминается в литературе, то для параметра имеем значение $k = 3$. В этом случае радиальной компонентой поля и, соответственно, продольной диффузией частиц можно пренебречь всюду за исключением цилиндрической области, соосной с Солнцем и имеющей радиус около $2r_0$, т.е. 2 астрономических единиц. Естественно, крупномасштабная картина модуляции будет определяться "дальней зоной", где поле чисто азимутальное.

Выражения для коэффициентов диффузии и скоростей дрейфа для дальней зоны упрощаются:

$$\kappa_{rr} = \kappa_{\theta\theta} = \kappa_\perp = \frac{vr_0}{3}\frac{p}{p_0}\frac{k}{k^2+1}\frac{r}{r_0\sin\theta} \tag{94}$$

$$u_r = v\frac{p}{p_1}\delta(\theta - \frac{\pi}{2}), u_\theta = v\frac{p}{p_1}\frac{Sign(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\sin\theta}. \tag{95}$$

Следует обратить внимание, что коэффициент диффузии и скорость дрейфа обращаются в бесконечность на оси симметрии. Физически это связано с тем, что напряженность магнитного поля здесь чрезвычайно мала. В принятом нами приближении она формально обращается в нуль.

Следовательно, уравнение переноса в дальней зоне приобретает вид:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\kappa_\perp\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\kappa_\perp\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) - u_r\frac{\partial f}{\partial r} - u_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta} = \frac{b}{r}, \tag{96}$$

где $b = 2(\gamma+2)u_0f_0/3$.

Подставим выражения для коэффициентов переноса, разделим уравнение на vp/p_1 и умножим на $r\sin\theta$, после чего уравнение приобретает простой вид:

$$\frac{1}{2k}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{2k}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} - r\frac{\partial f}{\partial r}\delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\partial f}{\partial\theta}Sign\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = b_1\sin\theta, \tag{97}$$

$$b_1 = \frac{2(\gamma+2)}{3}\frac{u_0}{v}\frac{p_1}{p}f_0. \tag{98}$$

Уравнение можно привести к еще более удобному виду, если ввести гелиошироту $\psi = \pi/2 - \theta$ и переменную $\lambda = -ln(r/R)$, где R – радиус гелиосферы:

$$\frac{1}{2k}\Delta f - \frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial\lambda} + \frac{\partial f}{\partial\lambda}\delta(\psi) + \frac{\partial f}{\partial|\psi|} = b_1\cos\psi. \tag{99}$$

Оператор Лапласа действует на переменные λ, ψ как на декартовы координаты.

14 Краевые условия

Если потребовать, чтобы функция распределения зависела от модуля гелиошироты, то получим для второй производной

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} = \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\partial f}{\partial |\psi|} Sign\psi\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial |\psi|^2} + 2\frac{\partial f}{\partial |\psi|}\delta(\psi). \tag{100}$$

Следовательно, опуская знак модуля ψ в области $0 \leq \psi \leq \pi/2$, получаем уравнение

$$\frac{1}{2k}\Delta f - \frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial \psi} = b_1 \cos\psi, \tag{101}$$

а при $\psi = 0$ имеем краевое условие

$$\frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial \psi} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0, \tag{102}$$

вытекающее из необходимости взаимного погашения сингулярных членов.

Краевое условие на гелиопаузе ($\lambda = 0$) определяется поведением электрического потенциала:

$$f = b_1 \frac{k^2}{k^2+1}\left(-\frac{1}{2} + \sin\psi\right). \tag{103}$$

Здесь f является варьируемой частью, и для полного описания необходимо добавлять невозмущенную часть f_0.

В этом краевом условии амплитуда, зависящая от напряженности межпланетного магнитного поля, скорости солнечного ветра и импульса частиц, для удобства выражена через тот же самый параметр b_1, который введен выше. При $\psi = \pi/2$ из-за бесконечной величины коэффициента диффузии функция распределения постоянна и равна

$$f|_{\psi=\pi/2} = \frac{b_1}{2}\frac{k^2}{k^2+1}. \tag{104}$$

Таким образом, уравнение и 3 краевых условия определяют поведение функции f в полосе $\lambda \geq 0, 0 \leq \psi \leq \pi/2$. Изменение уравнения и краевых условий при переходе к отрицательной полярности осуществляется одновременным изменением знака k и b_1.

Если целью вычислений является нахождение модуляции вблизи орбиты Земли, то имеем точку ($\lambda \approx 4.6; \psi = 0$), в окрестности которой нам нужно определить поведение функции распределения. Эта точка отстоит от границ области соответственно на 4.6 и $\pi/2$ безразмерных единиц. Эти расстояния одного порядка и влияние той или иной границы критическим образом зависит от величины и направления дрейфа частиц.

При положительной полярности поля дрейф направлен к плоскости экватора и вдоль нее наружу. Поэтому основное влияние оказывает высокоширотная граница $\psi = \pi/2$. При отрицательной полярности противоположное направление дрейфа частиц перекрывает влияние высокоширотной границы, и необходимо учитывать условия на гелиопаузе. Лишь при $k < 1$, когда дрейф невелик, высокоширотная граница будет давать вклад в решение при отрицательной полярности магнитного поля.

15 Положительная и отрицательная полярность магнитного поля

При положительной полярности, пренебрегая влиянием гелиопаузы, находим решение, не зависящее от λ. Оно находится двумя последовательными интегрированиями по ψ, а постоянные интегрирования определяются из условий при $\psi = 0$ и $\psi = \pi/2$:

$$f(\psi) = \frac{2kb_1}{4k^2+1}(2k\sin\psi - \cos\psi - 2k) + \frac{2kb_1}{4k^2+1}\left(e^{-2k\psi} - e^{-k\pi}\right) + \frac{b_1}{2}\frac{k^2}{k^2+1}. \qquad (105)$$

В плоскости экватора с точностью до малой экспоненциальной добавки функция равна

$$f(0) = -b_1\left(\frac{4k^2}{4k^2+1} - \frac{1}{2}\frac{k^2}{k^2+1}\right) \qquad (106)$$

и отрицательна при любых k.

В случае отрицательной полярности решение, не зависящее от λ, формально тоже существует, оно получается заменой знака k и b_1 и для экваториальной плоскости имеет вид:

$$f(0) \approx -\frac{2kb_1}{4k^2+1}e^{k\pi}. \qquad (107)$$

Видно, что глубина модуляции получается очень большой. Как уже указывалось, причиной этому является дрейф в обе стороны от экваториальной плоскости. Поэтому нобходимо учитывать влияние гелиопаузы. Если ограничиться не слишком малыми k, то влиянием высокоширотной границы можно пренебречь и рассматривать поведение функции на низких гелиоширотах, где $\sin\psi \approx \psi, \cos\psi \approx 1$.

Уравнение

$$\frac{1}{2k}\Delta f - \frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial\lambda} - \frac{\partial f}{\partial\psi} = b_1 \qquad (108)$$

с краевыми условиями

$$\frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial\psi} - \frac{\partial f}{\partial\lambda} = 0|_{\psi=0}, \qquad (109)$$

$$f = b_1\frac{k^2}{k^2+1}\left(\frac{1}{2} - \psi\right)|_{\lambda=0} \qquad (110)$$

в этом случае имеет простое решение:

$$f = b_1\frac{k^2}{k^2+1}\left(\frac{1}{2} - |\psi| - \frac{\lambda}{k}\right). \qquad (111)$$

Здесь восстановлен знак модуля ψ.Следует обратить внимание, что функция f симметрична относительно экваториальной плоскости, а ее производная по ψ терпит разрыв при $\psi = 0$, так что поведение f имеет "клинообразный" характер.

16 Заключительные замечания

Полученные решения являются основой для количественного сопоставления с теоретическими представлениями экспериментальных данных о вариациях космических лучей и их анизотропии с циклом солнечной активности. Анизотропия отображается вектором тока $\vec{f}^{(1)}$, который полностью определен, если вычислен градиент функции распределения. На орбите Земли тензор диффузии должен вычисляться с учетом вклада радиальной компоненты межпланетного поля, которая здесь имеет прмерно ту же величину как и азимутальная.

В представленной модели модуляции космических лучей единственным подгоночным параметром является параметр k, который наряду со скоростью солнечного ветра, напряженностью магнитного поля и радиусом гелиосферы полностью определяет картину модуляции.Детальное сопоставление с данными наблюдений должно показать, какие модификации этой модели требуются. Не исключено, что необходимо будет предполагать этот параметр зависящим от импульса частиц. Также возможно, что эффективное значение параметра по всему объему гелиосферы, определяющее глубину модуляции, будет отличаться от его локального значения, от которого зависят свойства наблюдаемой анизотропии.

Если требуемое значение $k < 1$, то необходимо пересчитавать напряженность регулярного магнитного поля, которая в этом случае меньше, чем находимая из прямых наблюдений. Могут потребоваться и другие модификации модели. Именно эксперимент должен ответить на все поставленные вопросы.

17 Литература

1 Дорман Л.И., Вариации космических лучей, М., Гостехиздат, 1957

2 Кузьмин А.И., Вариации космических лучей и солнечная активность, М., Наука, 1968

3 Крымский Г.Ф., Кузьмин А.И., Кривошапкин П.А. и др., Космические лучи и солнечный ветер, Н-ск, Наука, 1981

4 Droge W., in Proc. Cosmic Ray Conf., 1993, Calgary

5 Крымский Г.Ф., Геом. и аэрон., т.4, 977, 1964

6 Parker E.N., Planet. Space Sci., v.13, 9, 1965

7 Долгинов А.З., Топтыгин И.Н., ЖЭТФ, т.51, 1771, 1966

8 Топтыгин И.Н., Космические лучи в межпланетных магнитных полях, М., Наука, 1983

9 Gleeson L.J., Axford W.I., Astrophys. J. Lett., v.149, L115, 1967

10 Jokipii J.R., Levy E.H., Hubbard W.B., Astrophys. J., v.213, 861, 1977

11 Moraal H., Gleeson L.J., Webb G.M., in Proc. Cosmic Ray Conf., 1979, Kyoto

12 Jokipii J.R., in Proc. Cosmic Ray Conf., 1997, Durban

13 Levy E.H., J. Geophys. Res., v.81, 2082, 1976

14 Крымский Г.Ф., ДАН СССР, т.234, 1306, 1977

15 Axford W.I., Leer E., Scadron G., in Proc. Cosmic Ray Conf., 1977, Plovdiv

Текст отпечатан по состоянию на 11.05.99